

On determinant-type operators for orthogonal Lie algebras

織田 寛 (拓殖大学工学部)

1 主要結果

so_n を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の n 次直交 Lie 環とする. 通常どおり so_n を n 次の歪対称行列全体として実現したとき, $F_{ij} = E_{ji} - E_{ij}$ ($i \neq j$, E_{ij} は n 次正方行列の行列単位) とし, $U(so_n)$ の要素と可換な不定元 x に対して $F_{ij}(x) = F_{ij} - x\delta_{ij} \in U(so_n) \otimes \mathbb{C}[x]$ とする. [4] で導入された $U(so_n) \otimes \mathbb{C}[x]$ に値をとる“行列式”:

$$D(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \text{sgn}(\sigma) F_{\sigma(1)1}(x) F_{\sigma(2)2}(x+1) \cdots F_{\sigma(n)n}(x+n-1)$$

は, $U(so_n)$ の中心 $Z(so_n)$ に属する. 次に, $k = 0, 1, \dots, n$ とする. 重複のない添字の列 $I = \{i_1, \dots, i_k\}, J = \{j_1, \dots, j_k\}$ に対して $U(so_n) \otimes \mathbb{C}[x]$ の要素:

$$D_{IJ}(x) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \text{sgn}(\sigma) F_{i_{\sigma(1)}j_1}(x) F_{i_{\sigma(2)}j_2}(x+1) \cdots F_{i_{\sigma(k)}j_k}(x+k-1)$$

(但し $D_{\emptyset\emptyset}(x) = 1$) は, 自然に $D(x)$ を小行列式化したものがあるが, 本稿ではこれら $D_{IJ}(x)$ (実際には $D_{IJ}(x)$ を少し変形させたもの) について考察する.

まず, $D(x)$ に対する [5] と同様の手法により次が得られる.

命題 1.1. 任意の $\sigma, \tau \in \mathfrak{S}_k$ に対して

$$D_{\sigma(I)\tau(J)}(x) = \text{sgn}(\sigma) \text{sgn}(\tau) D_{IJ}(x).$$

この性質は, $D_{IJ}(x)$ のある種の so_n - (相対) 不変性を導くが, それを見る前に Clifford 代数について準備をする. $Cl(n)$ を $e_1, e_2, \dots, e_n$ を生成元とする Clifford 代数, すなわち, $e_1, e_2, \dots, e_n$ を生成元とする $\mathbb{C}$ 上の自由代数を関係式:

$$e_i e_i = -1 \quad (i = 1, \dots, n), \quad e_i e_j = -e_j e_i \quad (i \neq j)$$

で割ったものとする. 重複のない添字の列 $I = \{i_1, \dots, i_k\}$ ($k = 0, \dots, n$) に対して $e_I = e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_k}$ と置き,

$$Cl^{(k)}(n) = \sum \{ \mathbb{C} e_I \mid \#I = k \}$$

と定める. $n \geq 2$ に対して, $F_{ij} \leftrightarrow \frac{e_i e_j}{2}$ により自然に $Cl^{(2)}(n) \cong so_n$ である. 以下では n を固定して $\mathfrak{g} = so_n = Cl^{(2)}(n)$ とする.

$$Cl^{(k)}(n) \ni e \mapsto te - et \in Cl^{(k)}(n), \quad t \in \mathfrak{g} = Cl^{(2)}(n)$$

により, $Cl(n)$ 及び各 $Cl^{(k)}(n)$ は $\mathfrak{g}$ -加群となり, $Cl(n) = \bigoplus_{k=0}^n Cl^{(k)}(n)$ は $\mathfrak{g}$ -加群の分解 (一般には既約分解にはならない) を与える. また, $Cl(n) \otimes Cl(n)$ にも自然に $\mathfrak{g}$ -加群としての構造が入るが, 各

$Cl^{(k,\ell)}(n) := Cl^{(k)}(n) \otimes Cl^{(\ell)}(n)$ がその部分加群であり, $\mathfrak{g}$ -加群の分解: $Cl(n) \otimes Cl(n) = \bigoplus_{k,\ell} Cl^{(k,\ell)}(n)$ が成立することは明らかである.

命題 1.1 から比較的容易に, 小行列式に対する次の $\mathfrak{g}$ -不変性が導かれる.

命題 1.2. 各 $k = 0, 1, \dots, n$ について,

$$Cl^{(k,k)}(n) \ni e_I \otimes e_J \mapsto D_{IJ}(x) \in U(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}[x]$$

により定義される $\mathbb{C}$ -線型写像は, $U(\mathfrak{g})$ を *adjoint* 作用, $\mathbb{C}[x]$ を自明な作用で $\mathfrak{g}$ -加群とみなしたとき, $\mathfrak{g}$ -準同型写像となる.

