

ある市議会における投票力分析 Voting Power Analysis of a City of Council

筑波技術大学 保健科学部 情報システム学科 鶴見昌代

Masayo TSURUMI

Dept. of Computer Science, Fac. of Health Sciences, Tsukuba Univ. of Tech.

1 はじめに

協力ゲームにおける解概念に, Shapley 値や Banzhaf 値がある. これらは, それぞれ各順列または各提携が等確率で成立するという仮定に基づいた, 各プレイヤーの限界貢献度の期待値であると考えられる. また, 投票が行われる状況を協力ゲームとして定式化したものが投票ゲームであり, 投票ゲームに適用された解は投票力指数と呼ばれ, プレイヤーの発言力を分析できる. 主要な投票力指数には, Shapley 値や Banzhaf 値を投票ゲームに適用した Shapley-Shubik 指数や Banzhaf 指数, また投票ゲームで定義される Deegan-Packel 指数がある. しかし, 実際には順列や提携が等確率で成立するとは限らないなどの非対称性が存在しうる. このような非対称性を扱うための協力ゲームの解として, 確率値やランダム順序値 [10], 重みつき Shapley 値や重みつき Banzhaf 値などが提案されている.

また, 投票ゲームにおいては, 各プレイヤーや議案のイデオロギーを選好空間に配置することにより, 選好空間に基づいた非対称な指数が考えられており [6], それに基づいて実際の日本の参議院における政党の投票力の分析を行った研究がある [5]. 松井・上原は, 選考空間を導入せずに分析できる Shapley 指数を用いた非対称な投票力指数を提案し, 公理化と日本の参議院における政党の投票力の分析を行った [4]. また, 遠藤ら [3] は, Banzhaf 指数を用いた非対称な投票力指数を提案し, 1998 年と 1999 年のデータを導出し, 参議院の投票力を測定した. また, 鶴見ら [8],[9] は順列や提携を含むような基準の概念を考え, 各基準におけるプレイヤーの限界貢献度の概念を導入することで, 各基準が生じる確率, あるいは重みに, その基準におけるプレイヤーの限界貢献度を乗じたものの和を解として提案した. この値は, 順列や提携などの限界貢献度の基準が確率分布にしたがって生じる場合には各プレイヤーの限界貢献度の期待値となる. また, これを全体合理性を満たすように基準化したものをもう一つの解として提案した. これらの解概念を公理化し, 性質を明らかにし, 実際の日本の参議院における政党の影響力を評価した.

本研究では, 分数カウント型非対称投票力指数を導入し, その合理性について議論する. この新しい解は, Deegan-Packel 指数を特別な場合として含む概念である. また, 分析にあたり, 議長の取り扱いや棄権や欠席の取り扱いを議論し, 実際の柏市議会における各会派の投票力分析に応用する.

2 協力ゲームとその解

$N = \{1, 2, \dots, n\}$ をプレイヤーの集合とする. このとき, $v(\emptyset) = 0$ を満たす $v: 2^N \rightarrow \mathbb{R}$ は, 協力ゲーム, あるいは単にゲームとよばれる. 協力ゲーム全体を $\mathcal{G}$ とかく.

$v \in \mathcal{G}$ のうち, 次の性質を持つものは投票ゲームと呼ばれる.

1. $v(N) = 1, v(\emptyset) = 0$.
2. 任意の $S \subseteq T$ に対して, $v(S) \leq v(T)$.
3. $v(S) = 1$ ならば $v(N \setminus S) = 0$.

投票ゲーム v に対して, $v(S) = 1$ を満たす S は勝利提携と呼ばれる. 投票ゲーム全体を $\mathcal{V}\mathcal{G}$ と表す. v が与えられたときの勝利提携の全体を $\mathcal{W} = \{S \subseteq N \mid v(S) = 1\}$ と定義すると, v と $\mathcal{W}$ は一対一に対応する. また, 任意の $i \in S$ に対して $S \setminus \{i\} \notin \mathcal{W}$ を満たす $S \in \mathcal{W}$ は最小勝利提携と呼ばれる. 最小勝利提携全体を $\mathcal{W}_{\min}$ と表す.

