

多変量 ARMA 過程の有限予測係数に対する閉形式表示

広島大学・大学院理学研究科 井上 昭彦 (Akihiko Inoue)
Graduate School of Science, Hiroshima University

1 イントロダクション

これは多変量 ARMA 過程の有限予測係数の閉形式表示に関する [1] の結果のアブストラクトである。証明と応用を含めた詳細については [1] を見よ。また、関連する文献として [2, 3, 4, 5] を見よ。

$\mathbb{C}^{m \times n}$ を $m \times n$ の複素行列の全体とする。 $\mathbb{C}^d$ は $\mathbb{C}^{d \times 1}$ を表す。 I_n を $n \times n$ の単位行列とする。 $a \in \mathbb{C}^{m \times n}$ に対し、 a^T は a の転置行列であり、 $\bar{a}$ と a^* はそれぞれ a の複素およびエルミート共役を表す。従って、 $a^* = \bar{a}^T$ 。

$\mathbb{T} := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ と $\overline{\mathbb{D}} := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$ はそれぞれ $\mathbb{C}$ の単位円と閉単位円板とする。 $d \in \mathbb{N}$ とする。ここでは、 $\{X_k : k \in \mathbb{Z}\}$ が d -変量 ARMA (autoregressive moving-average) 過程であるとは、 $\mathbb{C}^d$ -値、平均 0 の弱定常過程であって次の形のスペクトル密度 w を持つこととする：

$$w(e^{i\theta}) = h(e^{i\theta})h(e^{i\theta})^*, \quad \theta \in [-\pi, \pi). \quad (1.1)$$

ここで、 $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}^{d \times d}$ は次の条件を満たすとする：

$$\begin{aligned} h(z) \text{ の成分は } z \text{ の有理関数で、それらは } \overline{\mathbb{D}} \text{ に極を持たず、} \\ \text{また } \det h(z) \text{ は } \overline{\mathbb{D}} \text{ に零点を持たない。} \end{aligned} \quad (C)$$

(C) および次の条件を満たす $h_{\sharp} : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}^{d \times d}$ が存在することが知られている：

$$w(e^{i\theta}) = h(e^{i\theta})h(e^{i\theta})^* = h_{\sharp}(e^{i\theta})^*h_{\sharp}(e^{i\theta}), \quad \theta \in [-\pi, \pi). \quad (1.2)$$

さらに $h_{\sharp}$ はユニタリ因子を除いて一意である。

$\mathbb{D} := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ を $\mathbb{C}$ の開単位円板とする。 $h(z)^{-1}$ は次の形に書くことができる：

$$h(z)^{-1} = -\rho_0 - \sum_{\mu=1}^K \sum_{j=1}^{m_{\mu}} \frac{1}{(1 - \bar{p}_{\mu}z)^j} \rho_{\mu,j} - \sum_{j=1}^{m_0} z^j \rho_{0,j}. \quad (1.3)$$

ここで、

$$\begin{cases} K \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ p_{\mu} \in \mathbb{D} \setminus \{0\} \quad (\mu = 1, \dots, K), \quad p_{\mu} \neq p_{\nu} \quad (\mu \neq \nu), \\ m_{\mu} \in \mathbb{N} \quad (\mu = 1, \dots, K), \quad m_0 \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ \rho_{\mu,j} \in \mathbb{C}^{d \times d} \quad (\mu = 0, 1, \dots, K, j = 1, \dots, m_{\mu}), \quad \rho_0 \in \mathbb{C}^{d \times d}, \\ \rho_{\mu, m_{\mu}} \neq 0 \quad (\mu = 0, 1, \dots, K). \end{cases} \quad (1.4)$$