命題の写像による $e \in Cl^{(k,k)}(n)$ の像を $D(e; x)$ と表す. $D(e; x)$ を用いて, 考察対象となる我々の小行列式 $\mathfrak{D}(e; x)$ を定義する. $m = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ とする. $k = 0, 1, \dots, m$ のとき, 各 $e \in Cl^{(2k,2k)}(n)$ に対して,

$$\mathfrak{D}(e; x) = \frac{D(e; x - k) - D(e; -x - k)}{2}$$

とする. また, $k = 0, 1, \dots, \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ のとき, 各 $e \in Cl^{(2k+1,2k+1)}(n)$ に対して,

$$\mathfrak{D}(e; x) = \frac{D(e; x - k - \frac{1}{2}) - D(e; -x - k - \frac{1}{2})}{2x}$$

とする. 明らかに $Cl^{(k,k)}(n) \ni e \mapsto \mathfrak{D}(e; x) \in U(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}[x]$ は $\mathfrak{g}$ -写像である.

$\mathfrak{D}(e; x)$ に関する主要な結果を述べるために, $\mathfrak{g}$ について少し準備をする. $i = 1, \dots, m$ に対して $H_i = \sqrt{-1}F_{2i-1,2i} = \sqrt{-1} \frac{e_{2i-1}e_{2i}}{2}$ とする. $\{H_i\}$ は $\mathfrak{g}$ の Cartan 部分環 $\mathfrak{h} = \sum \mathbb{C}H_i$ の実部の基となっているが, この双対基を $\{\Lambda_i\}$ とする. $\mathfrak{h}$ と 2 つの巾零部分環:

$$\mathfrak{n}^\pm = \sum \{ \mathbb{C}(e_{2i-1} \pm \sqrt{-1}e_{2i})e_j \mid 2i < j \}$$

は, 三角分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ を与える. この分解により, 射影

$$\gamma : U(\mathfrak{g}) = (\mathfrak{n}^- U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{g}) \mathfrak{n}^+) \oplus U(\mathfrak{h}) \rightarrow U(\mathfrak{h}) = S(\mathfrak{h})$$

を定める (Harish-Chandra 準同型). また, $\Lambda \in \mathfrak{h}^*$ に対して,

$$\chi_\Lambda(D) = \gamma(D)(\Lambda) \in \mathbb{C} \quad (D \in U(\mathfrak{g}))$$

とする.

$e_I \otimes e_I \in Cl^{(k,k)}(n)$ に対応する小行列式 $D(e_I \otimes e_I; x) = D_{II}(x)$ または $\mathfrak{D}(e_I \otimes e_I; x)$ は, “主小行列式” と考えられる. そこで, Clifford 代数の方で “主小行列式” に対応する空間 $Cl^{(k,k)}(n)_{\text{pr}} \subset Cl^{(k,k)}(n)$ を $e_I \otimes e_I \in Cl^{(k,k)}(n)$ で生成される $\mathfrak{g}$ -部分加群として定義する. 実は, $k \neq 0, n$ でない限り $Cl^{(k,k)}(n)_{\text{pr}} \subsetneq Cl^{(k,k)}(n)$ である.

$\Theta = (m_1, m_2, m_3)$ を $m_2 \geq 1$ であるような自然数 m の分割とする. つまり, m_1, m_2, m_3 はいずれも 0 以上の整数で,

$$m_1 + m_2 + m_3 = m, \quad m_2 \geq 1$$

であるとする. このとき, $(m_1 + 1 + m_3)$ 個の複素数の組:

$$\lambda_\Theta = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{m_1}, \lambda, \lambda_{m_1+m_2+1}, \lambda_{m_1+m_2+2}, \dots, \lambda_{m_1+m_2+m_3}) \in \mathbb{C}^{m_1+1+m_3} \quad (1.1)$$

は $\mathfrak{h}^*$ の要素 :

$$\begin{aligned}\Lambda_{\Theta} &= \lambda_1 \Lambda_1 + \cdots + \lambda_{m_1} \Lambda_{m_1} \\ &\quad + \lambda (\Lambda_{m_1+1} + \cdots + \Lambda_{m_1+m_2}) \\ &\quad + \lambda_{m_1+m_2+1} \Lambda_{m_1+m_2+1} + \cdots + \lambda_m \Lambda_m\end{aligned}$$

を定める. Λ_{Θ} は $(\mathfrak{n}^+, \mathfrak{h})$ の $m_2 - 1$ 個の simple root :

$$\Lambda_{m_1+1} - \Lambda_{m_1+2}, \Lambda_{m_1+2} - \Lambda_{m_1+3}, \dots, \Lambda_{m_1+m_2-1} - \Lambda_{m_1+m_2} \quad (1.2)$$

に対応する co-root に関して退化している.

次の 2 つの定理が本稿の主要結果である.

定理 1.3. 上のように定めたすべての Λ_{Θ} について,

$$\chi_{\Lambda_{\Theta}} \left(\mathfrak{D} \left(e; \lambda + \frac{k}{2} - m_1 - 1 - i \right) \right) = 0 \quad \text{for} \quad \begin{cases} k \in \{n - m_2 + 1, \dots, n\}, \\ i \in \{0, \dots, k - (n - m_2 + 1)\}, \\ e \in Cl^{(k,k)}(n)_{\text{pr}} \end{cases}$$

定理 1.4. α を (1.2) の simple root の任意の 1 つとする. このとき, $\lambda_{\Theta} \in \mathbb{C}^{m_1+1+m_2}$ のうち, 対応する $\Lambda_{\Theta} \in \mathfrak{h}^*$ について, ある $e \in Cl^{(n-m_2+1)}(n)_{\text{pr}}$ に対して

$$\chi_{\Lambda_{\Theta}-\alpha} \left(\mathfrak{D} \left(e; \lambda + \frac{n-m_2+1}{2} - m_1 - 1 \right) \right) \neq 0$$

