

OPEN 3-MANIFOLDS AND AN ENGULFING THEOREM

広島大理 垣水 修 (Osamu Kakimizu)

non-compact 3-mfd には, compact のときにはおきないような, 奇妙な現象があらわれます。たとえば, Whitehead [13] は, irreducible contractible な open 3-mfd で $\mathbb{R}^3$ とは異なるものを見付けました。この例は基本群の pathology ではなく, end の pathology を示すものです。一方, P. Scott は, non-compact 3-mfd の基本群は, それが有限生成ならば, compact 3-submfd によって実現されることを示しました:

Theorem (P. Scott [9, 10]). W^3 : non-compact 3-mfd s.t. $\pi_1(W)$: 有限生成

$$\Rightarrow W \supset \exists N^3; \text{compact 3-submfd s.t.} \\ \pi_1(N) \xrightarrow{\cong} \pi_1(W)$$

以下は, Scottの定理における N の geometric な性質および W の end と N との関係について調べてみたことです。

★ PL category において議論する。

★ “3-mfd” はすべて connected で orientable とする。

★ W^3 は, non-compact, irreducible 3-mfd で, ∂W は compact, $\pi_1(W)$ は有限生成であるとする。

Definition $W^3 \supset N^3$: 3-submfd が W の芯 (core) であるとは,

- (1) N^3 : compact irreducible
- (2) $\partial N \supset \partial W$
- (3) $\pi_1(N) \xrightarrow{\cong} \pi_1(W)$.

★ W, N は共に aspherical だから, N は W の deformation retract である。

★ $\pi_1(W)$ が free group ならば, $\partial W = \emptyset$ で, N は handlebody である。

Theorem 1. W はつねに core をもつ。

Proposition 2. $W \supset N$ を Core とし, $Cl(W-N) \supset U$ をひとつの component とすると,

(1) $\partial U = U \cap N$ は ∂N のひとつの component からなる.

(2) U の end の数はひとつ.

(3) さらに, ∂U が W で "incompressible ならば", ∂U は U の deformation retract である.

(4) $\pi_1(W)$: indecomposable ($\neq 0, \mathbb{Z}$) のとき, ∂N の各 component は W で "incompressible".

Theorem 3. $\pi_1(W)$: indecomposable ($\neq \mathbb{Z}$) のとき, $W \supset N_0, N_1$ をふたつの core とすると,

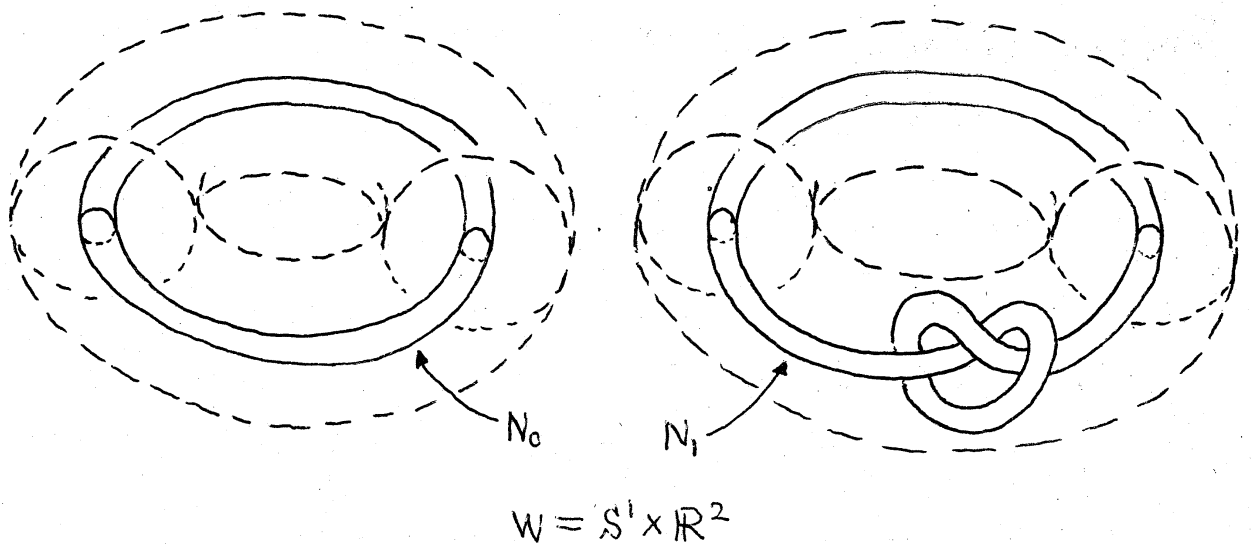
$\exists h: W \times [0, 1] \longrightarrow W$ isotopy s.t.

