

戸田格子におけるソリトンおよび残留定在波の生成と非線形破壊現象

同志社大・工 小田 隆 (Takashi ODA)

同志社大・工 水島 二郎 (Jiro MIZUSHIMA)

1 はじめに

非線形格子の研究は 1955 年の Fermi, Pasta と Ulam の数値実験に始まる。一般に Hooke の法則に従う線形バネモデルでは熱拡散現象が生じない。そこで彼らはバネモデルに非線形性を与える項を加えれば、非線形項により各モード間でエネルギーのやりとりが起こり十分に時間が経つと熱平衡状態が実現すると考えた。ところが非線形バネモデルにより数値シミュレーションを行うと、モード間でのエネルギーの交換は存在するが、ある程度時間が経つと再び初期状態に戻る再帰現象が起こり、熱平衡状態を得ることができなかった。

その 10 年後の 1965 年、Zabusky と Kruskal は一次元非線形格子モデルにおいて連続体近似を行い、KdV 方程式を導いた。そして電子計算機を用いて数値的に KdV 方程式を解いたところ、初期に与えた波形はしばらくすると、いくつかの振幅の異なる孤立波に変わり、それらの孤立波は衝突の前後で形が変化しないことを発見した。彼らはこの孤立波をソリトンと名付けた。

ソリトンは Fermi, Pasta と Ulam による非線形格子の数値実験をきっかけとして生まれたが、彼らの考えていた非線形格子は厳密なソリトン解を持たない。1967 年、厳密なソリトン解を持つ非線形格子が Toda により提案され、現在、戸田格子と呼ばれている。戸田格子は積分可能という点で優れているだけでなく、伸びに対して応力が弱く縮みに対して強いという特徴があり、実際の物理系ともよく対応している。¹⁾

この報告では、戸田格子における残留定在波と格子の破壊現象を数値シミュレーションにより調べた結果を報告する。詳しい解析については現在のところ検討中である。

2 1次元格子における残留定在波の生成

同じ質量の質点が同じバネ定数の線形バネで結合された線形格子中に、軽い不純物が存在すると局在した振動が生じる。ここでは、非線形格子においてもそのような振動が生じることを示す。質量 1 の質点が非線形バネで結合された自由端をもつ半無限格子を考える。ただし、自由端から 50 番目の格子に欠陥があり 50 番目の質点の質量は 0.5 であるとする。戸田格子では、非線形バネのポテンシャルは r を質点の相対変位として

$$\Phi(r) = \exp(-r) + r \quad (1)$$

と表わされる。格子の端点(自由端)から 1-ソリトン

$$f_1 = \beta^2 \operatorname{sech}^2\{\beta(t-4)\} \quad (2)$$

$$\beta = \sinh(1.0) \quad (3)$$

を入射したときの格子振動を調べる。図1に各場所におけるバネにかかる力の時間変化を示す。この図では横軸に時間、縦軸に n 番目のバネにかかる力 f_n を表している。ソリトンが不純物を通るとき、不純物から反射波が生じ、その波形が崩れている。そして不純物の近傍ではソリトンが通過した後でも減衰しない残留定在波が生じる。^{2,3)} また、不純物の質量比を変えて同じ計算を繰り返し行って残留定在波の振幅を調べた。その結果を図2に示す。図2では横軸に時間、縦軸に欠陥格子の振動振幅 a をとって、残留定在波の振幅が質量比にどのように依存するかを示している。質量比が1のときソリトン是通过するのみで、残留定在波は生じないが、質量比 m が小さくなり $m \simeq 0.42$ で残留定在波の振幅は最大値をもつ。

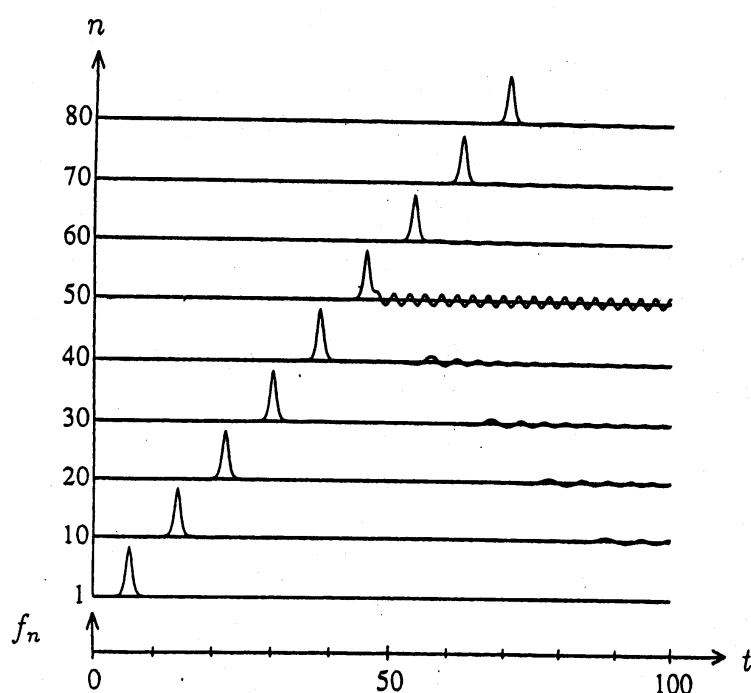


図1 各位置での振動.