投票ゲームのうち, 投票者 (プレイヤー) i が議席数 w_i を持ち, 賛成するプレイヤーの議席数が $q(> \sum_{i \in N} w_i/2)$ 以上となったときに議案が可決できると考えられるような場合, $[q; w_1, w_2, \dots, w_n]$ と表され, 重みつき多数決ゲームと呼ばれる. 重みつき多数決ゲーム $[q; w_1, w_2, \dots, w_n]$ の勝利提携の全体は, $\mathcal{W} = \{S \subseteq N \mid \sum_{i \in S} w_i \geq q\}$ と表される.

投票ゲームにおける解は投票力指数と呼ばれ, 代表的なものに, Shapley-Shubik 指数 (SS)[7], Banzhaf 指数 (Bz)[1], 正規化 Banzhaf 指数 (NB), Deegan-Packel 指数 [2] などがある. Shapley-Shubik 指数は順列に基づく貢献度の期待値であり, Banzhaf 指数は提携に基づく貢献度の期待値であり, 正規化 Banzhaf 指数は全体が 1 になるように Banzhaf 指数を正規化して得られるものである. Shapley-Shubik 指数, Banzhaf 指数, 正規化 Banzhaf 指数, Deegan-Packel 指数は次のように定義される.

任意の $S \subseteq N$ に対して, $s = |S|$ とするとき全単射 $\pi_S : S \rightarrow \{1, 2, \dots, s\}$ を提携 S における順列とし, この順列の集合を $\Pi(S)$ と表す. 混乱の恐れがない場合には, N における順列を単に順列とよぶ. $i \in N$ に対して $P(\pi, i) = \{j \in N \mid \pi(j) < \pi(i)\}$ とするとき, プレイヤー i の提携 S における限界貢献度 $C_i(v)(S)$ および順列 π における限界貢献度 $m_i(v)(\pi)$ はつぎのように定義される.

$$\begin{aligned} C_i(v)(S) &= v(S \cup \{i\}) - v(S \setminus \{i\}), \\ m_i(v)(\pi) &= v(P(\pi, i) \cup \{i\}) - v(P(\pi, i)). \end{aligned}$$

つぎで定義される $\phi_i(v)$ と $\beta_i(v)$ は, それぞれゲーム v におけるプレイヤー i の Shapley 値, 絶対 Banzhaf 値と呼ばれる.

$$\begin{aligned} \phi_i(v) &= \sum_{\pi \in \Pi(N)} \frac{1}{n!} \cdot m_i(v)(\pi), \\ \beta_i(v) &= \sum_{S \subseteq N} \frac{1}{2^n} \cdot C_i(v)(S). \end{aligned}$$

与えられたゲーム v が投票ゲームである場合には, これらはそれぞれ Shapley-Shubik 指数, 絶対 Banzhaf 指数と呼ばれる.

Shapley/絶対 Banzhaf 値は, 各順列/提携が生じる確率が等しいと考えたときの限界貢献度の期待値といえる. また, $\sum_{j \in N} \beta_j(v) \neq 0$ をみたま v に対して, つぎで定義される $\hat{\beta}$ は, 正規化 Banzhaf 値と呼ばれる.

$$\hat{\beta}_i(v) = \frac{v(N)}{\sum_{j \in N} \beta_j(v)} \cdot \beta_i(v)$$

与えられたゲームが投票ゲームである場合には, 正規化 Banzhaf 指数と呼ばれる.

また, 投票ゲーム $\mathcal{W}$ に対して, 次は Deegan-Packel 指数と呼ばれる.

$$\rho_i(\mathcal{W}) = \frac{1}{|\mathcal{W}_{\min}|} \sum_{S \in \mathcal{W}_{\min}, S \ni i} \frac{1}{|S|}$$

投票ゲームにおいて提携が生じる確率が異なる場合を扱うため, 松井・上原はプロフィールに基づく Shapley-Shubik 指数を考えた [4]. 松井・上原が提案した指数をそのまま一般の協力ゲームに適用すると, つぎのような定義が得られる.

