

## ヨハン・ベルヌーイの積分計算

高瀬正仁 (Masahito Takase)

九州大学大学院数理学研究院

Graduate School of Mathematics, Kyushu University

日本オイラー研究所, The Euler Institute in Japan

### 「要約」

ヨハン・ベルヌーイの微積分講義録は「曲線の理論」に終始して、「関数」の概念が欠如していること、当時の数学的状況下では「曲線の理論」は高度に抽象的性格を帯びていたことを指摘する。次に、次の世代のオイラーが関数概念を導入したとき、本質的な契機として作用したのは変分法であったことを指摘する。

### I. ヨハン・ベルヌーイを読むまで

数学の古典を読み始めてから 30 年ほどになるが、最近ではベルヌーイ兄弟（ヤコブとヨハン）の作品に関心が向かうようになった。ベルヌーイの家系は相次いで著名な数学者を排出したことで知られているが、ベルヌーイ一族が創造した数学的世界の実際の姿はいったいどのようなものなのか、長年にわたって謎であり続けていた。強い動機に促されることがなければ足を踏み入れることはできない道理であり、ヤコブやヨハンは名を聞くのみで遠い存在であった。ところが、数学史の考察が進むにつれて、ベルヌーイを読まなければならないという気運が次第に高まっていった。ベルヌーイ家の数学者たちの中でもヤコブとヨハンの兄弟は格別で、この二人はオイラーとライプニッツを結ぶ線上に位置を占めているのである。

30 年前に古典読解の計画を立てたときの指針は、「ガウスから始める」というもので、まずはじめに取り組んだのはガウスの作品『アリトメチカ研究』であった。平行してアーベルの論文「楕円関数研究」も読み進めたが、引き続き、数論と解析学（実解析と複素解析）を中心に据えて 19 世紀の数学の古典を読むという考えであり、到達目標は 20 世紀のはじめのヒルベルトあたりに設定した。この計画はこれこれと進捗したが、読み重ねていくうちに次第に大きな存在感を示し始めたのは、オイラーの人生とその数学の姿形であった。19 世紀の数学がガウスの巨大な影響に覆われているのはまちがいないが、同時のもうひとつ、オイラーは、ガウスとは異質ではあるが普遍

性の高い影響を及ぼしているのである。

ガウス以降を学ぶという主旨を押し進めていったところ、かえってオイラー研究が不可欠であることを教えられた恰好になるが、オイラーを読むということであればオイラーの継承者であるラグランジュも欠かせないし、オイラーの数学の師匠であるヨハン・ベルヌーイが数学で何をしたのかということも気にかかる。そのヨハンには12歳年上のヤコブという兄がいて、二人でライプニッツの無限解析を研究したという。そこでベルヌーイ兄弟を通じてライプニッツの姿が見えてくることになり、それならニュートンもまた視野に入ってくる道理である。その前はどうかといえばデカルト、パスカル、フェルマの時代になり、ヨーロッパ近代の数学の出発点に立ち返ってしまう。数学と数学史を理解するには特定の時代だけを切り取るのはやはり無理で、歴史の全体を観察する視線を確保しなければならないのだと思ったことであった。

オイラーに象徴されるガウス以前の数学に関心を寄せるきっかけになったあれこれのことを、もう少し具体的に書き留めておきたいと思う。ガウスのD.A. こと『アリトメチカ研究』を読むと、第7章の冒頭にレムニスケート積分が書かれていた。ルジャンドルの分類でいうとレムニスケート積分は第一種に所属する楕円積分（ルジャンドル自身は楕円「積分」ではなく楕円「関数」と呼んでいた）だが、ルジャンドルはこれをオイラー積分の世界から抽出したのである。また、アーベルの論文「楕円関数研究」を見ると、冒頭に楕円関数論のはじまりの時期の回想があり、オイラーが取り上げた変数分離型の微分方程式論が語られていた。

ガウスとアーベルに触発されて楕円関数論の泉に心を惹かれ、源泉をみたいと思うようになった。オイラーはオイラー積分の究明の途次、

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^4}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$$