$h_0 = \text{id}, \quad h_1(N_0) = N_1$

$h_t|(W-K) \cup \partial W = \text{id} \quad (\exists \text{ compact poly. } K \subset W).$

★ $\pi_1(W)$ が $\mathbb{Z}$ または decomposable のときは,

Th. 3 は 成り立たない; たとえば, $W = S^1 \times \mathbb{R}^2$ のとき, 図の N_0, N_1 は共に W の core である.



Theorem 4. $W \supset N_0, N_1$ をふたつの core とする.

$$\Rightarrow N_0 \approx N_1.$$

Th. 3, 4 を示すには, つぎの定理が必要で

Theorem 5. M^3 : compact, irreducible 3-mfd.

$M \supset N_0, N_1$: compact irreducible 3-submfds s.t.

$N_0 \cap \partial M = N_1 \cap \partial M (= \emptyset \text{ 可 })$ は, ∂M のいくつかの component からなり, inclusion $\alpha_i: N_i \hookrightarrow M$ に対して,

$$(\alpha_i)_*: \pi_1(N_i) \longrightarrow \pi_1(M) \text{ mono. } (i=0, 1).$$

さらに, $\text{Im}(\alpha_0)_*$ と $\text{Im}(\alpha_1)_*$ が $\pi_1(M)$ で "conjugate",

$\pi_1(N_0) (\cong \pi_1(N_1))$: indecomposable ($\neq \mathbb{Z}$).

$$\Rightarrow \exists h: M \times [0,1] \longrightarrow M \text{ isotopy s.t.} \\ h_0 = \text{id}, \quad h_1(N_0) = N_1, \quad h_t|_{\partial M} = \text{id}.$$

また, Th. 5 から つき"の定理が"証明で"きます:

Squeezing Theorem (Jaco and Shalen [5]).

M^3 : compact irreducible 3-mfld.

$M \supset N_0, N_1$: compact irreducible 3-submflds s.t.

$T_i \equiv N_i \cap \partial M$ ($= \emptyset$ 可) は ∂M のいくつかの component からなり, T_i と $\text{Fr } N_i = \partial N_i - T_i$ ($\neq \emptyset$) は M で "incompressible" ($i=0,1$). $T_0 \subset T_1$. このとき,

$\exists f: N_0 \times [0,1] \longrightarrow M$ homotopy s.t.

$$f_0 = \text{id}, \quad f_1(N_0) \subset N_1$$

$$\Rightarrow \exists h: M \times [0,1] \longrightarrow M \text{ isotopy s.t.} \\ h_0 = \text{id}, \quad h_1(N_0) \subset N_1 - \text{Fr } N_1, \quad h_t|_{\partial M} = \text{id}.$$

つき"に W の end と core との関係について考えます.
まず, W の end に boundary を付けて compact 3-mfld にて"きるための条件として, つき"の定理があります:

Theorem (Tucker [11]).

$W \approx M^3 - X$, $\exists M^3$: compact irreducible 3-mfd,
 X は ∂M のいくつかの component.

$\iff W \supset \forall K$: compact subpolyhedron
 $\pi_1(W - K \text{ の各 component }):$ 有限生成.

Theorem 6. $\pi_1(W)$: indecomposable ($\neq \mathbb{Z}$) のとき,

$$W = \bigcup_i V_i^3 \quad \text{s.t.}$$

(1) $W \supset V_i$: compact, irreducible 3-submfd

(2) $V_i \subset V_{i+1} - \text{Fr } V_{i+1}$

(3) $V_i = N_i \cup (1\text{-handles})$ s.t.