定義 1 ([4]) $p : 2^N \rightarrow [0, 1]$ をプロファイルとし, $\phi_i(v)[S]$ をゲーム v と S における i の Shapley 値とする. すなわち, $\phi_i(v)[S] = 1/s! \cdot \sum_{\pi_S \in \Pi(S)} m_i(v)(\pi_S)$ とする. このとき, つぎで定義される $\rho_i^\phi(v; p)$ をプロファイル p が与えられたときの MU 値とよぶ.

$$\rho_i^\phi(v; p) = \sum_{S \subseteq N} p(S) \cdot \phi_i(v)[S]$$

遠藤らは, プロファイルに基づく Banzhaf 指数を提案した. この指数をそのまま一般の協力ゲームに適用したものがつぎである.

定義 2 ([3]) $p : 2^N \rightarrow [0, 1]$ をプロファイルとし, $\beta_i(v)[S]$ をゲーム v と S における i の Banzhaf 値とする. すなわち, $\beta_i(v)[S] = 1/2^s \cdot \sum_{T \subseteq S} C_i(v)(T)$ とする. このとき, つぎで定義される $\rho_i^\beta(v; p)$ をプロファイル p が与えられたときの ESA 値とよぶ.

$$\rho_i^\beta(v; p) = \sum_{S \subseteq N} p(S) \cdot \beta_i(v)[S]$$

順列や提携などのプレイヤーの影響力を測る基準を x と表し, その全体を X とする. 各基準は, $h_i : X \rightarrow 2^N$ によって提携と関連づけられると考える. x という貢献度を測る基準が与えられたとき, $D_i(v)(x) = v(h_i(x) \cup \{i\}) - v(h_i(x) \setminus \{i\})$ でプレイヤー i の貢献度を測ることができる. また, 基準に対して, 生起確率などを表すプロファイル $p : X \rightarrow \mathbb{R}_+$ が与えられるものとする. X に対するプロファイル全体を $\mathcal{P}^X$ で表す. このとき, Shapley-Shubik 指数や Banzhaf 指数の一般化として, 次のような解が考えられる.

定義 3 [8], [9] $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$ に対して, 次で定義される関数 $\eta_i^{X, (h_i)_{i \in N}} : \mathcal{G}' \times \mathcal{P}^X \rightarrow \mathbb{R}$ を加重和限界貢献度と呼ぶ.

$$\eta_i^{X, (h_i)_{i \in N}}(v; p) = \sum_{x \in X} p(x) \cdot D_i(v)(x).$$

$X_i(h_i; \mathcal{W}) = \{x \in X \mid h_i(x) \setminus \{i\} \notin \mathcal{W}, h_i(x) \cup \{i\} \in \mathcal{W}\}$ とすると, 投票ゲーム $\mathcal{W}$ に対する加重和限界貢献度は,

$$\eta_i^{X, (h_i)_{i \in N}}(\mathcal{W}, p) = \sum_{x \in X_i(h_i; \mathcal{W})} p(x)$$

と表される. これを加重和限界貢献度指数 (MC) と呼ぶ.

また, 正規化 Banzhaf 値を一般化した解として, 次が考えられる.

定義 4 [8], [9] X と $\mathcal{G}' \subseteq \mathcal{G}$ に対して, $[\mathcal{G}' \times \mathcal{P}][X, (h_i)_{i \in N}] = \{(v, p) \in \mathcal{G}' \times \mathcal{P}^X \mid \sum_{j \in N} \eta_j(v; p^X) \neq 0\}$ とする. このとき, $(v, p) \in [\mathcal{G}' \times \mathcal{P}][X, (h_i)_{i \in N}]$ に対して, 次で定義される $\hat{\eta}_i^{X, (h_i)_{i \in N}} : [\mathcal{G}' \times \mathcal{P}][X, (h_i)_{i \in N}] \rightarrow \mathbb{R}^N$ を限界型非対称解 (MC) とよぶ.

$$\hat{\eta}_i^{X, (h_i)_{i \in N}}(v; p) = \frac{v(N)}{\sum_{j \in N} \eta_j^{X, (h_i)_{i \in N}}(v; p^X)} \cdot \eta_i^{X, (h_i)_{i \in N}}(v; p),$$