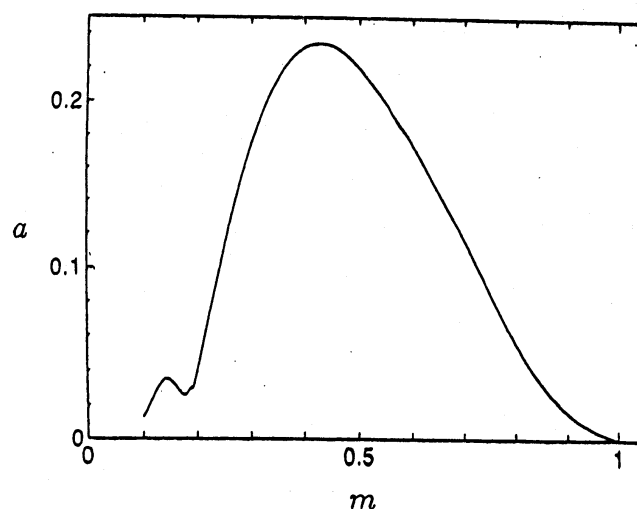


図2 残留定在波の振幅.

3 1次元格子における破壊現象

固定端においてソリトンは完全反射(圧縮波は圧縮波として、膨張波は膨張波として反射)するが、自由端では圧縮波は膨張波となり、膨張波は圧縮波となって反射する。圧縮波が自由端で反射すると膨張波に変わるので、バネが限界応力を超える伸びを受けた場合、切断される。バネの切断をモデル化するために、格子のポテンシャルは戸田ポテンシャルの引力部分を一定とした形

$$\Phi(r) = \begin{cases} \exp(-r) + r, & \text{for } r < r_c \\ \text{const}, & \text{for } r > r_c \end{cases} \quad (4)$$

を考える。このポテンシャル形は相対変位 r が r_c を超えると力が 0 となることを表している。格子モデルは格子数を 100 個、質量は単位質量 1 とし、一端は固定端もう一端は自由端とする。初期に限界応力 f_c よりも僅かに小さい一様な張力 f_i を自由端を引張ることにより各格子に張力 f_i を与えた後、自由端のバネにかかっている力を解くと格子に圧縮波が生じる。圧縮波が自由端で反射して膨張波に変わったとき、バネにかかる力が初期に与えた張力よりも大きくなりうるので、バネの伸びが限界値 r_c を超えると破壊が生じる。破壊が起こるとその点が新しい自由端となり、次に来たソリトンがそこで再び破壊を起こす。そして、結果的に破壊は自由端の近傍から起こることになる。図 3 は 100 個の格子において $f_i = -0.9$ 、 $f_c = -0.92$ としたときの計算結果である。この図では初期に全て連結していた格子が $t =$ で自由端から切断していく様子が見られる。ある程度時間がたつと格子は自由端以外の場所からも切断されていくことが分かる。この結果は、Toda, Hirota と Satuma の結果と同様である。⁴⁾

ここでは、この結果を拡張して、不純物を 1 つ含む格子において破壊現象がどのように進行していくかを調べる。格子モデルは先に述べたモデルにおいて 25 番目の位置に質量 0.8 の不純物が含まれている場合を考える。この格子系の限界応力を $f_c = -0.92$ とし初期張力 $f_i = -0.9$ で一様に引張り自由端の力を解いたときの破壊の時間進展の様子は、不純物が存在しない場合と同様の現象が起こった。次に質量 0.8 の不純物が 50 番目の位置に含まれている場合の破壊現象を図 4 に示す。この場合、不純物の近傍からバネが破壊している。不純物の近傍の格子が破壊する原因は、図 2 に示されているように格子中を伝播する波が不純物を通過するときに反射波を生じているためである。これらの破壊によって格子は 2 つに分かれ、不純物の周辺に破壊が集中し、自由端近傍での破壊は起こらなかった。不純物を 60, 70, 80 番目に配置したときにおいても 50 番目に配置したときと同様の破壊現象が起こった。さらに最終的な破壊個数を調べると、不純物を含む場合の方が一様な場合より少ないことが分かった。このようにして不純物の位置により破壊の生じる場所が異なることが分かったが、その物理的解明や解析についてはまだ明らかではない。

