

ミニマル平面クエット系の不安定周期軌道と乱流制御

京都大学・航空宇宙工学専攻 河原 源太 (Genta Kawahara)

Department of Aeronautics and Astronautics,
Kyoto University

1. はじめに

乱流現象の制御は、幅広い分野における応用と密接に関連し、長らく工学上の重要課題とされてきた。例えば、乱流摩擦抵抗は、航空機や船舶の全抵抗の主要因子となっており、その低減はエネルギー有効利用に不可欠な制御技術のひとつとされている。最近では現代制御理論がチャンネル乱流における摩擦抵抗低減に適用されており (Kim 2003 参照)、非線形 (Bewley, Moin & Temam 2001) あるいは線形 (Högborg, Bewley & Henningson 2003) の最適制御理論を用いることにより、亜臨界レイノルズ数でのチャンネル乱流を層流化できることが報告されている。これらの研究における最適制御は、顕著な抵抗低減をもたらす流れの層流化に対する系統的かつ洗練されたアプローチである。しかしながら、これらの研究で開発された理論は複雑で込入ったものとなっており、今後、層流化のためにより簡潔な制御指針が望まれる。

その簡潔さゆえに魅力的な制御指針としてはいわゆるカオス制御があり、Ott, Grebogi & Yorke (1990) の先駆的な研究以来、少数自由度非線形力学系を中心にこれまで広く研究が進められている。カオスアトラクターには無数の不安定周期軌道が埋め込まれていることが知られており、カオス制御ではこれらの埋め込まれた周期軌道のうちでカオスよりも望ましい性質をもつ 1 つの軌道がさまざまな手法 (Ott, Grebogi & Yorke 1990; Pyragas 1992) によって安定化される。カオス制御の鍵となる着想は、カオス力学系の示す初期条件あるいはパラメータへの敏感な依存性を利用する点にあり、この敏感な依存性のおかげで、わずかに初期条件やパラメータの値を変化させることによって望ましい目標状態を実現することが可能となる。最近では、カオス制御が 2 次元乱流などの高自由度力学系にも徐々に適用されつつある (Guan *et al.* 2003)。しかしながら、3 次元ナビエ・ストークス方程式に対する非線形の目標解を見つけることは困難であり、それがカオス制御による戦略を壁乱流に適用する上での重大な障害となっている。

この数年間に、カオス制御の目標状態ともなり得るナビエ・ストークス方程式の非線形解が、平面クエット流 (Nagata 1990; Waleffe 2003; Kawahara & Kida 2001)、平面ポアズイユ流 (Itano & Toh 2001; Waleffe 2003)、および自律壁面流 (Jiménez & Simens 2001) において数値的に発見されている。それらは 3 次元の不安定平衡解あるいは周期解であり、そのうちのいくつかは、摩擦抵抗が低く粘性散逸の小さい静穏な状態を示すことが明らかにされている。これらの静穏な非線形解は、

カオス制御によって壁乱流の摩擦抵抗低減を実現する際の目標状態の候補として注目される。本稿ではこれらの非線形解を比較する。さらに、最近平面クエット流において発見された2つの周期解 (Kawahara & Kida 2001) のうちの1つで、低摩擦を示す静穏周期解を摩擦抵抗低減のための目標状態の候補の一例として取り上げ、それに着目した乱流制御の可能性について議論したい。相空間におけるこの周期軌道付近の乱流状態の振舞いを調べ、低レイノルズ数のミニマル平面クエット乱流を層流化するための制御指針を得る。この制御指針では、周期軌道が層流化のための中間的な目標として重要な役割を担うことになる。

2. 平行平板間流の非線形解

最近、平行平板間流において非圧縮ナビエ・ストークス方程式の非線形3次元の平衡解や周期解が発見されている。ここではそれらを比較する。層流平面クエット流は任意のレイノルズ数において線形安定であるので (Drazin & Reid 1981), 層流解からの解の分岐過程によって流れの複雑化や乱流への遷移を理解することができない。遷移過程の解明には、その発端となるナビエ・ストークス方程式の (層流解とは異なる) 非線形解を見つけ出す必要がある。そのため、この流れの乱流遷移の問題は難問とされてきた。一方、スパン方向の軸まわりに平面クエット系を一定角速度で回転させると、非回転の場合とは違って層流解は安定性を失い、そこから2次元定常解が分岐し、さらには2次元解から3次元定常解が分岐する。Nagata (1990) は、回転平面クエット系におけるその3次元定常解を非回転状態に接続し、平面クエット流の非線形定常解を求め、この難問を解決した。非回転状態のみを考えると、Nagata の解はあるレイノルズ数の値でサドル・ノード分岐によって現われ、その値より高いレイノルズ数では下分枝と上分枝をもつ。下分枝解は相対的に層流に近い静穏な性質を示す。さらに、Kawahara & Kida (2001) は非回転のクエット系において異なる2つの3次元周期解を発見した。その1つは乱流状態をよく再現し、他の1つは乱流より静穏な状態を表す。

