

関数微分方程式 $x'(t) = A(t)x(t - r(t, x_t))$ の一様安定性について

大阪府大工 西平 慎太郎 (Shintaro Nishihira)

大阪府大工 米山 俊昭 (Toshiaki Yoneyama)

本講演では、次の関数微分方程式

$$(DDE) \quad x'(t) = A(t)x(t - r(t, x_t))$$

の零解の一様安定性 (US) について得られた結果を述べる. ここで $A(t)$ は $t \geq 0$ で定義された $n \times n$ 関数行列, $q \geq 0, r : [0, \infty) \times C_n^q \rightarrow [0, q]$ は連続汎関数である. また, C_n^q は連続関数 $\varphi : [-q, 0] \rightarrow R^n$ の空間とする.

(DDE) の零解の一様漸近安定性 (UAS) については, 常微分方程式

$$(LE) \quad x'(t) = A(t)x$$

に関する定数変化法を用いて, 次の結果が得られている.

Theorem A. (T.YONEYAMA, 1991) (LE) の零解は一様漸近安定であると仮定する. つまり,

$$\exists K > 0, \exists \lambda > 0, |X(t)X^{-1}(s)| \leq Ke^{-\lambda(t-s)}, \quad t \geq s \geq 0$$

であるとする. ここで $X(t)$ は (LE) の基本行列である. このとき,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \int_t^{t+q} |A(s)| ds < \left(\frac{\lambda q}{K} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ならば, (DDE) の零解は (UAS) である.

同様の方法によって, 一様安定性及び漸近安定性 (AS) に関する結果を得た.

Theorem 1. (LE) の零解が一様安定であると仮定し,

$$(C) \quad \int_q^\infty |A(s)| \alpha(s) ds < \infty, \quad \alpha(s) = \int_{s-q}^s |A(u)| du$$

を満たすとする. このとき (DDE) の零解は (US) である.

さらに (LE) の零解が漸近安定であると仮定すると (DDE) の零解は (AS) である.

Proof.

$x(t)$ を $x_{t_0} = \phi (t_0 \geq 0, \phi \in C_n^q)$ に対する (DDE) の解とする. このとき,

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t A(s)x(s - r(s, x_s))ds, \quad t \geq t_0$$

であるから,

$$|x(t)| \leq \|\phi\| + \int_{t_0}^t |A(s)| \|x_s\| ds.$$

Gronwall の不等式より

$$|x(t)| \leq \|\phi\| \exp \left\{ \int_{t_0}^t |A(s)| ds \right\}.$$

よって, (DDE) の解は全区間で存在することが分かる. また,

$$x'(t) = A(t)x(t) - A(t) \int_{t-r(t, x_t)}^t A(s)x(s-r(s, x_s))ds \quad (t \geq t_0 + q)$$

となるから, (LE) に対する定数変化法によって

$$x(t) = X(t)X^{-1}(t_0)x(t_0) - \int_{t_0}^t X(t)X^{-1}(s)A(s) \int_{s-r(s, x_s)}^s A(u)x(u-r(u, x_u))duds.$$

$$|x(t)| \leq |X(t)X^{-1}(t_0)| \|\phi\| + \int_{t_0}^t |X(t)X^{-1}(s)| |A(s)| \int_{s-q}^s |A(u)| |x(u-r(u, x_u))| duds.$$

(LE) の零解は (US) であるから

$$\exists K > 0, \quad |X(t)X^{-1}(s)| \leq K \quad \text{for } t \geq s \geq 0.$$

したがって,

$$|x(t)| \leq K \|\phi\| + \int_{t_0}^t |A(s)| \int_{s-q}^s |A(u)| |x(u-r(u, x_u))| duds.$$