ただし $\sum_{k=1}^0 = 0$ とする。

2 2つの行列値外部関数の極の間の対応

前節の h と $h_{\sharp}$ の極の間の対応に関し、次の定理が成り立つ。

定理 2.1 ([1]). (1.3) と (1.4) における m_0, K and $(p_1, m_1), \dots, (p_K, m_K)$ に対して、 $h_{\sharp}^{-1}$ は次の形である：

$$h_{\sharp}(z)^{-1} = -\rho_0^{\sharp} - \sum_{\mu=1}^K \sum_{j=1}^{m_{\mu}} \frac{1}{(1 - \bar{p}_{\mu}z)^j} \rho_{\mu,j}^{\sharp} - \sum_{j=1}^{m_0} z^j \rho_{0,j}^{\sharp}. \quad (2.1)$$

ここで

$$\begin{cases} \rho_{\mu,j}^{\sharp} \in \mathbb{C}^{d \times d} & (\mu = 0, 1, \dots, K, j = 1, \dots, m_{\mu}), \quad \rho_0^{\sharp} \in \mathbb{C}^{d \times d}, \\ \rho_{\mu,m_{\mu}}^{\sharp} \neq 0 & (\mu = 0, 1, \dots, K). \end{cases} \quad (2.2)$$

さらに、次が成り立つ：

$$\rho_{\mu,m_{\mu}} h_{\sharp}(p_{\mu})^* = h(p_{\mu})^* \rho_{\mu,m_{\mu}}^{\sharp}, \quad \mu = 0, 1, \dots, K. \quad (2.3)$$

3 主定理に現れる行列の定義

この節では、(1.3) の K に対し $K \geq 1$ を仮定する． d -変量 ARMA 過程 $\{X_k\}$ の有限予測係数 $\phi_{n,j} \in \mathbb{C}^{d \times d}$ ($j = 1, \dots, n$) は次で定義される：

$$P_{[-n,-1]} X_0 = \phi_{n,1} X_{-1} + \dots + \phi_{n,n} X_{-n}. \quad (3.1)$$

ここで、 $n \in \mathbb{N}$ に対し $P_{[-n,-1]} X_0$ は有限の過去 $\{X_{-n}, \dots, X_{-1}\}$ に基づく X_0 の最良線形予測子である．次節において多変量 ARMA 過程の有限予測係数 $\phi_{n,j}$ に対する閉形式表示を述べるために、この節ではそこに現れるいくつかの行列を導入する．

$\{X_k\}$ の前進 MA および AR 係数 c_k と a_k をそれぞれ次で定義する：

$$h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k c_k, \quad -h(z)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k a_k, \quad z \in \mathbb{D}. \quad (3.2)$$

すると、

$$c_0 = h(0) = - \left\{ \rho_0 + \sum_{\mu=1}^K \sum_{j=1}^{m_{\mu}} \rho_{\mu,j} \right\}^{-1} \quad (3.3)$$

および次の命題が、容易に分かる．

命題 3.1. 次が成り立つ：

$$a_n = \sum_{\mu=1}^K \sum_{j=1}^{m_{\mu}} \binom{n+j-1}{j-1} \bar{p}_{\mu}^n \rho_{\mu,j}, \quad n \geq m_0 + 1, \quad (3.4)$$

さらに、もし $m_0 \geq 1$ ならば、次が成り立つ：

$$a_n = \rho_{0,n} + \sum_{\mu=1}^K \sum_{j=1}^{m_{\mu}} \binom{n+j-1}{j-1} \bar{p}_{\mu}^n \rho_{\mu,j}, \quad n = 1, \dots, m_0, \quad (3.5)$$

$\mu = 1, \dots, K$ と $i \in \mathbb{N}$ に対し, $p_{\mu,i} : \mathbb{N} \cup \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ を次で定義する :

$$p_{\mu,i}(k) := \binom{k}{i-1} p_{\mu}^{k-i+1}, \quad k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \quad (3.6)$$

次を注意せよ :

$$p_{\mu,i}(0) = \binom{0}{i-1} p_{\mu}^{-i+1} = \delta_{i,1}.$$

$\mu = 1, \dots, K$ と $i = 1, \dots, m_{\mu}$ および $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し, 次のようにおく :

$$\mathbf{p}_{\mu,i}(n) := p_{\mu,i}(n) I_d \in \mathbb{C}^{d \times d}. \quad (3.7)$$

