

凸不等式制約付き DC 計画問題の最適性条件と 必要十分な制約想定

島根大学大学院総合理工学研究科 佐伯 雄介 (Yusuke Saeki)
Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering, Shimane
University

島根大学大学院総合理工学研究科 黒岩 大史 (Daishi Kuroiwa)
Major in Interdisciplinary Science and Engineering, Shimane University

概要

本稿では, [8, 9] において証明された凸計画問題に関する制約想定 Farkas-Minkowski constraint qualification と basic constraint qualification についての結果を紹介する.

1 導入

凸計画問題において, 制約想定は最適性条件や双対性の研究に欠かすことのできない概念であり, Slater 条件をはじめ, 数多くの制約想定の研究がなされてきた. Goberna, Jeyakumar and López [2] は凸計画問題における Lagrange 双対性と制約想定との関係性について研究し, Farkas-Minkowski constraint qualification (FM 制約想定) がこの問題における Lagrange 強双対性のための必要十分な制約想定であること, そして locally Farkas-Minkowski constraint qualification がこの問題における Lagrange 最小・最大双対性のための必要十分な制約想定であることを証明した. また, Li, Ng and Pong [6] は凸計画問題における最適性条件と制約想定との関係性について研究し, basic constraint qualification (BCQ) がこの問題における最適性条件のための必要十分な制約想定であることを証明した. 凸計画問題に関する他の制約想定についての研究は [1, 4, 5] を参照されたい.

一方, DC 計画問題の研究では, Hiriart-Urruty [3] は ε -劣微分を用いることで制約なし DC 計画問題における ε -最適性の特徴付けを与え, 特別な場合としてこの問題における大域的最適性の特徴付けを得ていた. 近年, 凸不等式制約付き DC 計画問題において, BCQ が局所的な最適性条件のための必要十分な制約想定であることが証明された ([7]).

本稿では, [8, 9] において得られた結果について紹介する. まず, FM 制約想定が凸不等式制約付き DC 計画問題における ε -最適性条件のための必要十分な制約想定であることを紹介する. 次に, FM 制約想定と BCQ がある条件の下で凸不等式制約付き DC 計画問題における大域的な最適性条件のための必要十分な制約想定であることも紹介する.

2 準備

X は実局所凸ハウスドルフ線形位相空間, X^* はその双対空間とする. $x \in X$ における X^* の関数 x^* の値を $\langle x^*, x \rangle = x^*(x)$ と表す. X^* の部分集合 Z に対して, Z の凸包と錐包をそれぞれ $\text{co } Z$ と $\text{cone } Z$ と表す.

$f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を真凸関数とする. f の実効定義域 $\text{dom } f$ とエピグラフ $\text{epi } f$ をそれぞれ次のように定義する.

$$\text{dom } f = \{x \in X \mid f(x) < +\infty\}$$

$$\text{epi } f = \{(x, r) \in X \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq r\}$$

f の共役関数 $f^* : X^* \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を次のように定義する.

$$f^*(x^*) = \sup\{\langle x^*, x \rangle - f(x) \mid x \in X\}, \forall x^* \in X^*$$

$\varepsilon > 0$ に対して, $x \in \text{dom } f$ における f の ε -劣微分 $\partial_\varepsilon f(x)$ を次のように定義する.

$$\partial_\varepsilon f(x) = \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, y - x \rangle \leq f(y) - f(x) + \varepsilon, \forall y \in X\}$$

特に $\varepsilon = 0$ のとき, $\partial_0 f(x)$ は x における f の劣微分と呼ばれ, しばしば $\partial f(x)$ と表される.

A を X の凸集合とする. A の標示関数 $\delta_A : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を次のように定義する.

$$\delta_A(x) = \begin{cases} 0 & x \in A, \\ +\infty & x \notin A \end{cases}$$

$\varepsilon > 0$ に対して, $x \in A$ における A の ε -法線錐 $N_\varepsilon(A, x)$ を次のように定義する.

$$N_\varepsilon(A, x) = \partial_\varepsilon \delta_A(x) (= \{x^* \in X^* \mid \langle x^*, y - x \rangle \leq \varepsilon, \forall y \in A\})$$

特に $\varepsilon = 0$ のとき, $N_0(A, x)$ は x における A の法線錐と呼ばれ, しばしば $N_A(x)$ と表される.

本稿では, 次のような制約集合 S の下で数理計画問題を考える.

$$S = \{x \in X \mid h_i(x) \leq 0, \forall i \in I\}$$

ただし, I は添字集合, $h_i : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ ($i \in I$) は下半連続な真凸関数である.

まず, 凸計画問題に関する制約想定である basic constraint qualification (BCQ) を紹介する.

定義 2.1 ([6]). $\{h_i \mid i \in I\}$ は X から $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ への下半連続な真凸関数族とする. このとき, 関数族 $\{h_i \mid i \in I\}$ が $\bar{x} \in S$ で BCQ を満たすとは, 次が成立するときをいう.

$$N_S(\bar{x}) = \text{cone co } \bigcup_{i \in I(\bar{x})} \partial h_i(\bar{x})$$

ただし, $I(\bar{x}) = \{i \in I \mid h_i(\bar{x}) = 0\}$ である.