となるもの全体 G_{α} は, $\mathbb{C}^{m_1+1+m_2}$ の Zariski 開集合であるが,

$$G_{\alpha} \neq \emptyset.$$

[8] で考察した一般論を適用すると, これらの定理は, 退化主系列表現及びスカラー型の一般 Verma 加群に関係するいくつかの $U(\mathfrak{g})$ のイデアルについての以下の結果を導く. $\mathcal{F}_{\Theta}$ を (1.2) の simple root 全体とする. $\mathfrak{g}$ に 2 つの放物型部分環 :

$$\begin{aligned}\mathfrak{b} &= \mathfrak{n}^+ + \mathfrak{h}, \\ \mathfrak{p}_{\Theta} &= \mathfrak{b} + \sum \{ \mathfrak{g}_{\alpha} \text{ (root } \alpha \text{ に対する root space)} \mid \alpha \in \mathbb{Z}\mathcal{F}_{\Theta} \}\end{aligned}$$

を定める. $\Lambda_{\Theta} : \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{C}$ は $\mathfrak{p}_{\Theta} \ni D \mapsto \chi_{\Lambda_{\Theta}}(D) \in \mathbb{C}$ により $\mathfrak{b}$ または $\mathfrak{p}_{\Theta}$ の character として延長できる. そこで,

$$\begin{aligned}J(\Lambda_{\Theta}) &= \sum_{D \in \mathfrak{b}} U(\mathfrak{g})(D - \chi_{\Lambda_{\Theta}}(D)) && (U(\mathfrak{g}) \text{ の左イデアル}) \\ J_{\Theta}(\Lambda_{\Theta}) &= \sum_{D \in \mathfrak{p}_{\Theta}} U(\mathfrak{g})(D - \chi_{\Lambda_{\Theta}}(D)) && (U(\mathfrak{g}) \text{ の左イデアル}) \\ M(\Lambda_{\Theta}) &= U(\mathfrak{g})/J(\Lambda_{\Theta}) && (U(\mathfrak{g}) \text{ の Verma 加群}) \\ M_{\Theta}(\Lambda_{\Theta}) &= U(\mathfrak{g})/J_{\Theta}(\Lambda_{\Theta}) && (U(\mathfrak{g}) \text{ の一般 Verma 加群})\end{aligned}$$

とする. また, $U(\mathfrak{g})$ の有限次 $\text{ad}(\mathfrak{g})$ -部分加群 $V_{\Lambda_{\Theta}}$ を

$$\mathfrak{D} \left(e; \lambda + \frac{k}{2} - 1 - i \right) \quad \text{for} \quad \begin{cases} k \in \{n - m_2 + 1, \dots, n\}, \\ i \in \{0, \dots, k - (n - m_2 + 1)\}, \\ e \in Cl^{(k,k)}(n)_{\text{pr}} \end{cases}$$

で $\mathbb{C}$ 上張られるものとする. このとき,

系 1.5. すべての Λ_Θ について

$$V_{\Lambda_\Theta} \subset \text{Ann } M_\Theta(\Lambda_\Theta).$$

また, $\lambda_\Theta \in \bigcap_{\alpha \in \mathcal{F}_\Theta} G_\alpha$ に対応する (従って *generic* な) Λ_Θ に対して

$$J_\Theta(\Lambda_\Theta) = U(\mathfrak{g})V_{\Lambda_\Theta} + J(\Lambda_\Theta).$$

更に, *generic* な Λ_Θ に対して

$$\text{Ann } M_\Theta(\Lambda_\Theta) = U(\mathfrak{g})V_{\Lambda_\Theta} + \text{Ann } M_\Theta(\Lambda_\Theta).$$

この結果と [8] の “非可換 Pfaffian” を用いた結果を合わせることで, $\mathfrak{so}_n$ のすべてのスカラー型の一般 Verma 加群について, parameter が *generic* であるときの annihilator の生成元を明示的に与えることができる.

2 証明の概略

前節の Θ , λ_Θ , Λ_Θ を固定する. 定理 1.3 も定理 1.4 も, $\mathfrak{D}(e; x)$ の Harish-Chandra 準同型 γ による像を計算することにより示される. そこで, γ を計算するための漸化式について考察する. $\overline{Cl}(n-2)$ で $e_3, e_4, \dots, e_n$ で生成される $Cl(n)$ の部分代数を表す. これは本質的には $Cl(n-2)$ と同じものなので, 記号 $\overline{Cl}^{(k)}(n-2)$, $\overline{Cl}^{(k,l)}(n-2)$ 等を自由に用いる. $\bar{\mathfrak{g}} := \overline{Cl}^{(2)}(n-2)$ は $\mathfrak{g}$ の部分環で $\mathfrak{so}_{n-2}$ と同型である. $\mathfrak{g}$ に 2 つの巾零部分環:

$$\mathfrak{n}_1^\pm = \sum \{ \mathbb{C}(e_1 \pm \sqrt{-1}e_2)e_i \mid 2 < i \}$$