ここで $p_{\mu,i}(n)$ は (3.6) の通りである. 次のようにおく :

$$M := \sum_{\mu=1}^K m_{\mu}. \quad (3.8)$$

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し, $\mathbf{p}_n \in \mathbb{C}^{dM \times d}$ を次のブロック表示で定義する :

$$\mathbf{p}_n := (\mathbf{p}_{1,1}(n), \dots, \mathbf{p}_{1,m_1}(n) | \mathbf{p}_{2,1}(n), \dots, \mathbf{p}_{2,m_2}(n) | \dots | \mathbf{p}_{K,1}(n), \dots, \mathbf{p}_{K,m_K}(n))^T. \quad (3.9)$$

次を注意せよ :

$$\mathbf{p}_0 = (I_d, 0, \dots, 0 | I_d, 0, \dots, 0 | \dots | I_d, 0, \dots, 0)^T \in \mathbb{C}^{dM \times d}. \quad (3.10)$$

$\mu, \nu \in \{1, 2, \dots, K\}$ に対し, $\Lambda^{\mu,\nu} \in \mathbb{C}^{dm_{\mu} \times dm_{\nu}}$ を次のブロック表示で定義する :

$$\Lambda^{\mu,\nu} := \begin{pmatrix} \lambda^{\mu,\nu}(1,1) & \lambda^{\mu,\nu}(1,2) & \dots & \lambda^{\mu,\nu}(1,m_{\nu}) \\ \lambda^{\mu,\nu}(2,1) & \lambda^{\mu,\nu}(2,2) & \dots & \lambda^{\mu,\nu}(2,m_{\nu}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda^{\mu,\nu}(m_{\mu},1) & \lambda^{\mu,\nu}(m_{\mu},2) & \dots & \lambda^{\mu,\nu}(m_{\mu},m_{\nu}) \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

ここで, $i = 1, \dots, m_{\mu}$ と $j = 1, \dots, m_{\nu}$ に対し,

$$\lambda^{\mu,\nu}(i,j) := \sum_{r=0}^{j-1} \binom{i-1}{r} \binom{i+j-r-2}{i-1} \frac{p_{\mu}^{j-r-1} \bar{p}_{\nu}^{i-r-1}}{(1 - p_{\mu} \bar{p}_{\nu})^{i+j-r-1}} I_d \in \mathbb{C}^{d \times d}. \quad (3.12)$$

$\Lambda \in \mathbb{C}^{dM \times dM}$ を次のブロック表示で定義する :

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \Lambda^{1,1} & \Lambda^{1,2} & \dots & \Lambda^{1,K} \\ \Lambda^{2,1} & \Lambda^{2,2} & \dots & \Lambda^{2,K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda^{K,1} & \Lambda^{K,2} & \dots & \Lambda^{K,K} \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

$n \in \mathbb{N}$ と $\mu, \nu \in \{1, 2, \dots, K\}$ に対し, $\Xi_n^{\mu,\nu} \in \mathbb{C}^{dm_{\mu} \times dm_{\nu}}$ を次のブロック表示で定義する :

$$\Xi_n^{\mu,\nu} := \begin{pmatrix} \xi_n^{\mu,\nu}(1,1) & \xi_n^{\mu,\nu}(1,2) & \dots & \xi_n^{\mu,\nu}(1,m_{\nu}) \\ \xi_n^{\mu,\nu}(2,1) & \xi_n^{\mu,\nu}(2,2) & \dots & \xi_n^{\mu,\nu}(2,m_{\nu}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n^{\mu,\nu}(m_{\mu},1) & \xi_n^{\mu,\nu}(m_{\mu},2) & \dots & \xi_n^{\mu,\nu}(m_{\mu},m_{\nu}) \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