平面ポアズイユ流においては、Itano & Toh (2001) が、ストリークの不安定性を直接数値シミュレーションにより調べ、不安定が非線形平衡に達した状態として3次元定常進行波解を求めることに成功した。この進行波解の空間構造は2壁面のうちの片方にのみ局在する。Toh & Itano (2003) はこの進行波解間のヘテロクリニック接続で生成される周期軌道も求めている。Waleffe (2001, 2003) は、Itano & Toh (2001) の進行波解とは異なる対称性をもつ3次元定常進行波解を求めた。Waleffe の解は2平板の中間面に関する対称性を有し、Nagata (1990) の解と同様にサドル・ノード分岐によって現われる。さらに、片側壁面近傍以外の乱れを強制的に減衰させることで人為的に安定化された3次元定常進行波解が、Jiménez & Simens (2001) によって求められている。

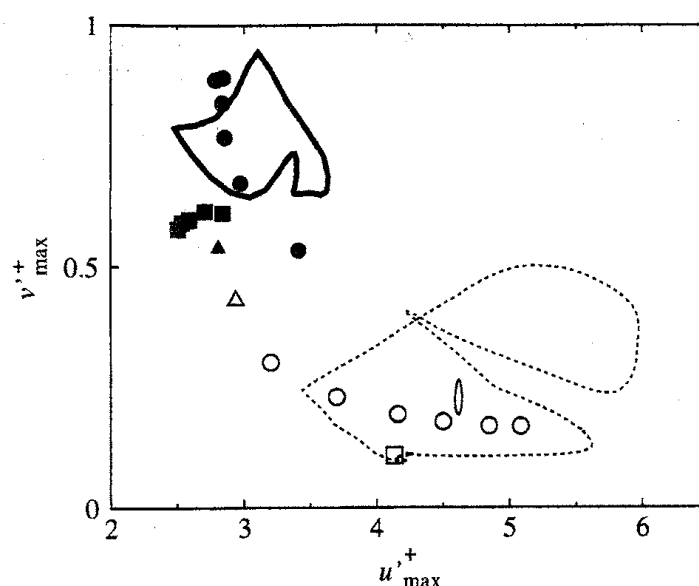


図 1. 平行平板間流の非線形解の比較. 横軸と縦軸は, それぞれ壁面摩擦速度 u_τ で規格化された流れ方向と壁垂直方向の RMS 速度の壁垂直方向分布における最大値 u_{max}^+ , v_{max}^+ を表す (RMS 値の計算は壁面に平行な面に関して行われている). 閉じた太実線は乱流に対応する Kawahara & Kida (2001) の平面クエット流の周期解を表し, 小さく閉じた実線は静穏周期解を表す. 丸は平面クエット流に対する (6つの異なる条件での) Nagata の非線形定常解 (Jiménez *et al.* 2005), 三角は平面ポアズイユ流に対する Waleffe (2003) の定常進行波解を表す. 黒色記号はこれらの解の上分枝を, 白抜き記号は下分枝を示す. ■と□はそれぞれ, 平面ポアズイユ流に対する (5つの異なる条件での) Jiménez & Simens (2001) および Itano & Toh (2001) の定常進行波解を表す. 点線は Toh & Itano (2003) の周期解を表す. 3つの周期軌道は全てこの射影において時間とともに時計回りに進行する.

以上の非線形解はいずれも不安定であるが, 壁近傍乱流でよく観測される波打ったストリークとそれに沿って千鳥配列した縦渦をもち, 壁近傍の秩序構造に類似した空間構造を示す (Waleffe 2003). 図 1 はこれらの非線形解の RMS 速度の最大値を比較したものである (Jiménez *et al.* 2005). 図中の閉じた細実線は次節以降で議論する平面クエット流の静穏周期解を表し, 乱流よりも低い摩擦抵抗を示す. 図 1 から, これらの非線形解は大きく 2つのグループに分けられることがわかる. その 1つは, 乱流状態の RMS 速度に相当する比較的強い (弱い) 壁垂直方向 (流れ方向) の速度変動をもち, 平面クエット乱流をよく再現する Kawahara & Kida の周期解 (太実線), Nagata (●) と Waleffe (▲) の上分枝

解, および Jiménez & Simens の解 (■) からなる. もう 1 つは, 弱い (強い) 壁垂直方向 (流れ方向) の速度変動をもち, 静穏周期解 (細実線), Nagata (○) と Waleffe (△) の下分枝解, Itano & Toh の進行波解 (□), および Toh & Itano の周期解 (点線) からなる. ただし, Waleffe の進行波解の上下分枝はサドル・ノード分岐直後のレイノルズ数で得られているため似通っており, 図 1 の 2 つのグループへの分離は不十分である. 定常解, 進行波解, 周期解の違い, あるいは流れの駆動方法や対称性の違いにもかかわらず, 様々な非線形解が 2 つのグループに分類できることは興味深い. 平行平板間流の乱流状態は, 相空間において上の 2 つのうちの前者のグループの平衡点まわりを複雑に変動するものと考えられ, 少なくともクエット乱流ではその変動の様子が Kawahara & Kida (2001) の不安定周期軌道によって特徴づけられる. 一方, 後者のグループの非線形解については, 最近壁乱流の大規模構造との関連性が指摘されている (藤と板野 2004). また, このグループの解は乱流状態より壁面摩擦抵抗が小さいため, カオス制御の対象として注目される. そこで以下では, 後者のグループの解の一例として Kawahara & Kida (2001) の静穏周期解を議論する.