N_i は W の core, $N_i \subset N_{i+1} - \text{Fr } N_{i+1}$.

$$Cl(N_{i+1} - N_i) \approx \text{Fr } N_i \times [0, 1].$$

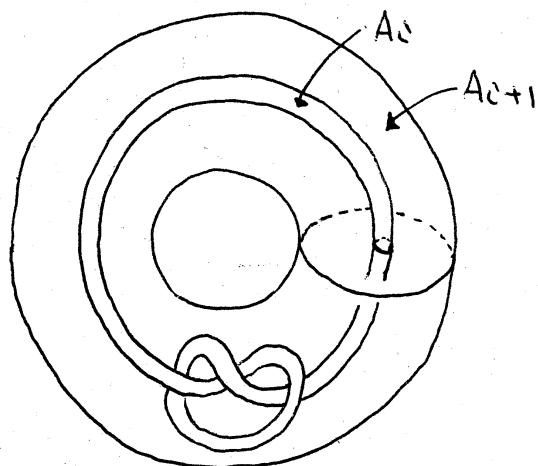
★ Th. 6 で, $\pi_1(W) = 0$ のときは, つぎの
 McMillan, Jr. の定理 [6] になります:

“irreducible contractible open 3-mfd は,
 handlebody の増大列の union として表わせる。”

★ $\pi_1(W)$: indecomposable ($\neq \mathbb{Z}$) のとき, W の
 end に boundary をつけて compact 3-mfd に

できるための条件は、 W が core の増大列の union として表わせることである。

★ $\pi(W)$ が $\mathbb{Z}$ または decomposable のときは、 W が core の増大列の union であっても、一般には end はねじれている。たとえば、



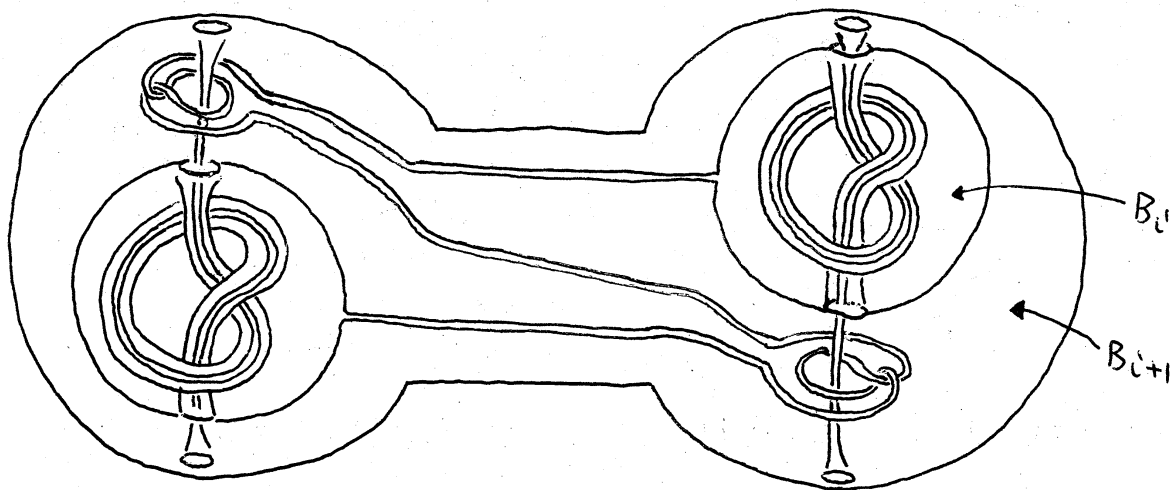
$$W_1 = \bigcup_i A_i$$

$$A_1 \subset A_2 \subset \dots \subset A_i \subset \dots$$

$$A_i \approx S^1 \times D^2$$

$$\pi_1(W_1) \cong \mathbb{Z}$$

A_i はすべて W_1 の core.



$$W_2 = \bigcup_i B_i, \quad B_1 \subset B_2 \subset \dots \subset B_i \subset \dots. \quad B_i \text{ は } W_2 \text{ の core.}$$

$$B_i \approx (\text{trefoil knot の exterior}) \cup \text{1 個の disk sum}$$

$$\pi_1(W_2) \cong \pi_1(S^3 - \text{trefoil knot}) * \pi_1(S^3 - \text{trefoil knot}).$$