を定義すると, 分解 $\mathfrak{g} = \mathfrak{n}_1^- \oplus (\mathbb{C}H_1 \oplus \bar{\mathfrak{g}}) \oplus \mathfrak{n}_1^+$ が得られるが, これを用いて $\mathbb{C}H_1 \oplus \bar{\mathfrak{g}}$ -加群の準同型 $\gamma_1^{\lambda_1}$ が, 射影:

$$\gamma_1^{\lambda_1} : U(\mathfrak{g}) = (\mathfrak{n}_1^- U(\mathfrak{g}) + U(\mathfrak{g})(H_1 - \lambda_1) + U(\mathfrak{g})\mathfrak{n}_1^+) \oplus U(\bar{\mathfrak{g}}) \rightarrow U(\bar{\mathfrak{g}})$$

により定義される. このとき, 任意の $D \in U(\mathfrak{g})$ に対して

$$\chi_{\Lambda_\Theta}(D) = \chi_{\Lambda_\Theta} \circ \gamma_1^{\lambda_1}(D)$$

が成り立ち, $\gamma_1^{\lambda_1}(D) \in U(\mathfrak{so}_{n-2})$ であるので, $\mathfrak{so}_{n-2}, \mathfrak{so}_{n-4}, \dots$ について $\gamma_1^{\lambda_1}(D)$ を漸次計算することにより, $\gamma(D)$ が得られる.

ところが厄介なことに, $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n$ の “主小行列式” $\mathfrak{D}(e; x)$ の $\gamma_1^{\lambda_1}$ による像を, 再び $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}_{n-2}$ の “主小行列式” を用いて簡単に表すことはできない. そこで我々は, 考察対象の “主小行列式” を大幅に一般化するのであるが, その前に “非可換 Pfaffian” について準備をする.

定義 2.1. $k = 0, \dots, m$, $I = \{i_1, i_2, \dots, i_{2k}\}$ に対して

$$\text{Pf}(e_I) = \frac{1}{2^k k!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{2k}} \text{sgn}(\sigma) F_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)}} F_{i_{\sigma(3)} i_{\sigma(4)}} \cdots F_{i_{\sigma(2k-1)} i_{\sigma(2k)}}$$

により, $\mathbb{C}$ -線型写像 $\text{Pf}(\cdot) : Cl^{(2k)}(n) \rightarrow U(\mathfrak{g})$ を定める. ここで, $\text{Pf}(1) = 1$ とする.

この写像 Pf は $Cl(n)_0 := \bigoplus_{k=0}^m Cl^{(2k)}(n)$ から $U(\mathfrak{g})$ への $\mathfrak{g}$ -準同型写像となる ([8]). 本稿で主として用いるのは, Pf の “2 乗”

$$\text{Pf}^{\otimes 2} : Cl(n)_0 \otimes Cl(n)_0 \ni e_I \otimes e_J \mapsto \text{Pf}(e_I) \text{Pf}(e_J) \in U(\mathfrak{g})$$

であるが, こちらも明らかに $\mathfrak{g}$ -準同型写像である. “主小行列式” を一般化する手掛かりとなるのは, 本質的には [5] で示されたものと同等な, 次の Pfaffian による行列式の展開公式である:

命題 2.2. I を重複を持たない $2k$ 個 ($k = 0, \dots, m$) の添字の列とすると,

$$\mathfrak{D}(e_I \otimes e_I; x) = \sum_{\nu=0}^k \left(\sum_{\substack{J \subset I \\ \#J=2k-2\nu}} \text{Pf}^{\otimes 2}(e_J \otimes e_J) \right) (x - \nu + 1) \cdots (x - 1)x \cdot x(x + 1) \cdots (x + \nu - 1)$$

I を重複を持たない $2k + 1$ 個 ($k = 0, \dots, [\frac{n-1}{2}]$) の添字の列とすると,

$$\mathfrak{D}(e_I \otimes e_I; x) = \sum_{\nu=0}^k \left(\sum_{\substack{J \subset I \\ \#J=2k-2\nu}} \text{Pf}^{\otimes 2}(e_J \otimes e_J) \right) (x - \nu + \frac{1}{2}) \cdots (x - \frac{1}{2}) \cdot (x + \frac{1}{2}) \cdots (x + \nu - \frac{1}{2})$$

これらの式の右辺を $\mathfrak{g}$ -加群 $Cl(n) \otimes Cl(n) = \bigoplus Cl^{(k,\ell)}(n)$ の言葉で書き直す. まず $k, \ell \in \{0, 1, \dots, n\}$ でないとき, $Cl^{(k,\ell)}(n) = 0$ とおく. $\theta = \sum_{\nu=1}^n e_\nu \otimes e_\nu \in Cl^{(1,1)}(n)$ とすると, $\mathfrak{g}$ は θ に自明に作用するので,

$$\theta \cdot * : Cl^{(k,\ell)}(n) \ni e \mapsto \theta \cdot e \in \bigoplus_{\substack{\epsilon_1=\pm 1 \\ \epsilon_2=\pm 1}} Cl^{(k+\epsilon_1, \ell+\epsilon_2)}(n)$$