3. 静穏周期解

ここでは, 非圧縮ナビエ・ストークス方程式のスペクトル法による直接数値シミュレーションによって, Hamilton, Kim & Waleffe (1995) が観測したミニマル平面クエット乱流を再現する. 平面クエット系は任意のレイノルズ数において線形安定であることが知られており, 層流状態は相空間において吸引域をもつ. したがって, 状態点は初期条件に依存して時間とともに層流状態あるいは乱流状態に漸近する. ここでは適切な初期状態から長時間のシミュレーションを行うことで発達した乱流状態を得る. シミュレーションのための数値計算プログラムは Kawahara & Kida (2001) において用いられたものと同じであり, 藤氏によって開発されたものである (Itano & Toh 2001 参照). エイリアジング誤差を除去したフーリエ展開およびチェビシェフ多項式展開を, それぞれ壁面に平行な方向 (流れ方向 x およびスパン方向 z) と壁面に垂直な方向 (y) に用いて流れ場を離散化する. 流れ方向の流量およびスパン方向の平均圧力勾配をそれぞれゼロに設定する. 数値計算はレイノルズ数 $Re \equiv Uh/\nu = 400$ において $8,448 (= 16 \times 33 \times 16)$ 点の格子点上で行う. ここに, U は 2 平行平板の速度差の半分, h は 2 平行平板間距離の半分, ν は流体の運動粘性率を表す. このとき, 乱流状態での平均摩擦速度 u_τ と h に基づくレイノルズ数は $Re_\tau = 34.1$ となる. 流れ方向とスパン方向の周期箱寸法はそれぞれ $L_x/h = 1.755\pi$ ($L_x^+ = 188$), $L_z/h = 1.2\pi$ ($L_z^+ = 129$) である. 以後, 上付き添え字 $+$ は u_τ と ν で規格化された物理量であることを表す. 格子間隔は, x, y, z の各方向に $\Delta x^+ = 12$, $\Delta y^+ = 0.16 - 3.3$, $\Delta z^+ = 8.1$ であり, この間隔は壁乱流の直接数値シミュレーションで用いられる標準的な値と同程度である. ミニマル平面クエット乱流では, 2 つの空間対称性 (Nagata 1990): (i)

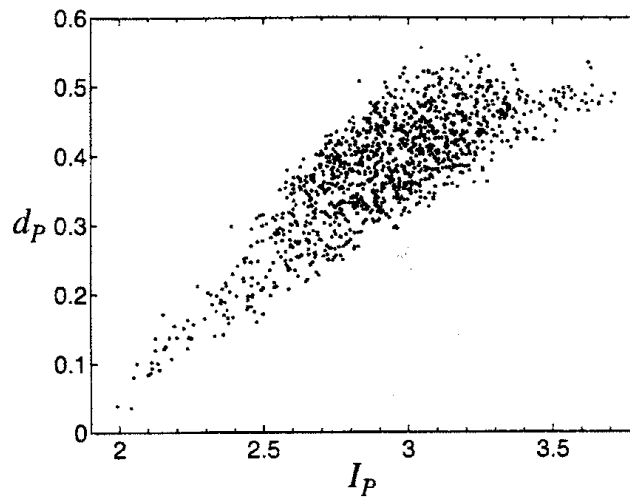


図 2. 相空間における周期軌道とポアンカレ断面との交点 x_f および乱流軌道とポアンカレ断面との交点 x 間の規格化された距離 $d_p = \|x - x_f\| / \|x_f\|$. 横軸は交点 x に対応する乱流状態の壁面剪断率 I_p を表す.

面 $z = 0$ に関する反転および x 方向への半周期 $L_x/2$ の並進; (ii) 直線 $x = y = 0$ まわりの 180° の回転および z 方向への半周期 $L_z/2$ の並進, が自発的 (かつ近似的) に現れることが観測されている (Kawahara & Kida 2001). ここではこれらの対称性を課した乱流場と課さない乱流場とを計算する. 一方, 下で計算する静穏周期解にはこれらの対称性を課す. これらの対称性をもつ乱流解は平板に平行な方向への並進対称性をもたないため, 相空間における (後述の) ポアンカレ断面上での周期運動に対応する状態点と (対称性をもつ) 乱流運動のそれとの距離を厳密に測ることができる.