ここで

$$y(t) = \sup_{s \in [t-2q, t]} |x(s)|, \quad (t \geq t_0 + q)$$

とおくと,

$$y(t) \leq K \|\phi\| + K \int_{t_0}^t |A(s)| \int_{s-q}^s |A(u)| y(s) duds.$$

Gronwall の不等式より

$$y(t) \leq K \|\phi\| \exp \left\{ K \int_{t_0}^t |A(s)| \int_{s-q}^s |A(u)| duds \right\}.$$

よって

$$|x(t)| \leq K \|\phi\| \exp \left\{ K \int_{t_0}^t |A(s)| \int_{s-q}^s |A(u)| duds \right\}, \quad (t \geq t_0 + q).$$

ゆえに条件 (C) より (DDE) の零解は (US) であることがわかる.

次に, (LE) の零解が漸近安定であると仮定すると,

$$X(t) \longrightarrow 0.$$

いま, 零解は (US) であるから $\exists \delta > 0, \forall t_0 \geq 0, \|\phi\| < \delta$ ならば

$$\forall t \geq t_0 - q : |x(t)| < 1.$$

よって

$$|x(t)| \leq |X(t)||X^{-1}(t_0)||\phi| + |X(t)| \left| \int_{t_0}^T X^{-1}(s)A(s) \int_{s-r(s, x_s)}^s A(u)x(u-r(u, x_u))duds \right| \\ + K \int_T^t |A(s)| \int_{s-q}^s |A(u)|duds.$$

$T > 0$ を十分大きくとっておけば, $\forall \varepsilon > 0$ に対して

$$\int_T^t |A(s)| \int_{s-q}^s |A(u)|duds < \frac{\varepsilon}{K}$$

とできる. よって

$$|x(t)| \leq |X(t)||X^{-1}(t_0)||\phi| \\ + |X(t)| \left| \int_{t_0}^T X^{-1}(s)A(s) \int_{s-r(s, x_s)}^s A(u)x(u-r(u, x_u))duds \right| + \varepsilon \\ < 3\varepsilon \quad (\text{for large } t).$$

ゆえに

$$x(t) \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

Q.E.D.

次の Lemma は条件 (C) について考察したものである.

Lemma 1.

$$a \in C([0, \infty) \rightarrow [0, \infty)), \quad a(t) = O(t^{-p}). \\ p > \frac{1}{2} \implies \int_q^\infty a(s)\alpha(s)ds < \infty \quad \text{ここで } \alpha(s) = \int_{s-q}^s a(u)du$$

Proof.

$$\exists K > 0, \exists T > 0, \forall t \geq T - q : a(t) \leq Kt^{-p}$$

$$\int_T^\infty a(s)\alpha(s)ds = K^2 \int_T^\infty s^{-p} \int_{s-q}^s u^{-p}duds \\ \leq K^2 \int_T^\infty (s-q)^{-2p}ds \\ < \infty.$$

Q.E.D.

まず, 1次元の場合について例をあげる.

$$(DDE) \quad x'(t) = a(t)x(t-r(t, x_t)), \quad a \in C([0, \infty) \rightarrow R)$$

Example 1.

$$a(t) = \frac{\sin t}{t+1} \implies (DDE) \text{ の零解は } (US)$$

Example 2.

$$a(t) = \frac{-1}{t+1} \implies (DDE) \text{ の零解は } (US) \text{ かつ } (AS)$$

次に 2 次元の場合についての例をあげる.

$$(DDE) \quad x'(t) = A(t)x(t - r(t, x_t)), \quad a, b \in C([0, \infty) \rightarrow R)$$

Example 3.

$$A(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ -b(t) & a(t) \end{pmatrix}$$

$$a(t) = \frac{\sin t}{t+1}, \quad b(t) = \frac{\cos t}{t+1} \implies (DDE) \text{ の零解は } (US)$$

$$a(t) = \frac{-1}{t+1}, \quad b(t) = \frac{\cos t}{t+1} \implies (DDE) \text{ の零解は } (US) \text{ かつ } (AS)$$