は $\mathfrak{g}$ -準同型となる. この $\theta \cdot *$ と $\bigoplus_{\substack{\epsilon_1=\pm 1 \\ \epsilon_2=\pm 1}} Cl^{(k+\epsilon_1, \ell+\epsilon_2)}(n)$ から $Cl^{(k+1, \ell+1)}(n)$, $Cl^{(k-1, \ell+1)}(n)$, $Cl^{(k-1, \ell-1)}(n)$, $Cl^{(k+1, \ell-1)}(n)$ への射影をそれぞれ合成することにより, 4 つの $\mathfrak{g}$ -準同型:

$$\begin{aligned} s_{\text{up}} : Cl^{(k,\ell)}(n) &\longrightarrow Cl^{(k+1, \ell+1)}(n), \\ s_{\text{right}} : Cl^{(k,\ell)}(n) &\longrightarrow Cl^{(k-1, \ell+1)}(n), \\ s_{\text{down}} : Cl^{(k,\ell)}(n) &\longrightarrow Cl^{(k-1, \ell-1)}(n), \\ s_{\text{left}} : Cl^{(k,\ell)}(n) &\longrightarrow Cl^{(k+1, \ell-1)}(n) \end{aligned}$$

を得る. これらの $\mathfrak{g}$ -準同型は $Cl(n) \otimes Cl(n)$ の自己準同型とみなすことができるが,

$$\begin{aligned} s_{\text{up}} \circ s_{\text{right}} &= s_{\text{right}} \circ s_{\text{up}} \\ s_{\text{up}} \circ s_{\text{left}} &= s_{\text{left}} \circ s_{\text{up}} \\ s_{\text{down}} \circ s_{\text{right}} &= s_{\text{right}} \circ s_{\text{down}} \\ s_{\text{down}} \circ s_{\text{left}} &= s_{\text{left}} \circ s_{\text{down}} \end{aligned}$$

という交換関係を持っている. また, 各 $Cl^{(k,\ell)}(n)$ 上で,

$$\begin{aligned} s_{\text{down}} \circ s_{\text{up}} - s_{\text{up}} \circ s_{\text{down}} &= (n - k - \ell) \text{id}_{Cl^{(k,\ell)}(n)} \\ s_{\text{left}} \circ s_{\text{right}} - s_{\text{right}} \circ s_{\text{left}} &= (k - \ell) \text{id}_{Cl^{(k,\ell)}(n)} \end{aligned}$$

という交換関係を持っている. 重複を持たない k 個の添字の列 I に対して,

$$s_{\text{down}}^\nu(e_I \otimes e_I) = \nu! \sum_{\substack{J \subset I \\ \#J=k-\nu}} e_J \otimes e_J$$

が成り立つこと, s_{down} , $\text{Pf}^{\otimes 2}$, $\mathfrak{D}(\cdot; x)$ がすべて $\mathfrak{g}$ -準同型であることから, 命題 2.2 は, 次の形に書き

命題 2.3. 各 $e \in Cl^{(2k, 2k)}(n)_{\text{pr}}$ ($k = 0, \dots, m$) に対して

$$\mathfrak{D}(e; x) = \sum_{\nu=0}^k \frac{\text{Pf}^{\otimes 2}(s_{\text{down}}^{2\nu}(e))}{(2\nu)!} (x - \nu + 1) \cdots (x - 1)x \cdot x(x + 1) \cdots (x + \nu - 1)$$

各 $e \in Cl^{(2k+1, 2k+1)}(n)_{\text{pr}}$ ($k = 0, \dots, [\frac{n-1}{2}]$) に対して

$$\mathfrak{D}(e; x) = \sum_{\nu=0}^k \frac{\text{Pf}^{\otimes 2}(s_{\text{down}}^{2\nu+1}(e))}{(2\nu+1)!} (x - \nu + 1)(x - \nu + \frac{1}{2}) \cdots (x - \frac{1}{2}) \cdot (x + \frac{1}{2}) \cdots (x + \nu - \frac{1}{2})$$

一方, $s_{\text{up}}, s_{\text{right}}, s_{\text{down}}, s_{\text{left}}$ とこれらの交換関係を用いて各 $Cl^{(k, k)}(n)$ の $\mathfrak{g}$ -加群としての構造を調べると,

$$\begin{aligned} Cl^{(k, k)}(n)_{\text{pr}} &= \text{Ker} \left(s_{\text{left}} : Cl^{(k, k)}(n) \rightarrow Cl^{(k+1, k-1)}(n) \right) \\ &= \text{Ker} \left(s_{\text{right}} : Cl^{(k, k)}(n) \rightarrow Cl^{(k-1, k+1)}(n) \right) \end{aligned}$$

が示される. そこで一般の $Cl^{(k, \ell)}(n)$ に対しても, “主小行列式” に対応する部分空間 $Cl^{(k, \ell)}(n)_{\text{pr}}$ を

$$Cl^{(k, \ell)}(n)_{\text{pr}} = \text{Ker} \left(s_{\text{left}} : Cl^{(k, \ell)}(n) \rightarrow Cl^{(k+1, \ell-1)}(n) \right)$$

と定義する. 交換関係から容易に示されるのであるが, $k < \ell$ のとき $Cl^{(k, \ell)}(n)_{\text{pr}} = 0$ である. 我々が用いる “主小行列式” の一般化は次である.