★ endのねじれた open 3-mfld のその他の例

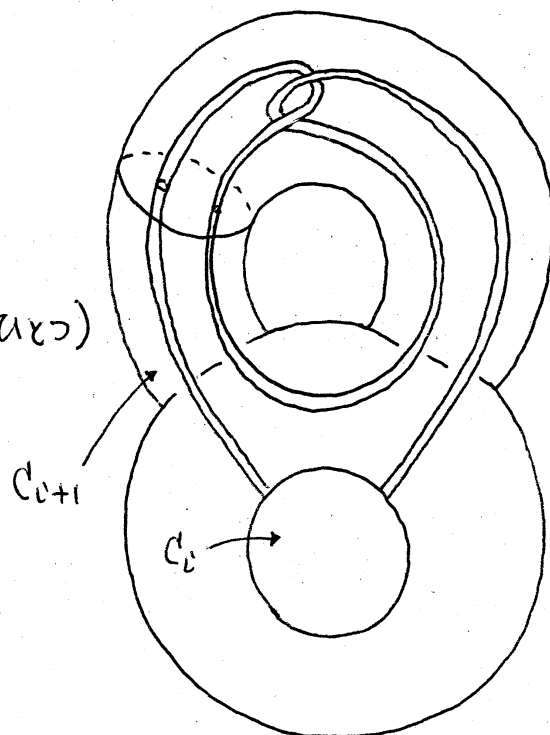
◎ Whitehead の例 [13].

$$W_3 = \bigcup_i C_i$$

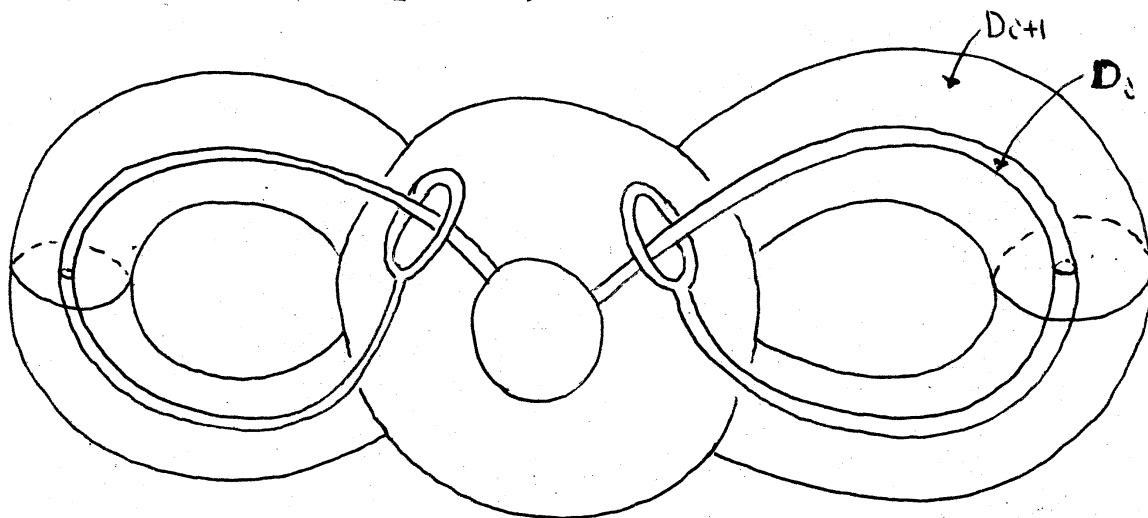
$$C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset \dots$$

$$C_i \approx (3\text{-cell}) \cup (1\text{-handle} \text{ ひとつ})$$

$$\pi_1(W_3) \cong 0.$$



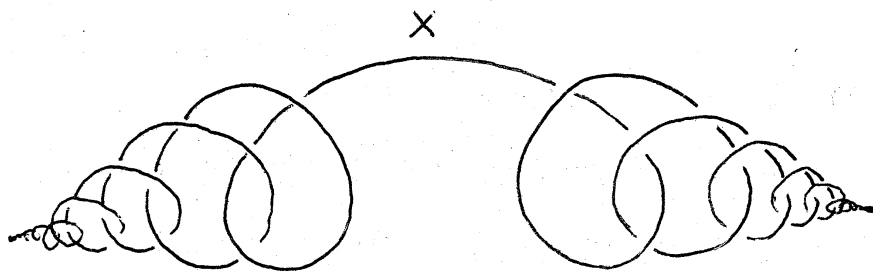
◎ Fox-Artin の例 [2].



$$W_4 = \bigcup_i D_i, \quad D_1 \subset D_2 \subset \dots, \quad \pi_1(W_4) \cong 0.$$

$$D_i \approx (3\text{-cell}) \cup (1\text{-handle} \text{ ひとつ}).$$

W_4 は, つぎの wild arc $X \subset S^3$ の complement である.