本研究では, Kawahara & Kida (2001) によって発見された低摩擦状態を示す静穏な時間周期解をニュートン法の適用により高精度で再計算する. 瞬時の流れ場を表現する N 個の独立な変数, すなわち, 流れ方向とスパン方向の (平板に平行な面内での) 平均速度成分に対するチェビシェフ係数, および平板に垂直な方向の速度成分と渦度成分に対するフーリエ・チェビシェフ係数で張られる N 次元の相空間を考える ($N \approx 1.5 \times 10^4$). 前述の対称性 (i), (ii) を流れに課すと, その動力学は n 次元の部分空間において記述される ($n \approx N/4$). この部分空間においてポアンカレ断面を $\text{Im}(\bar{\omega}_{y1,2,0}) = 0$ によって定義する. ここに, $\text{Im}(\bar{\omega}_{y1,2,0})$ は, 流れ方向波数が $2\pi/L_x$, 多項式の次数が 2 次, スパン方向波数がゼロのフーリエ・チェビシェフ係数の虚数部を表す. 本研究では, $(n-1)$ 次元のポアンカレ写像 $f(r)$ の不動点として周期解を求める. ここに, r はポアンカレ断面上の $(n-1)$ 次元状態ベクトルである. ポアンカレ写像を前述の直接数値シミュレーションにより計算し, r における写像のヤコビ行列 $D_r f(r)$ を有限差分によって近似する.

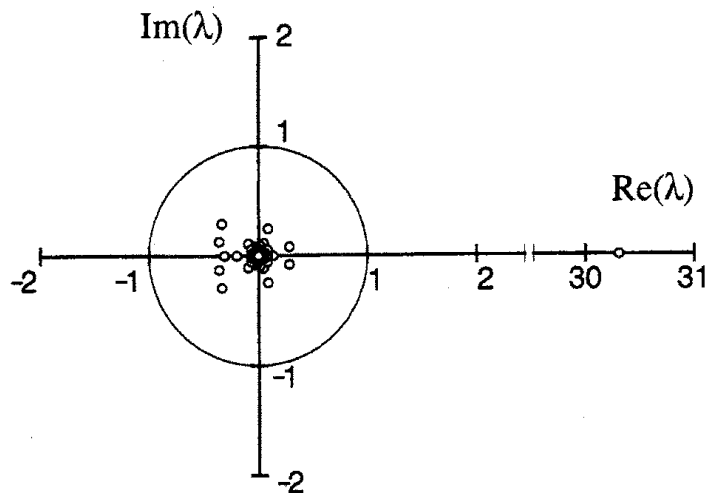


図 3. ポアンカレ写像の不動点（周期軌道）におけるヤコビ行列の固有値 λ . 横軸と縦軸はそれぞれ λ の実数部と虚数部を示す. 単位円外の固有値は不安定を意味する.

ニュートン反復の初期推定データとして Kawahara & Kida (2001) が発見した静穏周期解を用いる. ニュートン反復の収束判定条件を $\|f(\mathbf{r}) - \mathbf{r}\|/\|\mathbf{r}\| < 10^{-9}$ とする. ここに, $\|\cdot\|$ はユークリッドノルムを表す. $L_x/h = 1.755\pi$, $L_z/h = 1.2\pi$ (あるいは $Re = 400$, $L_z/h = 1.2\pi$) に対して, 少なくとも $Re = 240 - 500$ (あるいは $L_x/h = 1.755\pi - 1.88\pi$) の範囲で周期解の存在を確認している. 以下では, 前述のミニマル乱流 (Hamilton, Kim & Waleffe 1995) と同一条件での静穏周期軌道について調べる.

既に Kawahara & Kida (2001) が報告しているように, 相空間において乱流状態はカオス的に運動しつつ, 時おり低壁面摩擦の状態を示す静穏周期軌道に接近する. 静穏な平衡状態 (定常進行波) への同様の接近は, 平面ポアズイユ系において初めて観測された (Itano & Toh 2001). N 次元相空間における周期軌道とポアンカレ断面との交点 $\mathbf{x}_f$ および対称性を課した乱流の軌道とポアンカレ断面との交点 $\mathbf{x}$ 間の規格化された距離 $d_p = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_f\|/\|\mathbf{x}_f\|$ を図 2 に示す. 図 2 の横軸は交点 $\mathbf{x}$ に対応する乱流状態の示す壁面剪断率 I_p を表す. ここに, $I = \int_0^{L_x} \int_0^{L_z} (\partial u / \partial y|_{y=-h} + \partial u / \partial y|_{y=+h}) dx dz / (2L_x L_z U/h)$ はエネルギー注入率であり (Kawahara & Kida 2001), I を層流状態での値で規格化された壁面剪断率と見なすこともできる. ただし, u は流れ方向の速度成分である. 図 2 から I_p と d_p との強い相関が認められる. 乱流状態が周期軌道付近に接近する際にのみ壁面剪断率は小さな値をとる. したがって, 低い壁面剪断率は乱流状態が静穏な周期軌道に接近していることを示す有用な指標となる. 周期 $TU/h = 85.3$ ($T^+ = 248$) の周期軌道に沿う平均壁面剪断率は $\bar{I} = 1.95$ であり, 乱流軌道に沿う長時間 (TU/h