定義 2.4. $a \in \mathbb{C}, \nu \in \mathbb{N}$ に対し, x を変数とする 2ν 次の多項式:

$$\Phi(a, \nu; x) = \prod_{\mu=0}^{\nu-1} (x^2 - (a + \mu)^2)$$

を定義する. $0 \leq \ell \leq k \leq n$ で $k + \ell$ が偶であるような自然数の組 (k, ℓ) に対して,

$$\epsilon = \begin{cases} 0 & k \text{ が偶のとき} \\ 1 & k \text{ が奇のとき} \end{cases} \quad (2.1)$$

とする. このとき, $\mathfrak{g}$ -準同型 $\mathfrak{D}(\cdot; x) : Cl^{(k, \ell)}(n)_{\text{pr}} \rightarrow U(\mathfrak{g}) \otimes \mathbb{C}[x]$ を

$$\mathfrak{D}(e; x) = \sum_{\nu=0}^{\frac{\ell-k}{2}} \frac{\text{Pf}^{\otimes 2}(s_{\text{down}}^{2\nu+\epsilon}(e))}{(2\nu+\epsilon)!} \Phi\left(\frac{\ell-k+2\epsilon}{4}, \nu; x\right), \quad e \in Cl^{(k, \ell)}(n)_{\text{pr}}$$

で定める.

命題 2.3 により, この定義が “主小行列式” の一般化になっていることが容易に分かる. ここまで $\mathfrak{g} = \mathfrak{so}_n$ の “主小行列式” $\mathfrak{D}(e; x)$ を一般化しておく, それらの $\gamma_1^{\lambda_1}$ による像を, 再び $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{so}_{n-2}$ の一般化された “主小行列式” を用いて表すことができる. 我々は定理 1.3 を示す代わりに, 一般化された “主小行列式” に対する次の定理を証明する.

定理 2.5. すべての Λ_{Θ} について,

$$\chi_{\Lambda_{\Theta}} \left(\mathfrak{D} \left(e; \lambda + \frac{j}{2} - m_1 - 1 - i \right) \right) = 0 \quad \text{for} \quad \begin{cases} j \in \{n - m_2 + 1, \dots, n\}, \\ i \in \{0, \dots, j - (n - m_2 + 1)\}, \\ k \geq \ell, \quad \frac{k+\ell}{2} = j, \\ e \in Cl^{(k, \ell)}(n)_{\text{pr}} \end{cases}$$

$0 \leq \ell \leq k \leq n$ で $k + \ell$ が偶であるような自然数の組 (k, ℓ) を固定し、それに応じて ϵ を (2.1) で定める。以下では、 $e \in Cl^{(k, \ell)}(n)_{\text{pr}}$ に対して $\gamma_1^{\lambda_1}(\mathfrak{D}(e; x))$ を計算する。まず、 $Cl^{(k, \ell)}(n)_{\text{pr}}^{H_1} = \{e \in Cl^{(k, \ell)}(n)_{\text{pr}} \mid [H_1, e] = 0\}$ と置くと、 $\gamma_1^{\lambda_1}$ が $\mathbb{C}H_1 \oplus \bar{\mathfrak{g}}$ -加群の準同型であることから、

$$\gamma_1^{\lambda_1}(\mathfrak{D}(Cl^{(k, \ell)}(n)_{\text{pr}}; x)) = \gamma_1^{\lambda_1}(\mathfrak{D}(Cl^{(k, \ell)}(n)_{\text{pr}}^{H_1}; x))$$

が得られる。ここで、

補題 2.6. $Cl^{(k, \ell)}(n)_{\text{pr}}^{H_1}$ は、以下の 6 タイプの要素で $\mathbb{C}$ 上生成される：

$$\text{(type I)} \quad e_1 e_2 \otimes e_1 e_2 \cdot A, \quad A \in \overline{Cl}^{(k-2, \ell-2)}(n-2)_{\text{pr}}$$

$$\text{(type II)} \quad (e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2) \cdot B, \quad B \in \overline{Cl}^{(k-1, \ell-1)}(n-2)_{\text{pr}}$$

$$\text{(type III)} \quad C, \quad C \in \overline{Cl}^{(k, \ell)}(n-2)_{\text{pr}}$$

$$\begin{aligned} \text{(type IV)} \quad & (k - \ell + 2)(k - \ell + 1) \cdot 1 \otimes e_1 e_2 \cdot D + (k - \ell + 1) \cdot (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) \cdot s_{\text{right}}(D) \\ & - e_1 e_2 \otimes 1 \cdot s_{\text{right}}^2(D), \quad D \in \overline{Cl}^{(k, \ell-2)}(n-2)_{\text{pr}} \end{aligned}$$

$$\text{(type V)} \quad (k - \ell) \cdot (e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) \cdot E - 2e_1 e_2 \otimes 1 \cdot s_{\text{right}}(E), \quad E \in \overline{Cl}^{(k-1, \ell-1)}(n-2)_{\text{pr}}$$

$$\text{(type VI)} \quad e_1 e_2 \otimes 1 \cdot F, \quad F \in \overline{Cl}^{(k-2, \ell)}(n-2)_{\text{pr}}$$