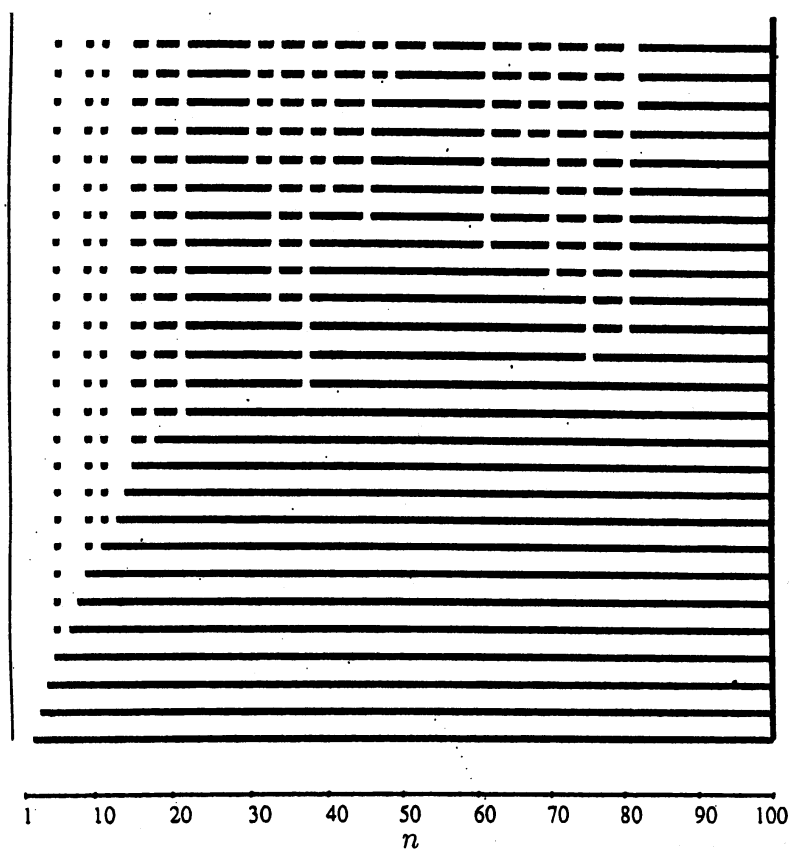


図3 自由端反射による破壊現象. 線がとぎれている点は破壊が生じたことを表している.

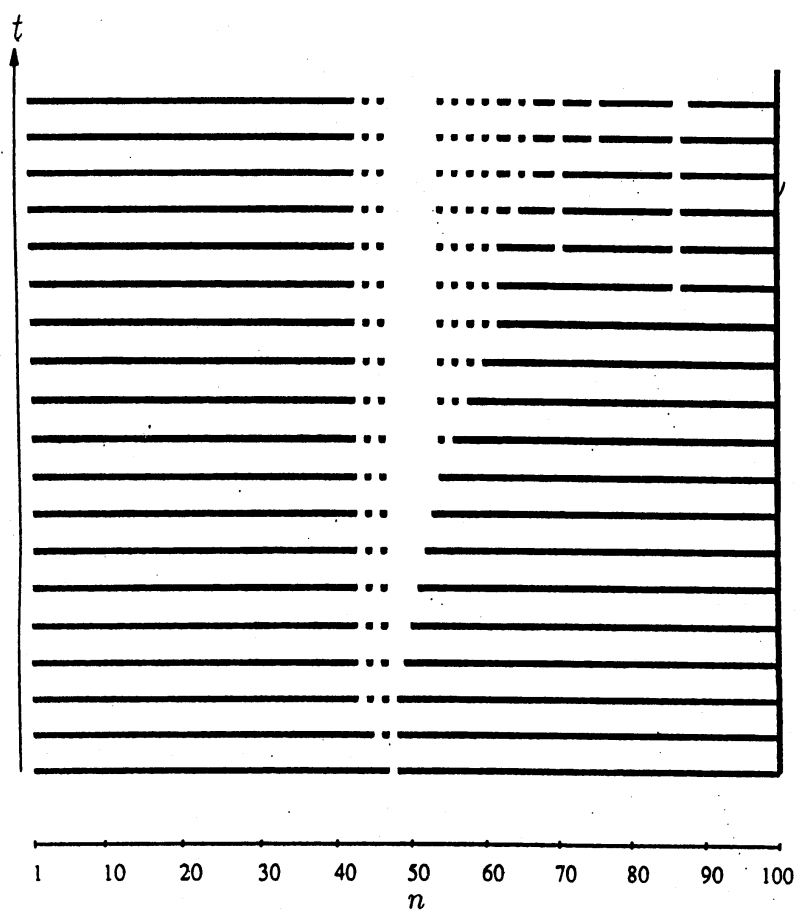


図4 不純物を含む場合の破壊現象. 線がとぎれている点は破壊が生じたことを表している.