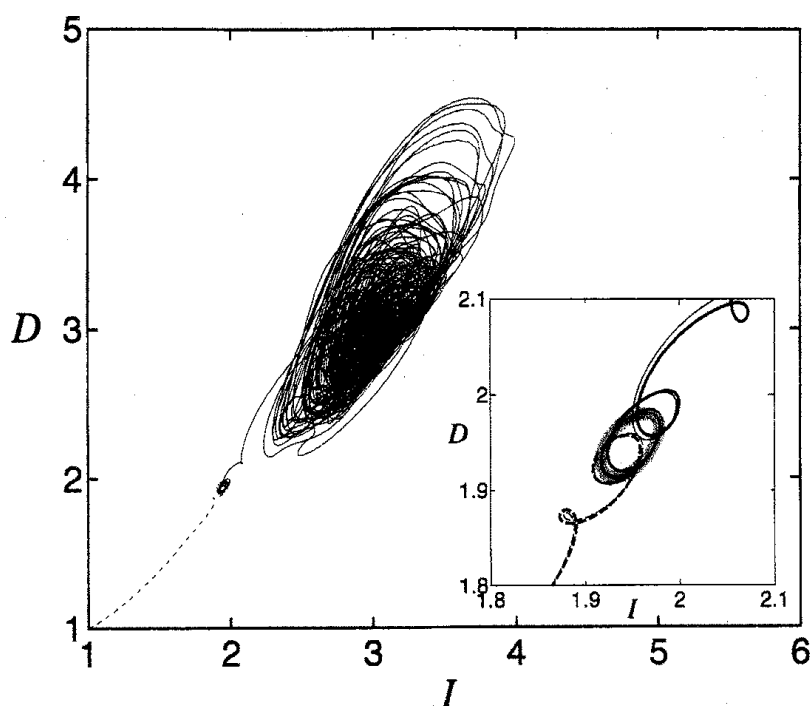


図 4. 周期軌道から正（実線）あるいは負（点線）の不安定方向へわずかに摂動を加えた場合の 2 つの軌道の (I, D) 面への射影．閉じた太い灰色の線は周期軌道を示す．差込図は周期軌道付近のこれら 2 つの軌道の拡大図である．差込図には，スパン方向軸まわりに系を回転させた場合 $(2\Omega h/U = \pm 10^{-4})$ の流れに対応する 2 つの軌道も太線で示されている．太い実線および太い点線は，それぞれクエット系における 2 平板の運動による剪断の渦度と反平行な回転（正の回転）および平行な回転（負の回転）下での流れを表す．

$\approx 2.5 \times 10^4$, $T^+ \approx 7.2 \times 10^4$) の平均 $\bar{I} = 2.91$ よりもずっと低い．

ポアンカレ写像の不動点（周期軌道） $\mathbf{r}_f$ におけるヤコビ行列 $D_{\mathbf{r}} \mathbf{f}(\mathbf{r}_f)$ の固有値（フロケ乗数）は，周期解と同一の空間周期性と対称性をもつ無限小擾乱に対する周期解の安定性を表す．図 3 から，ヤコビ行列の固有値 λ には絶対値が 1 より大きい（実）不安定固有値 $\lambda_u = 30.3$ がただ 1 つ存在し，それ以外の全ての固有値は安定であることがわかる．この不安定固有値 λ_u に対応する単位固有ベクトルを $\mathbf{e}_u$ とする．図 4 に示す 2 つの曲線は，相空間におけるポアンカレ断面上の 2 つの初期点 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_f \pm \epsilon \|\mathbf{r}_f\| \mathbf{e}_u$ ($\|\mathbf{r}_f\| = 0.310$) からそれぞれ始まる軌道の 2 次元 (I, D) 面への射影を表す．ここに $\epsilon = 10^{-4}$ であり，図の縦軸はエネルギー散逸率 $D = \int_0^{L_x} \int_{-h}^h \int_0^{L_z} |\boldsymbol{\omega}|^2 dx dy dz / (2L_x L_z U^2 / h)$ を表す (Kawahara & Kida 2001)．ただし， $\boldsymbol{\omega}$ は渦度ベクトルである．周期軌道から正の不安定方向 $+\mathbf{e}_u$ へわずかに摂動を

加えた場合の（実線で示す）軌道は乱流状態に漸近し、他方、負の不安定方向 $-e_u$ へ摂動を加えた（点線で示す）軌道は層流状態 $(I, D) = (1, 1)$ に漸近する。この結果は、周期軌道およびその局所安定多様体が乱流状態と層流状態との吸引域間のセパトリックスを形成することを意味する。このような吸引域に関する情報は、乱流への遷移機構の解明のみならず乱流制御のためにもきわめて有用である。しかしながら、一般に高次元相空間における吸引域境界は複雑な形状をもち、それを取り出すことは困難である。ここでは、周期軌道を手がかりにして吸引域境界を見つけることができたといえる。以下では、この吸引域間のセパトリックスに関する知見に基づいてミニマル平面クエット乱流の層流化を図る。

4. 乱流制御

まず、流れの制御のために新たなパラメータ σ を導入する。この σ を $\sigma = 0$ まわりに小さな幅で変化させるものとする。周期軌道は新たなポアンカレ写像 $f(r, \sigma)$ の $\sigma = 0$ に対する不動点に対応する。すなわち、 $r_f = f(r_f, 0)$ である。乱流状態が周期軌道付近に滞在しているものと仮定し、写像を不動点（周期軌道）まわりで

$$r^{i+1} - r_f = D_r f(r_f, 0)(r^i - r_f) + D_\sigma f(r_f, 0)\sigma^i \quad (1)$$