が成り立つのであるが、これら 6 つのタイプ毎に $\gamma_1^{\lambda_1}(\mathfrak{D}(\cdot; x))$ を計算する。詳細は省略するが、

補題 2.7. (a) $\gamma_1^{\lambda_0}$ の $U(\mathfrak{g})^{H_1}$ への制限は環準同型

(b) $e \in Cl^{(2k'+1, 2\ell'+1)}(n)$ に対して

$$\text{Pf}^{\otimes 2}(s_{\text{left}}(e)) + \text{Pf}^{\otimes 2}(s_{\text{right}}(e)) = (k' - \ell') \text{Pf}^{\otimes 2}(s_{\text{down}}(e))$$

(c) $0 \leq k' \leq m-1$, $A \in \overline{Cl}^{(2k')}(n-2)$ に対して

$$\gamma_1^{\lambda_1}(\text{Pf}(e_1 e_2 \cdot A)) = \frac{\lambda_1 + k'}{\sqrt{-1}} \text{Pf}(A)$$

(d) $0 \leq k', \ell' \leq m-1$, $A \in \overline{Cl}^{(2k', 2\ell')}(n-2)$ に対して

$$\gamma_1^{\lambda_1}(\text{Pf}^{\otimes 2}(e_1 e_2 \otimes e_1 e_2 \cdot A)) = -(\lambda_1 + k')(\lambda_1 + \ell') \text{Pf}^{\otimes 2}(A)$$

(e) $1 \leq k', \ell' \leq m$, $A \in \overline{Cl}^{(2k'-1, 2\ell'-1)}(n-2)$ に対して

$$\begin{aligned} & \gamma_1^{\lambda_1}(\text{Pf}^{\otimes 2}((e_1 \otimes e_1 + e_2 \otimes e_2) \cdot A)) \\ &= -\sqrt{-1} \gamma_1^{\lambda_1}(\text{Pf}^{\otimes 2}((e_1 \otimes e_2 - e_2 \otimes e_1) \cdot A)) \\ &= \text{Pf}^{\otimes 2}(s_{\text{left}}(A)) - (\lambda_1 + k' - 1) \text{Pf}^{\otimes 2}(s_{\text{down}}(A)) \end{aligned}$$

等を用いると、次の結果が得られる。

命題 2.8. $e \in Cl^{(k, \ell)}(n)_{\text{pr}}^{H_1}$ は補題 2.6 の 6 タイプのいずれかであるとする。このとき、 $\gamma_1^{\lambda_1}(\mathfrak{D}(e; x))$ について以下の漸化式が成立する：

$$\text{(type I)} \quad \gamma_1^{\lambda_1}(\mathfrak{D}(e; x)) = \left\{ x^2 - \left(\lambda_1 + \frac{k + \ell}{4} - 1 \right)^2 \right\} \mathfrak{D}(A; x).$$

(type II) $\epsilon = 0$ のとき

$$\begin{aligned}\gamma_1^{\lambda_1}(\mathfrak{D}(e; x)) &= \left(x - \frac{\ell - k}{4}\right) \left(2x + \frac{\ell - k}{2} - 1\right) \mathfrak{D}\left(B; x - \frac{1}{2}\right) \\ &\quad + \left\{x - \left(\lambda_1 + \frac{k + \ell}{4} - 1\right)\right\} \mathfrak{D}(s_{\text{down}}(B); x).\end{aligned}$$

$\epsilon = 1$ のとき

$$\begin{aligned}\gamma_1^{\lambda_1}(\mathfrak{D}(e; x)) &= 2\mathfrak{D}\left(B; x - \frac{1}{2}\right) \\ &\quad + \left\{x - \left(\lambda_1 + \frac{k + \ell}{4} - 1\right)\right\} \mathfrak{D}(s_{\text{down}}(B); x).\end{aligned}$$

(type III) $\gamma_1^{\lambda_1}(\mathfrak{D}(e; x)) = C$.

(type IV) $\epsilon = 0$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{4\sqrt{-1}}{(k - \ell + 2)^2} \gamma_1^{\lambda_1}(\mathfrak{D}(e; x)) &= 2(2\lambda_1 + \ell - 3) \mathfrak{D}\left(D; x - \frac{1}{2}\right) \\ &\quad - \left\{x - \left(\lambda_1 + \frac{k + \ell}{4} - 1\right)\right\} \left(2x + \frac{k - \ell}{2} + 1\right) \mathfrak{D}(s_{\text{down}}(D); x).\end{aligned}$$

$\epsilon = 1$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{2\sqrt{-1}}{(k - \ell + 2)^2} \left(x + \frac{k - \ell + 2}{4}\right) \gamma_1^{\lambda_1}(\mathfrak{D}(e; x)) &= \left(\lambda_1 + \frac{\ell - 1}{2} - 1\right) \left(2x + \frac{\ell - k}{2} - 2\right) \mathfrak{D}\left(D; x - \frac{1}{2}\right) \\ &\quad - \left\{x - \left(\lambda_1 + \frac{k + \ell}{4} - 1\right)\right\} \mathfrak{D}(s_{\text{down}}(D); x).\end{aligned}$$

(type V) $\gamma_1^{\lambda_1}(\mathfrak{D}(e; x)) = 0$.