3 分数カウント型非対称投票力指数

$h_i : X \rightarrow 2^N$ が i に依存しないとき, $h : X \rightarrow 2^N$ と表す. このとき, 各基準において, 影響力のあるプレイヤーが複数いる場合には, その基準が与えられたときの影響力をその人数で割ったものとする. ことによって, 新しい投票力指数を考えることができる. ここでは, $h : X \rightarrow 2^N$ が単射であることを仮定し, 投票力指数 $f : \mathcal{V}\mathcal{G} \times \mathcal{P}^X \rightarrow \mathbb{R}^N$ を非対称投票力指数と呼ぶ.

定義 5 次で定義される κ_i を分数カウント型非対称投票力指数 (FC) と呼ぶ。

$$\kappa_i^{X,h}(\mathcal{W};p) = \sum_{x \in X_i(h;\mathcal{W})} \frac{p(x)}{|N_x(h;\mathcal{W})|}$$

ただし $X_i(h;\mathcal{W}) = \{x \in X \mid h(x) \cup \{i\} \in \mathcal{W}, h(x) \setminus \{i\} \notin \mathcal{W}\}$, $N_x(h;\mathcal{W}) = \{j \in N \mid h(x) \cup \{j\} \in \mathcal{W}, h(x) \setminus \{j\} \notin \mathcal{W}\}$ とする。

分数カウント型非対称投票力指数は、次のようなプロファイルが与えられたときには、Deegan-Packel 指数と一致する。

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{|\mathcal{W}_{\min}|} & h(x) \in \mathcal{W}_{\min} \text{ のとき} \\ 0 & \text{それ以外} \end{cases}$$

この意味において、Deegan-Packel 指数の一般化であると考えられる。

$p_{\bar{x}}(\bar{x}) = 1$, 任意の $x \neq \bar{x}$ に対して $p_{\bar{x}}(x) = 0$ で $p_{\bar{x}}: X \rightarrow \mathbb{R}_+$ と定義すると、非対称投票力指数 $f: \mathcal{VG} \times \mathcal{P}^X \rightarrow \mathbb{R}^N$ について、次のような公理が考えられる。

公理 1

$$f_i(p_{\bar{x}}; \mathcal{W}) = \frac{1}{|N_x(h; \mathcal{W})|}$$

任意の $p_1, p_2 \in \mathcal{P}^X$ に対して、任意の $x \in X$ について $p_1 + p_2(x) = p_1(x) + p_2(x)$ と定めると次のような公理が考えられる。

公理 2 任意の $p_1, p_2 \in \mathcal{P}^X$ に対して、次が成り立つ。

$$f_i(p_1 + p_2; \mathcal{W}) = f_i(p_1; \mathcal{W}) + f_i(p_2; \mathcal{W})$$

このような公理に基づいて、次のように分数カウント型非対称投票力指数 (FC) を特徴づけることができる。

定理 1 分数カウント型非対称投票力指数 (FC) は公理 1 と公理 2 を満たし、公理 1 と公理 2 を満たす非対称投票力指数は分数カウント型非対称投票力指数 (FC) のみである。

この定理より、公理 1 と公理 2 が合理的であると考えられるならば、分数カウント型非対称投票力指数が合理的であると考えられる。

4 議長の扱い

多くの投票システムでは、議長は採決には加わらず、賛成と反対が同数になった場合のみに議長裁決を行う。したがって、議長を除く議員数が奇数であった場合、投票システムでは議長の意思は議案の採択または不採択の選択には影響しない。また議長を除く出席議員数が偶数であった場合、賛成と反対が同数のときには議長裁決によって決定される。議長を c 、議長を含む政党を i_c と表す。議長を除いたときの各政党の議席数を $w_1^{-c}, \dots, w_n^{-c}$ と表す。すなわち $w_{i_c}^{-c} = w_{i_c} - 1$ と $i \neq i_c$ に対して $w_i^{-c} = w_i$ で定める。また、この節では、欠席者がいないことを前提として議論する。