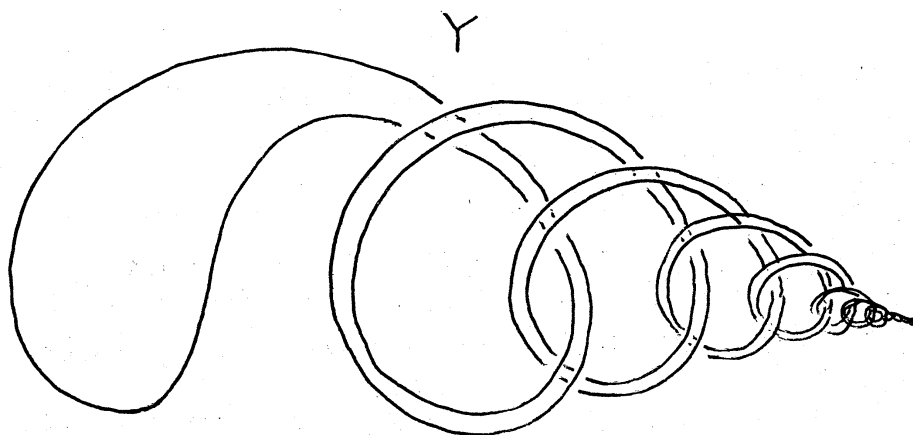
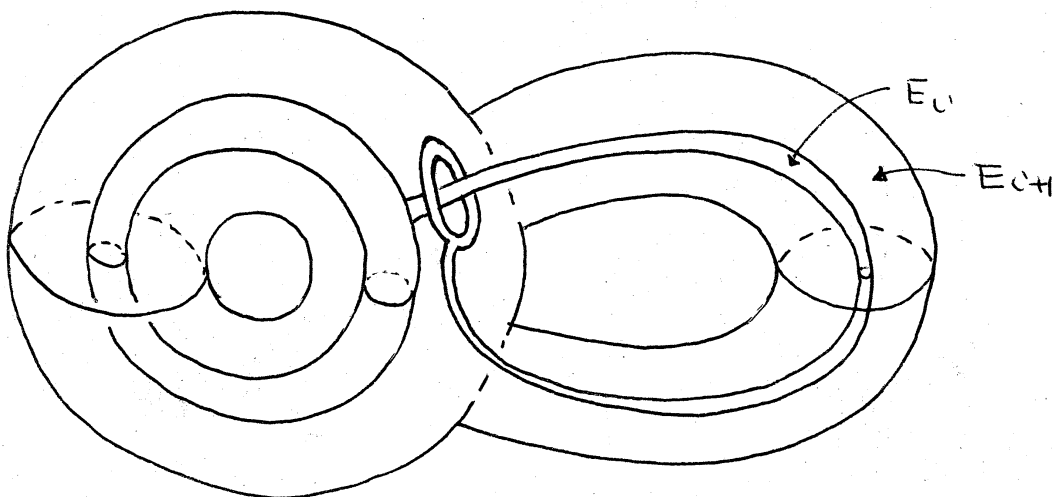


$$W_4 \approx S^3 - x$$

② $W_5 = \bigcup_i E_i$, $E_1 \subset E_2 \subset \dots$. $\pi_1(W_5) \cong \mathbb{Z}$.

$E_i \approx (\text{solid torus}) \cup (1\text{-handle} \cup \chi \cap)$.

$W_5 \approx S^3 - Y$, $S^3 \supset Y$: wild knot.



Theorem 7 (Engulfing Theorem).