(type VI) $\epsilon = 0$ のとき

$$\begin{aligned}\sqrt{-1} \gamma_1^{\lambda_1}(\mathfrak{D}(e; x)) &= \left(\lambda_1 + \frac{k}{2} - 1\right) \mathfrak{D}\left(F; x - \frac{1}{2}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{x - \left(\lambda_1 + \frac{k + \ell}{4} - 1\right)\right\} \left(x + \frac{\ell - k}{4}\right) \mathfrak{D}(s_{\text{down}}(F); x).\end{aligned}$$

$\epsilon = 1$ のとき

$$\begin{aligned}\sqrt{-1} \left(2x + \frac{\ell - k}{2}\right) \gamma_1^{\lambda_1}(\mathfrak{D}(e; x)) &= (2\lambda_1 + k - 2) \left(x - \frac{\ell - k + 2}{4}\right) \mathfrak{D}\left(F; x - \frac{1}{2}\right) \\ &\quad - \left\{x - \left(\lambda_1 + \frac{k + \ell}{4} - 1\right)\right\} \mathfrak{D}(s_{\text{down}}(F); x).\end{aligned}$$

これらの漸化式から定理 2.5 を導くのは容易である.

定理 1.4 の方も, 命題 2.8 から得られる.

証明. $i = 1, 2, \dots, m_2 - 1$ に対して,

$$\begin{aligned}
 D_1 &= e_{\{1, 2, \dots, 2m_1\}} \otimes e_{\{1, 2, \dots, 2m_1\}}, \\
 D_2 &= (e_{2m_1+1} \otimes e_{2m_1+1} + e_{2m_1+2} \otimes e_{2m_1+2}) \cdots \\
 &\quad \cdots (e_{2m_1+2i-3} \otimes e_{2m_1+2i-3} + e_{2m_1+2i-2} \otimes e_{2m_1+2i-2}), \\
 D_3 &= (e_{2m_1+2i-1} e_{2m_1+2i} \otimes e_{2m_1+2i-1} e_{2m_1+2i}) (e_{2m_1+2i+1} \otimes e_{2m_1+2i+1} + e_{2m_1+2i+2} \otimes e_{2m_1+2i+2}) \\
 &\quad - (e_{2m_1+2i-1} \otimes e_{2m_1+2i-1} + e_{2m_1+2i} \otimes e_{2m_1+2i}) (e_{2m_1+2i+1} e_{2m_1+2i+2} \otimes e_{2m_1+2i+1} e_{2m_1+2i+2}), \\
 D_4 &= (e_{2m_1+3} \otimes e_{2m_1+3} + e_{2m_1+4} \otimes e_{2m_1+4}) \cdots \\
 &\quad \cdots (e_{2m_1+2m_2-1} \otimes e_{2m_1+2m_2-1} + e_{2m_1+2m_2} \otimes e_{2m_1+2m_2}), \\
 D_5 &= e_{\{2m_1+2m_2+1, \dots, n\}} \otimes e_{\{2m_1+2m_2+1, \dots, n\}}, \\
 e &= D_1 D_2 D_3 D_4 D_5
 \end{aligned}$$

と置くと, $e \in Cl^{(m-m_2+1)}(n)_{\text{pr}}$ となる.

$$\chi_{\Lambda_{\Theta} - \Lambda_{m_1+i} + \Lambda_{m_1+i+1}} \left(\mathfrak{D} \left(e; \lambda + \frac{n - m_2 + 1}{2} - m_1 - 1 \right) \right)$$

を命題 2.8 により計算すると, 0 でない多項式が得られる. □

参考文献

- [1] A. Capelli, *Über die Zurückführung der Cayley'schen Operation Ω auf gewöhnliche Polar-Operationen*, Math. Ann. **29** (1887), 331–338.
- [2] ———, *Sur les opérations dans la théorie des formes algébriques*, Math. Ann. **37** (1890), 1–37.
- [3] J. Dixmier, *Algèbres Enveloppantes*, Gauthier-Villars, Paris, 1974.
- [4] R. Howe and T. Umeda, *The Capelli identity, the double commutant theorem, and multiplicity-free actions*, Math. Ann. **290** (1991), 565–619.
- [5] M. Itoh and T. Umeda, *On central elements in the universal enveloping algebras of the orthogonal Lie algebras*, preprint, Department of Mathematics, Faculty of Science, Univ. Kyoto, 1999.
- [6] A. W. Knap, *Representation Theory of Semisimple Groups: An Overview Based on Examples*, Princeton University Press, 1986.
- [7] H. Oda, *On Pfaffian-type operators of orthogonal Lie algebras*, preprint, 2000, UTMS 2000-47.
- [8] ———, *On annihilator operators of the degenerate principal series for orthogonal lie groups*, RIMS Kôkyûroku, Kyoto Univ. **1183** (2001), 74–93.
- [9] T. Oshima, *Generalized Capelli identities and boundary value problems for $GL(n)$* , Structure of Solutions of Differential Equations, World Scientific, 1996, pp. 307–335.
- [10] ———, *A quantization of conjugacy classes of matrices*, preprint, Department of Mathematical Science, University of Tokyo, 2000, UTMS 2000-38.