ここで, $n \in \mathbb{N}$, $i = 1, \dots, m_\mu$ と $j = 1, \dots, m_\nu$ に対し, $\xi_n^{\mu,\nu}(i, j) \in \mathbb{C}^{d \times d}$ は次で定義する:

$$\xi_n^{\mu,\nu}(i, j) := \sum_{r=0}^{j-1} \binom{n+i+j-2}{r} \binom{i+j-r-2}{i-1} \frac{p_\mu^{j-r-1} \bar{p}_\nu^{n+i+j-r-2}}{(1-p_\mu \bar{p}_\nu)^{i+j-r-1}} I_d. \quad (3.15)$$

$n \in \mathbb{N}$ に対し, $\Xi_n \in \mathbb{C}^{dM \times dM}$ を次で定義する:

$$\Xi_n := \begin{pmatrix} \Xi_n^{1,1} & \Xi_n^{1,2} & \cdots & \Xi_n^{1,K} \\ \Xi_n^{2,1} & \Xi_n^{2,2} & \cdots & \Xi_n^{2,K} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Xi_n^{K,1} & \Xi_n^{K,2} & \cdots & \Xi_n^{K,K} \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

さらに, $\rho \in \mathbb{C}^{dM \times d}$ と $\tilde{\rho} \in \mathbb{C}^{dM \times d}$ を, それぞれブロック表示

$$\rho := (\rho_{1,1}^T, \dots, \rho_{1,m_1}^T \mid \rho_{2,1}^T, \dots, \rho_{2,m_2}^T \mid \cdots \mid \rho_{K,1}^T, \dots, \rho_{K,m_K}^T)^T \quad (3.17)$$

と

$$\begin{aligned} \tilde{\rho} &:= (\tilde{\rho}_{1,1}^T, \dots, \tilde{\rho}_{1,m_1}^T \mid \tilde{\rho}_{2,1}^T, \dots, \tilde{\rho}_{2,m_2}^T \mid \cdots \mid \tilde{\rho}_{K,1}^T, \dots, \tilde{\rho}_{K,m_K}^T)^T \\ &= \left(\overline{\rho_{1,1}^\sharp}, \dots, \overline{\rho_{1,m_1}^\sharp} \mid \overline{\rho_{2,1}^\sharp}, \dots, \overline{\rho_{2,m_2}^\sharp} \mid \cdots \mid \overline{\rho_{K,1}^\sharp}, \dots, \overline{\rho_{K,m_K}^\sharp} \right)^T \end{aligned} \quad (3.18)$$

により定義する.

次のようにおく:

$$v_n = \Xi_n \rho, \quad n \geq m_0 + 1, \quad (3.19)$$

$$\tilde{v}_n = \bar{\Xi}_n \tilde{\rho}, \quad n \geq m_0 + 1. \quad (3.20)$$

さらに, もし $m_0 \geq 1$ ならば, 次のようにおく:

$$v_n = \Xi_n \rho + \sum_{l=0}^{m_0-n} \mathbf{p}_l \rho_{0,n+l}, \quad n = 1, \dots, m_0, \quad (3.21)$$

$$\tilde{v}_n = \bar{\Xi}_n \tilde{\rho} + \sum_{l=0}^{m_0-n} \bar{\mathbf{p}}_l \tilde{\rho}_{0,n+l}, \quad n = 1, \dots, m_0. \quad (3.22)$$

次のようにおく:

$$h^\dagger(z) := h(1/\bar{z})^*. \quad (3.23)$$

そして, 次を定義する:

$$\begin{aligned} \theta_{\mu,j} &:= - \lim_{z \rightarrow p_\mu} \frac{1}{(m_\mu - j)!} \frac{d^{m_\mu-j}}{dz^{m_\mu-j}} \left\{ (z - p_\mu)^{m_\mu} h_\sharp(z) h^\dagger(z)^{-1} \right\} \in \mathbb{C}^{d \times d}, \\ \mu &= 0, 1, \dots, K, \quad j = 1, \dots, m_\mu. \end{aligned} \quad (3.24)$$

ここで,

$$p_0 := 0.$$

$\Theta \in \mathbb{C}^{dM \times dM}$ を次により定義する:

$$\Theta := \begin{pmatrix} \Theta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Theta_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Theta_K \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