のように線形化する。ここに、上付き添え字 i ($= 0, 1, \dots$) は制御開始 ($i = 0$) から数えて第 i 回目の写像における値であることを意味する。局所安定多様体上の任意のベクトル v_s に対して $v_u \cdot v_s = 0$ を満足する（乱流の吸引域内部に向く）ベクトル v_u と式 (1) との内積をとると

$$v_u \cdot (r^{i+1} - r_f) = \lambda_u [v_u \cdot (r^i - r_f)] + \sigma^i [v_u \cdot D_\sigma f(r_f, 0)]$$

となる。したがって、本研究の層流化手法では、第 0 回目から第 1 回目までの写像間の時間にのみ

$$\sigma^0 = -c \lambda_u [v_u \cdot (r^0 - r_f)] / [v_u \cdot D_\sigma f(r_f, 0)] \quad (2)$$

で与えられるゼロでない σ^0 を系に課す。ここに、 $c > 1$ であり、状態点は乱流状態の側から層流状態の側に向かって安定多様体を横断することができる。この手法は 1 より大きい数の不安定方向をもつ場合にも拡張することができる。一方、不安定周期軌道の安定化を図る OGY (Ott-Grebogi-Yorke) 法 (Ott, Grebogi & Yorke 1990) では、 $i = 0, 1, \dots$ の各写像の際に式 (2) と同一だが $c = 1$ とした式で決定される σ^i を印加して、状態点が安定多様体上に推移するよう制御がなされる。式 (2) では $v_u \cdot D_\sigma f(r_f, 0) \neq 0$ を仮定している。スパン方向軸まわりの系の回転がこの条件を満足することを確認した (図 4 の差込図参照)。そこで、層流化

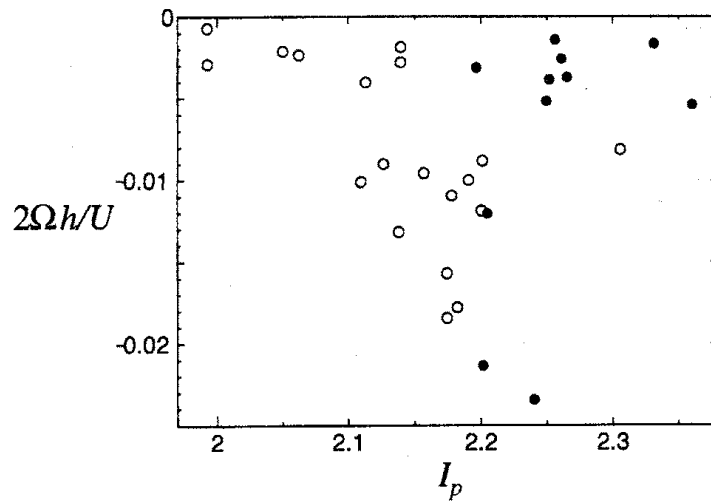


図 5. 層流化の試行に用いられた系の回転の渦度 2Ω [$c=2$ とした式 (2)] と制御開始の際 ($i=0$) の流れの壁面剪断率 I_p との関係. 白丸 (あるいは黒丸) は層流化に成功 (あるいは失敗) したことを示す.

を実現可能な制御入力の一例としてスパン方向 (z) 軸まわりの系の回転を取り上げ, 制御パラメータとして回転に対応する一様な渦度 2Ω をとる.

図 5 は系の回転による層流化の試行結果を示したものである. 乱流状態が周期軌道に接近する際 (すわなち $i=0$ において $d_p < 0.15$ となる場合), 式 (2) において $c=2$ とした系の回転 2Ω を決定し, 第 0 回目から第 1 回目までの写像間の短時間スパン方向軸まわりに系を 2Ω で回転させる. この図から, 前述したように観測可能な指標である壁面剪断率が低い状態 $I_p \lesssim 2.2$ に対しては層流化が実現されていることがわかる. 壁面剪断率が低い状態の流れの層流化には弱い回転で十分であることもわかる. 壁面剪断率が比較的高い状態 $I_p \gtrsim 2.2$ (およそ $d_p \gtrsim 0.1$ に相当, 図 1 参照) には線形理論が適用できないようである. なお, OGY 法 (Ott, Grebogi & Yorke 1990) によって周期軌道の安定化を実現するための条件はもっと厳しく, 状態点が $d_p \lesssim 10^{-2}$ 程度に周期軌道に接近する必要があることが判明した.