4.1 総議席数が偶数の場合

多くの議会では、総議席数 $\sum_{i \in N} w_i$ が偶数となっている。総議席数 $\sum_{i \in N} w_i$ が偶数の場合を考える。

まず、議長が採決に参加するかどうかを考慮しない場合、すなわち議長が採決に他の議員と同様に参加し、所属する政党と同じ投票を行うと考える場合を考える。このときの勝利提携の集合を W' で表すと、

$$W' = \left\{ S \subseteq N \mid \sum_{i \in S} w_i > \sum_{i \in N} \frac{w_i}{2} \right\} = \left\{ S \subseteq N \mid \sum_{i \in S} w_i \geq \sum_{i \in N} \frac{w_i}{2} + 1 \right\}$$

となる。

一方、現実の多くの議会と同様に、議長が採決に参加せず、決選投票となった場合にのみ議長採決を行うと考えると、議長を除いた総議席数が奇数となるため、議長採決に至ることはない。このときの勝利提携の集合 W は、次のように表される。

$$\begin{aligned} W &= \left\{ S \subseteq N \mid \sum_{i \in S} w_i^{-c} \geq \sum_{i \in N} \frac{w_i^{-c}}{2} \right\} \\ &= \left\{ S \subseteq N \mid \left[\sum_{i \in S} w_i \geq \sum_{i \in N} w_i / 2 + 1, S \ni i_c \right] \text{ or } \left[\sum_{i \in S} w_i \geq \sum_{i \in N} w_i / 2, S \not\ni i_c \right] \right\} \end{aligned}$$

命題 1 総議席数 $\sum_{i \in N} w_i$ が偶数のとき、Shapley-Shubik 指数を ϕ と表すと、議長が採決に参加するかどうかを考慮しない場合の投票ゲーム W' と議長が採決に参加せず、決選投票となったときのみ議長採決をするとした場合の投票ゲーム W について、次が成り立つ。

$$\phi_{i_c}(W) \leq \phi_{i_c}(W')$$

$$\phi_i(W) \geq \phi_i(W'), \forall i \neq i_c$$

この命題は、Banzhaf 指数にも成り立つ。

4.2 総議席数が奇数の場合

また、 $\sum_{i \in N} w_i$ が奇数のときについて検討すると、勝利提携の集合は議長の取り扱いを厳密に扱っても単純に多数決で考えた場合と勝利提携が一致し、したがって投票力指数も等しくなる。

5 柏市議会における投票力分析

平成 27 年 8 月の柏市議会議員一般選挙から平成 29 年 12 月までの議席数および投票行動に基づいて分析する。議決をとるとき、欠席者は存在しないものとして扱われることが多い。棄権者については、柏市議会では反対したものとして計上されるため、この前提に基づいて算出する。

柏清風（清）、公明党（公）、日本共産党（共）、市民サイド・ネット（市）、護憲市民会議（護）の各会派と、無所属 4 名 (A,B,C,D) の議席数と、議席数に比例して合計して 1 となるようにした値は次のとおりである。

表 1. 各会派の議席と議席数比例で計算された値

会派	清	公	共	柏	市	護	A	B	C	D
議席	11	7	5	4	3	2	1	1	1	1
比例	0.31	0.19	0.14	0.11	0.08	0.06	0.03	0.03	0.03	0.03

議長を特別視せずに Shapley-Shubik 指数 (SS) と正規化 Banzhaf 指数 (NB) を計算した場合、各会派の投票力は次のとおりとなった。

表 2. 議長を特別視せずに計算される Shapley-Shubik 指数 (SS) と正規化 Banzhaf 指数 (NB)

	清	公	共	柏	市	護	A	B	C	D
SS	0.37	0.19	0.13	0.09	0.07	0.05	0.02	0.02	0.02	0.02
NB	0.37	0.17	0.14	0.10	0.07	0.05	0.03	0.03	0.03	0.03