4 2次元格子の破壊現象

2次元格子の破壊現象を調べる。格子モデルとして図5に示すような最近接四格子にのみ(4)式と同じポテンシャルで相互作用する2次元四角形格子モデルを採用し、格子数は x 方向に100個、 y 方向に100個とった。境界条件は両側面($y=1,100$)は自由端、左端($x=1$)は自由端、右端($x=100$)は固定端とした。左端(自由端)全体を x 方向に力 $f_i=-0.5$ で引張ることにより初期に一様な張力を与えて、自由端全体のバネにかかる力を解くと格子中に圧縮波が生じる。2次元格子中に不純物が存在する場合にこのような圧縮波を入射すると、どのように破壊が進展するかを調べる。ただし、限界応力は $f_c=-0.526$ とする。まず、不純物の厚さが薄い場合($x=25, y=45\sim 55$)には、不純物の近傍で破壊は起こらずに自由端で次々と破壊が生じた。さらに、不純物の厚さを増すと($x=25\sim 35, y=45\sim 55$)、図6に示したように不純物の近傍で反射波による破壊が生じ、不純物の背後の自由端においては自由端反射による破壊は生じなかった。以上の結果は格子間の相互作用ポテンシャルを Morse ポテンシャルとした2次元三角形格子の破壊現象(川原)と似たような結果となった。⁵⁾これらの現象の物理的説明についても現在研究中である。

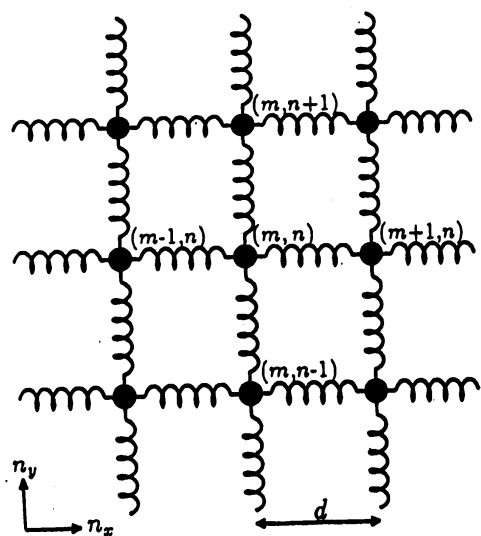


図5 2次元格子モデル

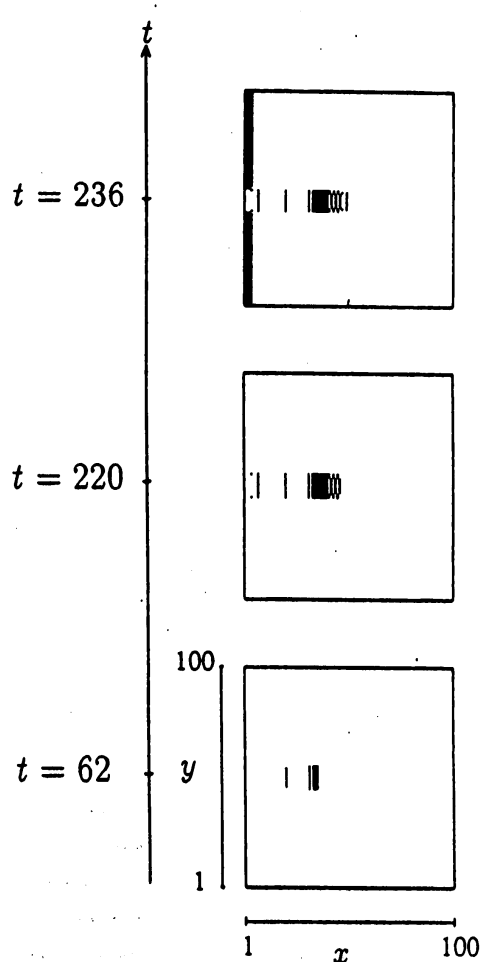


図6 2次元格子の破壊現象. 黒線は破壊が生じたことを表している.

参考文献

- [1] 戸田盛和：非線形格子力学、岩波書店 (1997), pp9-11.
- [2] 渡辺慎介：ソリトン物理入門、培風館 (1985), pp203-204.
- [3] S.Watanabe and M.Toda: J.Phys.Soc.Jpn.50(1981), pp3436-3442.
- [4] M.Toda, R.Hirota and J.Satsuma: Suppl.Prog.Theor.Phys.59(1976), pp148-161.
- [5] 川原琢治：「固体中のソリトン-離散モデルと連続モデル」九州大学応用力学研究所研究集会報告 9ME-S2 「ソリトン理論の新展開」 (1998), pp52-57.