ここで, (3.24) と (3.23) により定まる $\theta_{\mu,j}$ を用いて, $\mu = 1, \dots, K$ に対し, $\Theta_\mu \in \mathbb{C}^{dm_\mu \times dm_\mu}$ は次で定義される:

$$\Theta_\mu := \begin{pmatrix} \theta_{\mu,1} & \theta_{\mu,2} & \cdots & \theta_{\mu,m_\mu-1} & \theta_{\mu,m_\mu} \\ \theta_{\mu,2} & \theta_{\mu,3} & \cdots & \theta_{\mu,m_\mu} & \\ \vdots & \vdots & & & \\ \theta_{\mu,m_\mu-1} & \theta_{\mu,m_\mu} & & & \\ \theta_{\mu,m_\mu} & & & & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

$n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し $\Pi_n \in \mathbb{C}^{dM \times dM}$ を次で定義する:

$$\Pi_n := \begin{pmatrix} \Pi_{1,n} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \Pi_{2,n} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \Pi_{K,n} \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

ここで, (3.7) の $\mathbf{p}_{\mu,i}(n)$ を用いて, $\mu = 1, \dots, K$ と $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し, $\Pi_{\mu,n} \in \mathbb{C}^{dm_\mu \times dm_\mu}$ は次で定義される:

$$\Pi_{\mu,n} := \begin{pmatrix} \mathbf{p}_{\mu,1}(n) & \mathbf{p}_{\mu,2}(n) & \mathbf{p}_{\mu,3}(n) & \cdots & \mathbf{p}_{\mu,m_\mu}(n) \\ & \mathbf{p}_{\mu,1}(n) & \mathbf{p}_{\mu,2}(n) & \cdots & \mathbf{p}_{\mu,m_\mu-1}(n) \\ & & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & \ddots & \mathbf{p}_{\mu,2}(n) \\ 0 & & & & \mathbf{p}_{\mu,1}(n) \end{pmatrix}. \quad (3.28)$$

最後に, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し $G_n, \tilde{G}_n \in \mathbb{C}^{dM \times dM}$ を次で定義する:

$$G_n := \Pi_n \Theta \Lambda, \quad (3.29)$$

$$\tilde{G}_n := (\Pi_n \Theta)^* \Lambda^T. \quad (3.30)$$

4 有限予測係数に対する閉形式表示

前の節と同様, (1.3) の K に対し $K \geq 1$ を仮定する.

多変量 ARMA 過程の有限予測係数 $\phi_{n,j}$ に対する閉形式表示を述べる準備ができた.

定理 4.1 ([1]). $n \geq \max(m_0, 1)$ と $j = 1, \dots, n$ に対し, 次が成り立つ:

$$\phi_{n,j} = c_0 a_j + c_0 \mathbf{p}_0^T (I_{dM} - \tilde{G}_n G_n)^{-1} (\Pi_n \Theta)^* \{ \Lambda^T \Pi_n \Theta v_j + \tilde{v}_{n-j+1} \}. \quad (4.1)$$

系 4.2 ([1]). もし $m_0 = 0$ ならば, $n \geq 1$ と $j = 1, \dots, n$ に対し, 次が成り立つ:

$$\phi_{n,j} = c_0 a_j + c_0 \mathbf{p}_0^T (I_{dM} - \tilde{G}_n G_n)^{-1} (\Pi_n \Theta)^* \{ \Lambda^T \Pi_n \Theta \Xi_j \rho + \bar{\Xi}_{n-j+1} \tilde{\rho} \}. \quad (4.2)$$

系 4.3 ([1]). $m_\mu = 1$ ($\mu = 1, \dots, K$) と $m_0 = 0$ を仮定する. すると, $n \geq 1$ と $j = 1, \dots, n$ に対し, 次が成り立つ:

$$\phi_{n,j} = c_0 a_j + c_0 \mathbf{p}_0^T (I_{dM} - \tilde{G}_n G_n)^{-1} (\Pi_n \Theta)^* \{ \Lambda^T \Pi_n \Theta \Xi_j \rho + \bar{\Xi}_{n-j+1} \tilde{\rho} \}. \quad (4.3)$$