柏清風から議長が選出されたケースがあったため、このケースについてこのことを考慮して分析すると、次が得られた。

表 3. 柏清風から議長が選出されたことを考慮して得られた SS と NB

	清	公	共	柏	市	護	A	B	C	D
SS	0.34	0.20	0.13	0.10	0.08	0.05	0.03	0.03	0.03	0.03
NB	0.33	0.19	0.14	0.10	0.08	0.06	0.03	0.03	0.03	0.03

共産党から議長が選出されたケースがあったため、このケースについてこのことを考慮して分析すると、次が得られた。

表 4. 共産党から議長が選出されたことを考慮して得られた SS と NB

	清	公	共	柏	市	護	A	B	C	D
SS	0.39	0.16	0.13	0.10	0.07	0.06	0.03	0.03	0.03	0.03
NB	0.40	0.15	0.13	0.10	0.06	0.06	0.03	0.03	0.03	0.03

また、各議案に対する投票行動を元に限界型非対称解 (MC), 分数カウント型非対称投票力指数 (FC) を用いて分析すると、次の結果が得られた。

表 5. 各議案に対する投票行動を元に計算される MC と FC

	清	公	共	柏	市	護	A	B	C	D
MC	0.45	0.40	0.03	0.02	0.03	0.02	0.00	0.01	0.00	0.03
FC	0.53	0.38	0.02	0.01	0.02	0.01	0.00	0.01	0.00	0.02

各議案に対する投票行動を元に計算される限界型非対称解 (MC), 分数カウント型非対称投票力指数 (FC) では、多くの議席を持つ柏清風や公明党の影響力が他の投票力指数よりも大きい結果となった。

6 まとめ

本研究では、分数カウント型非対称投票力指数を導入し、その合理性について、公理の面から議論した。この新しい解は、Deegan-Packel 指数を特別な場合として含む概念である。また、分析にあたり、議長の取り扱いや棄権や欠席の取り扱いを議論し、実際の柏市議会における各会派の投票力分析に応用した。

References

[1] J.F. Banzhaf, Weighted votind doesn't work: a mathematical analysis, Rutgers Law Review, 19 (1965) 317–343.

[2] J. Deegan and E.W. Packel, A new index of power for simple n -person games, International Journal of Game Theory, 7 (1978) 113–123.

- [3] 遠藤理世, 鈴木貴, 穴太克則, 選考空間を構成せずに議案行動より直接計算する非対称 Banzhaf 指数, 京都大学数理解析研究所研究集会講究録 1207 「不確実なモデルによる動的計画理論の課題とその展望」研究集会報告集 (2001) 128–135.
- [4] T. Matsui and Y. Uehara, A note on asymmetric power index for voting games, 日本 OR 学会 2000 年度秋季研究発表会アブストラクト集.
- [5] R. Ono and S. Muto, Party power in the house of councilors in Japan: an application of the nonsymmetric Shapley-Owen index, *Journal of the Operations Research Society of Japan* 40 (1997) 21–32.
- [6] G. Owen, Political games, *Naval Research Logistics Quarterly* 18 (1971) 345–355.
- [7] L.S. Shapley (1953) A value for n -person games. in: H. Kuhn and A.W. Tucher (ed.) *Contributions to the Theory of Games* vol. 2. Princeton University Press, Princeton, pp 307–318.
- [8] 鶴見昌代, 谷野, 哲三, 乾口, 雅弘: 貢献度に基づく協力ゲームの解とその応用, 数理解析研究所講究録 (2001), 1241: 30–38
- [9] M. Tsurumi, T. Tanino, M. Inuiguchi, Nonsymmetric Values in Cooperative Games and Their Application, *Proceedings of The Second International Conference on Nonlinear Analysis and Convex Analysis*, pp. 507–516 (2003)
- [10] R.J. Weber, Chapter 7: Probabilistic values for games, in: “The Shapley value – Essays in honor of Lloyd S. Shapley,” edited by A.E. Roth, Cambridge University Press, pp. 101–119, 1988.

Dept. of Computer Science, Fac. of Health Sciences, Tsukuba University of Technology
 Address: Kasuga 4-12-7, Tsukuba, Ibaraki, 305-8521 JAPAN
 E-mail address: tsurumi@cs.k.tsukuba-tech.ac.jp