このBCQは凸不等式制約付きDC計画問題における局所的な最適性条件のための必要十分な制約想定でもある ([7]). 次に, 凸計画問題に関する制約想定である Farkas-Minkowski constraint qualification (FM 制約想定) という概念を紹介する.

定義 2.2 ([2]). $\{h_i \mid i \in I\}$ は X から $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ への下半連続な真凸関数族とする. このとき, 関数族 $\{h_i \mid i \in I\}$ が FM 制約想定を満たすとは, 次の集合が汎弱閉であるときをいう.

$$\text{cone co } \bigcup_{i \in I} \text{epi } h_i^* + \{0\} \quad [0, +\infty)$$

関数 $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, 集合 $A \subset X$, $\varepsilon > 0$ に対して, 点 $\bar{x} \in A$ が A での f の ε -最小点であるとは, f が $\bar{x}$ で有限値をとり, 任意の $x \in A$ に対して, $f(\bar{x}) \leq f(x) + \varepsilon$ が成立するときをいう. 特に $\varepsilon = 0$ のとき, $\bar{x}$ は A での f の最小点であるという. Hiriart-Urruty [3] によって与えられた制約なし DC 計画問題のための ε -最適性条件と大域的な最適性条件を紹介する.

定理 2.1 ([3]). $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ は下半連続な真凸関数, $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ は下半連続な凸関数, $\varepsilon > 0$ とする. このとき, $\bar{x} \in X$ が X での $f + g$ の ε -最小点であるための必要十分条件は, 任意の $\alpha > 0$ に対して, 次の条件が成立することである.

$$\partial_\alpha g(\bar{x}) \subset \partial_{\alpha+\varepsilon} f(\bar{x})$$

特に, $\bar{x} \in X$ が X での $f + g$ の最小点であるための必要十分条件は, 任意の $\alpha > 0$ に対して, 次の条件が成立することである.

$$\partial_\alpha g(\bar{x}) \subset \partial_\alpha f(\bar{x})$$

凸不等式制約付き DC 計画問題における最適性条件と制約想定との関係を示すときに, この定理は重要な役割を果たす.

3 DC 計画問題

この章では, 次のような凸不等式制約付き DC 計画問題を考える.

$$\begin{array}{ll} \text{最小化} & f(x) + g(x) \\ \text{条件} & h_i(x) \leq 0, \quad i \in I \end{array}$$

ただし, $f: X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ は下半連続な真凸関数, $g: X \rightarrow \mathbb{R}$ は下半連続な凸関数である.

まず, FM 制約想定と凸不等式制約付き DC 計画問題における ε -最適性条件との関係を示す次の定理を紹介する.

定理 3.1 ([8]). $\{h_i \mid i \in I\}$ は X から $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ への下半連続な真凸関数族, $\bar{x} \in S$ とする. このとき, 次は同値である.

- (i) 関数族 $\{h_i \mid i \in I\}$ が FM 制約想定を満たす.
- (ii) $\text{dom } f \cap S \neq \emptyset$ であり, かつ $\text{epi } f^* + \text{epi } \delta_S^*$ が汎弱閉であるような任意の下半連続な真凸関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, 任意の下半連続な凸関数 $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ と任意の $\varepsilon > 0$ に対して, $\bar{x}$ が S での $f - g$ の ε -最小点であるための必要十分条件は, 任意の $\alpha > 0$ と任意の $v \in \partial_\alpha g(\bar{x})$ に対して, 次の 3 条件が成立するようなある $\beta, \gamma > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(I)}$, $\mu \in \mathbb{R}_+^I$ が存在することである.

$$\begin{cases} v \in \partial_\beta f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i \partial_{\mu_i} h_i(\bar{x}) \\ \beta + \gamma = \alpha + \varepsilon \\ \sum_{i \in I} \lambda_i (\mu_i - h_i(\bar{x})) = \gamma \end{cases}$$

ただし, $\mathbb{R}_+^I$ は非負実数の組 $\lambda = (\lambda_i)_{i \in I}$ の集合であり, $\mathbb{R}_+^{(I)}$ は $\lambda_i \neq 0$ となる $i \in I$ が有限個しかないような $\mathbb{R}_+^I$ の元 $\lambda = (\lambda_i)_{i \in I}$ の集合である.

この定理は FM 制約想定が凸不等式制約付き DC 計画問題における ε -最適性条件のための必要十分な制約想定であることを示している.

次に, FM 制約想定と凸不等式制約付き DC 計画問題における大域的な最適性条件との関係を示す次の定理を紹介する.

定理 3.2 ([9]). $\{h_i \mid i \in I\}$ は X から $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ への下半連続な真凸関数族, $S \neq \emptyset$ とする. さらに, 次の条件を仮定する.

$$\text{dom } \delta_S^* \subset \bigcup_{x \in S} N_S(x) \quad (1)$$

このとき, 次は同値である.