ここで, $a_j = \sum_{\mu=1}^K \bar{p}_\mu^j \rho_{\mu,1}$ for $j \geq 1$, $\mathbf{p}_0^T = (I_d, \dots, I_d) \in \mathbb{C}^{d \times dK}$,

$$\begin{aligned} \Theta &= \begin{pmatrix} p_1 h_\#(p_1) \rho_{1,1}^* & & & 0 \\ & p_2 h_\#(p_2) \rho_{2,1}^* & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p_K h_\#(p_K) \rho_{K,1}^* \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{dK \times dK}, \\ \Lambda &= \begin{pmatrix} \frac{1}{1-p_1 \bar{p}_1} I_d & \frac{1}{1-p_1 \bar{p}_2} I_d & \cdots & \frac{1}{1-p_1 \bar{p}_K} I_d \\ \frac{1}{1-p_2 \bar{p}_1} I_d & \frac{1}{1-p_2 \bar{p}_2} I_d & \cdots & \frac{1}{1-p_2 \bar{p}_K} I_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{1}{1-p_K \bar{p}_1} I_d & \frac{1}{1-p_K \bar{p}_2} I_d & \cdots & \frac{1}{1-p_K \bar{p}_K} I_d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{dK \times dK}, \\ \Pi_n &= \begin{pmatrix} p_1^n I_d & & & 0 \\ & p_2^n I_d & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p_K^n I_d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{dK \times dK}, \quad n \geq 0, \\ \Xi_n &= \begin{pmatrix} \frac{\bar{p}_1^n}{1-p_1 \bar{p}_1} I_d & \frac{\bar{p}_2^n}{1-p_1 \bar{p}_2} I_d & \cdots & \frac{\bar{p}_K^n}{1-p_1 \bar{p}_K} I_d \\ \frac{\bar{p}_1^n}{1-p_2 \bar{p}_1} I_d & \frac{\bar{p}_2^n}{1-p_2 \bar{p}_2} I_d & \cdots & \frac{\bar{p}_K^n}{1-p_2 \bar{p}_K} I_d \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\bar{p}_1^n}{1-p_K \bar{p}_1} I_d & \frac{\bar{p}_2^n}{1-p_K \bar{p}_2} I_d & \cdots & \frac{\bar{p}_K^n}{1-p_K \bar{p}_K} I_d \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{dK \times dK}, \quad n \geq 1, \\ \rho &= (\rho_{1,1}^T, \rho_{2,1}^T, \dots, \rho_{K,1}^T)^T \in \mathbb{C}^{dK \times d}, \\ \tilde{\rho} &= (\overline{\rho_{1,1}^\#}, \overline{\rho_{2,1}^\#}, \dots, \overline{\rho_{K,1}^\#})^T \in \mathbb{C}^{dK \times d} \end{aligned}$$

および $G_n = \Pi_n \Theta \Lambda$, $\tilde{G}_n = (\Pi_n \Theta)^* \Lambda^T \in \mathbb{C}^{dK \times dK}$ である.

参考文献

- [1] INOUE, A. (2018). Closed-form expression for finite predictor coefficients of vector ARMA processes, <https://arxiv.org/abs/1805.04820>
- [2] INOUE, A. and KASAHARA, Y. (2006). Explicit representation of finite predictor coefficients and its applications. *Ann. Statist.* **34** 973–993.
- [3] INOUE, A. and KASAHARA, Y. (2018). Simple matrix representations of the orthogonal polynomials for a rational spectral density on the unit circle. *J. Math. Anal. Appl.* **464** 1366–1374.
- [4] INOUE, A., KASAHARA, Y. and POURAHMADI, M. (2016). The intersection of past and future for multivariate stationary processes. *Proc. Amer. Math. Soc.* **144** 1779–1786.
- [5] INOUE, A., KASAHARA, Y. and POURAHMADI, M. (2018). Baxter’s inequality for finite predictor coefficients of multivariate long-memory stationary processes. *Bernoulli* **3** 1202–1232.