以上の層流化法では, 状態ベクトル $\mathbf{r}^0$ を知る必要があるが, 実際の応用においては $\mathbf{r}^0$ を観測することは不可能であろう. しかし, 一定の $\|\mathbf{r}^0 - \mathbf{r}_f\|$ に対する $2|\Omega|$ には自明な上限が存在し, それは $\mathbf{r}^0 - \mathbf{r}_f$ が $\mathbf{v}_u$ に平行になる際に与えられる. つまり, ある小さい値 2Ω の回転によって, I_p が小さい起こり得る全ての状態を層流化できるものと期待される. そこで, 図 5 の結果を考慮し, $I_p < 2.1$ となる場合に, 対称性 (i), (ii) を課さない非対称なミニマル平面クエット乱流に対して, 各状態によらず一定値 $2\Omega h/U = -3 \times 10^{-3}$ で系の回転を印加することにする. 回転を周期運動の周期 ($T^+ = 248$) と同一時間だけ印加する. この方法を 3

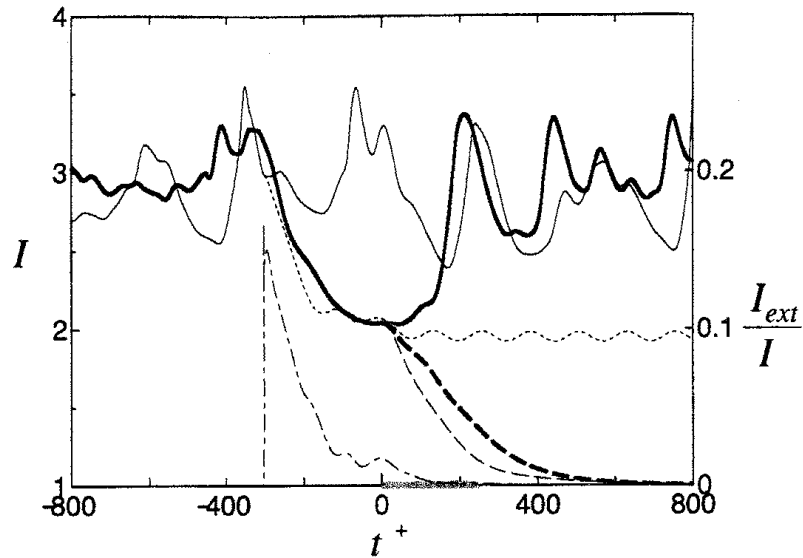


図 6. 制御を行わない場合と行う場合の流れにおける壁面剪断率 I の時間発展. 太い実線と細い実線は制御を行わない 2 つの流れを表す. 太い実線で示すそのうちの 1 つの流れは周期軌道に自然に接近し, この自然な接近の際 ($t^+ = 0$) に系の回転を印加すると, 太い破線で示す制御された流れは層流化する. 細い実線で示すもう 1 つの流れは自然には周期軌道に接近しないが, $t^+ = -302$ から Pyragas の外力制御 ($kh/U = 0.1$) を行うと, 細い点線で示す制御された流れは周期軌道に接近する. この強制的な接近の際 ($t^+ = 0$) に系の回転を印加すると, 細い破線で示す制御された流れは層流化する. 一点鎖線は Pyragas の外力制御によって注入されたエネルギー I_{ext} を I で規格化した値を示す. 系の回転は太い灰色の線分で示した時間帯だけ印加される.

つの異なる乱流状態に対して適用し, 全ての場合に乱流が層流化することを確認した[この 3 つの乱流状態のうちの 1 つの層流化については図 6 (太い破線) 参照]. 印加された回転は非常に弱いので, 制御時の総回転角 ΩT はわずか 7.3° である. 図 6 に太い破線で示す結果では, $t_{on}^+ = 0$ から系の回転を印加しているが, $-100 \leq t_{on}^+ \leq 20$ の範囲の t_{on}^+ であれば層流化が達成できることを確認している. また, $t_{on}^+ = 0$ とした場合に対して, 層流化のための回転の印加時間を $T^+ \approx 100$ にまで短縮できることも判明した. この方法では, 流れの層流化のために知る必要がある物理量は壁面剪断率だけであることに注意されたい.

乱流状態は時おり周期軌道付近に接近するが, 十分な接近は頻繁には起きない ($I_p < 2.2$ となる連続した接近の間の平均時間間隔は $T^+ \approx 4 \times 10^4$ ほどである). 高レイノルズ数あるいは大きい計算領域 (周期箱) では十分な接近はもっとまれになるものと考えられる (Jiménez *et al.* 2005). したがって, 十分な周期軌道への

接近を待つことなく層流化を実現する方法が望まれる。そこで、つぎにそのような方法を手短に議論する。任意の時刻に乱流状態を周期軌道に接近させるため、Pyragas の外力制御 (Pyragas 1992) に従い、単位質量あたりの外力 $kP(u_p - u)$ をナビエ・ストークス方程式に導入する。ここに、 $k (> 0)$ はゲイン定数であり、 u_p と u はそれぞれ、周期流と制御対象の流れの速度場を表す。また、射影演算子 P は、 $(m, m') = (0, \pm 1), (\pm 1, 0), (\pm 1, \pm 1), (\pm 1, \mp 1)$ および $l = 0, 2$ のみの壁垂直方向速度、渦度のフーリエ・チェビシェフ係数 $\tilde{v}_{m,l,m'}, \tilde{\omega}_{y,m,l,m'}$ によって与えられるソレノイダル速度場の再構成を表す。この外力の自由度の数は、系の自由度の総数 N に比べてきわめて小さい。最近、物理空間において局在した外力を用いる、いわゆる pinning 制御も 2 次元乱流に適用されているが (Guan *et al.* 2003)、ここではフーリエ・チェビシェフ空間において局在した外力を用いることにする。この外力制御によって周期軌道が大域的に安定化させることが可能である。事実、任意の時刻に外力を印加すると、図 6 に細い点線で示すように、乱流状態は直ちに周期軌道に漸近する。制御開始直後 ($-302 < t^+ \leq 0$) を除けば、乱流運動を周期運動に移行させるのに必要な制御入力 (図 6 の一点鎖線) はごくわずかである ($I_{ext}/I \ll 1$)。十分な接近 ($I_p < 2.1$) の後、上と同一の系の回転により流れの層流化が実現される (図 6 の細い破線)。外力制御によって乱流状態が周期軌道へ十分接近するに要する時間は各状態に依存し、その平均値は $T^+ \approx 300$ である。