- (i) 関数族 $\{h_i \mid i \in I\}$ が FM 制約想定を満たす.
- (ii) $\text{dom } f \cap S \neq \emptyset$ であり, かつ $\text{epi } f^* + \text{epi } \delta_S^*$ が汎弱閉であるような任意の下半連続な真凸関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, 任意の下半連続な凸関数 $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ と任意の $\bar{x} \in S$ に対して, $\bar{x}$ が S での $f - g$ の最小点であるための必要十分条件は, 任意の $\alpha > 0$ と任意の $v \in \partial_\alpha g(\bar{x})$ に対して, 次の 3 条件が成立するようなある $\beta, \gamma > 0$, $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(I)}$, $\mu \in \mathbb{R}_+^I$ が存在することである.

$$\begin{cases} v \in \partial_\beta f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i \partial_{\mu_i} h_i(\bar{x}) \\ \beta + \gamma = \alpha \\ \sum_{i \in I} \lambda_i (\mu_i - h_i(\bar{x})) = \gamma \end{cases}$$

この定理は FM 制約想定が条件 (1) の下で凸不等式制約付き DC 計画問題における大域的な最適性条件のための必要十分な制約想定であることを示している。

最後に, BCQ と凸不等式制約付き DC 計画問題における大域的な最適性条件との関係を示す次の定理を紹介する。

定理 3.3 ([9]). $\{h_i \mid i \in I\}$ は X から $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ への下半連続な真凸関数族, $\bar{x} \in S$ とする. さらに, 次の条件を仮定する.

$$\text{dom } \delta_S^* \subset N_S(\bar{x}) \quad (2)$$

このとき, 次は同値である.

- (i) 関数族 $\{h_i \mid i \in I\}$ が $\bar{x}$ で BCQ を満たす.
- (ii) $\text{dom } f \cap S \neq \emptyset$ であり, かつ $\text{epi } f^* + \text{epi } \delta_S^*$ が汎弱閉であるような任意の下半連続な真凸関数 $f : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ と任意の下半連続な凸関数 $g : X \rightarrow \mathbb{R}$ に対して, $\bar{x}$ が S での $f - g$ の最小点であるための必要十分条件は, 任意の $\alpha \geq 0$ と任意の $v \in \partial_\alpha g(\bar{x})$ に対して, 次の 2 条件が成立するようなある $\lambda \in \mathbb{R}_+^{(I)}$ が存在することである.

$$\begin{cases} v \in \partial_\alpha f(\bar{x}) + \sum_{i \in I} \lambda_i \partial h_i(\bar{x}) \\ \lambda_i h_i(\bar{x}) = 0, \forall i \in I \end{cases}$$

この定理は BCQ が条件 (2) の下で凸不等式制約付き DC 計画問題における大域的な最適性条件のための必要十分な制約想定であることを示している。

注意 3.1. 定理 3.2 や定理 3.3 では, それぞれ条件 (1) や条件 (2) の下で結果を得ているのに対して, 定理 3.1 では, これらのような条件なしで結果を得ている。

参考文献

- [1] Boţ, R.I., Wanka, G.: An alternative formulation for a new closed cone constraint qualification. *Nonlinear Anal.* 64, 1367–1381 (2006)
- [2] Goberna, M.A., Jeyakumar, V., López, M.A.: Necessary and sufficient constraint qualifications for solvability of systems of infinite convex inequalities. *Nonlinear Anal.* 68, 1184–1194 (2008)
- [3] Hiriart-Urruty, J.-B.: From convex optimization to nonconvex optimization. Necessary and sufficient conditions for global optimality. In: Clarke, F.H., Dem'yanov, V.F., Giannessi, F. (eds.) *Nonsmooth Optimization and Related Topics*, pp. 219–239. Plenum, New York (1989)

- [4] Jeyakumar, V.: Constraint qualifications characterizing Lagrangian duality in convex optimization. *J. Optim. Theory Appl.* 136, 31–41 (2008)
- [5] Jeyakumar, V., Dinh, N., Lee, G.M.: A new closed cone constraint qualification for convex optimization. Research Report AMR 04/8, Department of Applied Mathematics, University of New South Wales, (2004)
- [6] Li, C., Ng, K.F., Pong, T.K.: Constraint qualifications for convex inequality systems with applications in constrained optimization. *SIAM J. Optim.* 19, 163–187 (2008)
- [7] Saeki, Y., Suzuki, S., Kuroiwa, D.: A necessary and sufficient constraint qualification for DC programming problems with convex inequality constraints. *Sci. Math. Jpn.* 74, 49–54 (2011)
- [8] Saeki, Y.: A necessary and sufficient constraint qualification for ε -optimality conditions in DC programming problems with convex inequality constraints, preprint.
- [9] Saeki, Y. and Kuroiwa, D.: A necessary and sufficient constraint qualification for global optimality for DC programming problems with convex inequality constraints, preprint.