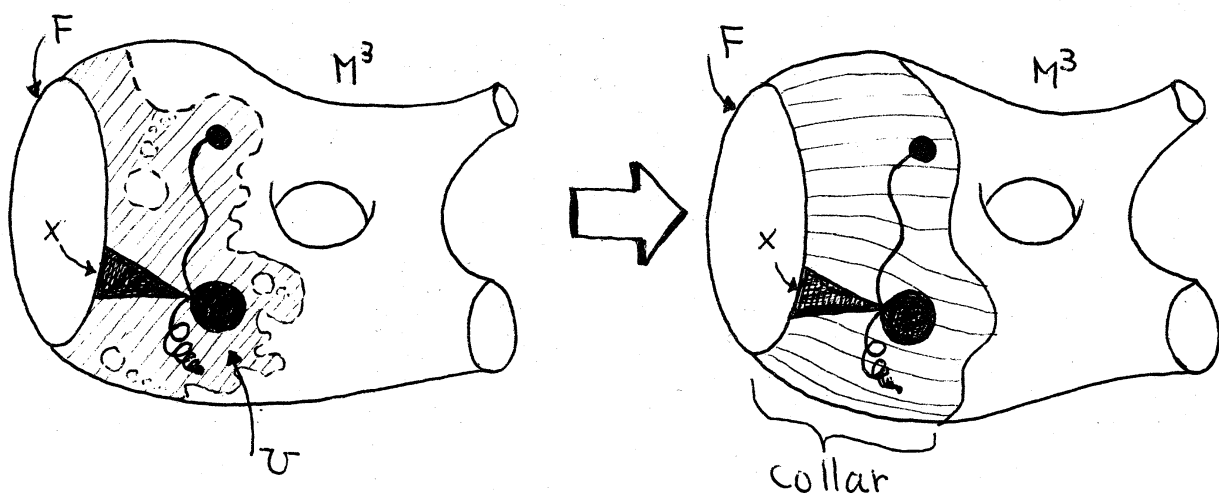
M^3 : compact irreducible 3-mfd.

$\partial M \supset F^2$: incompressible component.

$M \supset X$: compactum, $X \cap \partial M \subset F$.

このとき, X を含む F の collar が存在する

$$\iff M \supset \underset{\substack{\text{connected} \\ \text{open subset}}}{\exists U \supset F \cup X} \text{ s.t. } \pi_1(F) \xrightarrow{\cong} \pi_1(U).$$



★ Th. 7 は M が non-compact のときには, 成り立たない。たとえば,

M^3 : non-compact, irreducible 3-mfd s.t.

$\partial M = F$: connected closed surface, $\pi_1(F) \xrightarrow{\cong} \pi_1(M)$

さらに $M \neq F \times [0, \infty)$ のとき, compact poly, $X \subset M$ 且,

X を含む F の collar が存在しないものがある。

References

- [1] D.Epstein, Ends, Topology of 3-manifolds and related topics, ed. M.K.Fort (Prentice-Hall, 1962), 110-117.
- [2] R.H.Fox and E.Artin, Some wild cells and spheres in three dimensional space, Ann. of Math. 49 (1948), 979-990.
- [3] D.E.Galewski, J.G.Hollingsworth and D.R.McMillan,Jr., On the fundamental group and homotopy type of open 3-manifolds, General Topology and its Applications 2 (1972), 299-313.
- [4] W.Haken, Some results on surfaces in 3-manifolds, Studies in Modern Topology, Math. Assoc. Amer., distributed by Prentices Hall (1968), 34-98.
- [5] W.H.Jaco and P.B.Shalen, Seifert fibered spaces in 3-manifolds, Memoirs of Amer. Math. Soc. 220 (1979).
- [6] D.R.McMillan,Jr., Cartesian products of contractible open manifolds, Bull. Amer. Math. Soc. 67 (1961), 510-514.
- [7] ———, Some contractible open 3-manifolds, Trans. Amer. Math. Soc. 102 (1962), 373-382.
- [8] ——— and T.L.Thickstun, Open three-manifolds and the Poincaré conjecture, Topology 19 (1980), 313-320.
- [9] G.P.Scott, Finitely generated 3-manifold groups are finitely presented, J.London Math. Soc. 6 (1973), 437-440.
- [10] ———, Compact submanifolds of 3-manifolds, J. London Math. Soc. 7 (1973), 246-250.
- [11] T.Tucker, Non-compact 3-manifolds and the missing-boundary problem, Topology 13 (1974), 267-273.

- [12] F.Waldhausen, On irreducible 3-manifolds which are sufficiently large, Ann. of Math. 87 (1968), 56-88.
- [13] J.H.C.Whitehead, A certain open manifold whose group is unity, Quart. J. Math. Oxford 6 (1935), 268-279.