5. まとめ

本稿では最近報告されている平衡平板間流れに対する非線形解を比較し、さらにミニマル平面クエット系において流れの層流化手法を提案した。この手法では不安定周期軌道が重要な役割を果たす。この手法をミニマルチャネル乱流に拡張するためには、本研究で用いたのと同様の非線形解が平面ポアズイユ系に対して必要とされる。亜臨界レイノルズ数の平面ポアズイユ系ではそのような解が既に Itano & Toh (2001) および Waleffe (2003) によって発見されている。彼らは、彼らが発見した定常進行波解が乱流状態と層流状態との吸引域間のセパトリックス上に存在することを報告している。彼らの進行波解は、本研究の周期解のように、流れの層流化を図る際の道しるべの候補として有望である。しかしながら、超臨界レイノルズ数のポアズイユ系では流れの層流化は (不安定化した) 層流状態の安定化を必要とする。また、今回の層流化手法を十分大きい周期箱での平面クエット乱流に適用するためには、空間的に低調波の擾乱に対する周期解の安定性を調べる必要がある。これらは今後の重要な研究課題である。

本研究の過程においてお励ましを頂いた永田雅人先生ならびに木田重雄先生に深い感謝の意を表します。さらにシミュレーションプログラムを提供して下さいました藤定義先生に深く感謝します。本研究は、科学研究費補助金および 21 世紀 COE プログラム「動的機能機械システムの数理モデルと設計論」— 複雑系の

科学による機械工学の新たな展開 — の援助の下で行われた。ここに記して謝意を表する。

文献

- Bewley, T. R., Moin, P. & Temam, R. 2001 DNS-based predictive control of turbulence: an optimal benchmark for feedback algorithms. *J. Fluid Mech.* **447**, 179.
- Drazin, P. G. & Reid, W. H. 1981 Hydrodynamic Stability. Cambridge University Press, Cambridge.
- Guan, S., Zhou, Y. C., Wei, G. W. & Lai, C.-H. 2003 Controlling flow turbulence. *Chaos* **13**, 64.
- Hamilton, J. M., Kim, J. & Waleffe, F. 1995 Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures. *J. Fluid Mech.* **287**, 317.
- Högberg, M., Bewley, T. R. & Henningson, D. S. 2003 Relaminarization of $Re_\tau = 100$ turbulence using gain scheduling and linear state-feedback control. *Phys. Fluids* **15**, 3572.
- Itano, T. & Toh, S. 2001 The dynamics of bursting process in wall turbulence. *J. Phys. Soc. Jpn.* **70**, 703.
- Jiménez, J., Kawahara, G., Simens, M. P., Nagata, M. & Shiba, M. 2005 Characterization of near-wall turbulence in terms of equilibrium and “bursting” solutions. *Phys. Fluids* **17**, 015105-1.
- Jiménez, J. & Simens, M. P. 2001 Low-dimensional dynamics in a turbulent wall flow. *J. Fluid Mech.* **435**, 81.
- Kawahara, G. & Kida, S. 2001 Periodic motion embedded in plane Couette turbulence: regeneration cycle and burst. *J. Fluid Mech.* **449**, 291.
- Kim, J. 2003 Control of turbulent boundary layers. *Phys. Fluids* **15**, 1093.
- Nagata, M. 1990 Three-dimensional finite-amplitude solutions in plane Couette flow: bifurcation from infinity. *J. Fluid Mech.* **217**, 519.
- Ott, E., Grebogi, C. & Yorke, J. A. 1990 Controlling chaos. *Phys. Rev. Lett.* **64**, 1196.
- Pyragas, K. 1992 Continuous control of chaos by self-controlling feedback. *Phys. Letter A* **170**, 421.
- Toh, S. & Itano, T. 2003 A periodic-like solution in channel flow. *J. Fluid Mech.*, **481**, 67.
- 藤定義, 板野智昭. 2004 壁乱流の壁近傍秩序構造と大規模構造. *ながれ*, **23**, 329.
- Waleffe, F. 2001 Exact coherent structures in channel flow, *J. Fluid Mech.* **435**, 93.
- Waleffe, F. 2003 Homotopy of exact coherent structures in plane shear flows. *Phys. Fluids* **15**, 1517.