というタイプの変数分離型の微分方程式に遭遇し、その代数的積分を見つけようとして壁にぶつかってしまったが、イタリアの数学者ファニャーノから送付された数学論文集（全2巻、1750年）に収録されていた論文にヒントを得て、行き詰まりを打開することができたという。オイラーがファニャーノの論文を読んだことはオイラー自身が論文の中で言及しているが、この事実を知ってファニャーノに関心が向かい、該当する諸論文を探索した。

関連するファニャーノの論文はいくつかあるが、

「レムニスケートを測定する方法 第一論文」

には、レムニスケート積分の研究に向う動機が明記されていた。ファニャーノの言葉は次の通り。

二人の偉大な幾何学者、ベルヌーイ家のヤコブ氏とヨハン氏の兄弟は、1694年のライプチヒ論文集において見られるように、イソ

クロナパラケントリカを作図するためにレムニスケートの弧を利用して、レムニスケートの名を高からしめた。レムニスケートよりもいっそう簡単な何かある他の曲線を媒介としてレムニスケートを作図するとき、イソクロナパラケントリカのみならず、レムニスケートに依拠して作図することの可能な他の無数の曲線の、いっそう完全な作図が達成されることは明らかである。

このファニャーノの言葉に触発されて、イソクロナ・パラケントリカ（測心等時曲線）という、特殊な性質を備えた曲線とともに、ベルヌーイ兄弟の名をはじめ具体的に認識した。弟のヨハンには微分と積分の講義録があり、兄のヤコブには、イソクロナ・パラケントリカとレムニスケート曲線との関連を明らかにする2篇の論文があった。ただこれだけのことの中に、微積分のはじまりのころの情景を彷彿させる力が備わっている。

ベルヌーイ兄弟に通じる道筋のひとつは以上の通りだが、微積分の形成史に関連するもうひとつの道筋もまた存在した。関数概念のはじまりを知りたいと思い、オイラーの解析学三部作を座右に置いて、まずはじめに『序説』を読んで「解析的表示式」という「一番はじめの関数」を認識した。次に、それならオイラー以前の微積分はどのようなものだったのだろうかという疑問が生じ、ロピタルの作品『曲線の理解のための無限小解析』（1696年）を入手した。ロピタルの著作には「関数のない微積分」が描かれていて、オイラーの世界との大きな断層を感じたが、いっそう強い印象を受けたのは、この一番はじめの微積分のテキストロピタル本人の創意から生まれたのではなく、ヨハン・ベルヌーイの講義録の記録もしくはせいぜいのところ翻案であったという事実であった。これを言い換えると、ロピタルの著作を通じておのずとヨハン・ベルヌーイの微積分の世界に参入したということになる。

ヨハン・ベルヌーイは負数と虚数の対数の本性をめぐってライブニッツと論争を続け、実りのないまま立ち消えたことがあった。後年、オイラーはこの論争を取り上げて、「対数の無限多価性」を発見してこの論争に決着をつけたが、この経緯をたどることもまたベルヌーイへと続く道であった。

## II 「曲線」から「関数」へ

微積分形成史は大きく三期に分けられる。

- (1) ライブニッツ、ニュートンとベルヌーイ兄弟の時代（古層）
- (2) オイラーとその時代（基層・今日の微積分の土台）
- (3) コーシーとコーシー以降（オイラーの無限解析の再編成・現在の理論構成の範型）

微積分への道はライプニッツ以前にも敷かれていたが、その時代はいわば「神話の時代」であり、印象はいかにも神秘的である。だが、イソクロナ・パラセントリカの一語からも連想されるように、微積分は曲線の諸性質の解明をめざして生まれた理論であり、その基幹線は微積分前史から成立期まで一貫して不変である。曲線の性質を知るといえるのは、接線や法線を自在に引いたり、曲率を求めたりすることが考えられるが、これらは微積分のうちの微分計算の守備範囲である。曲線が囲む領域の面積の算出は積分計算の領分だが、一般的に言うところ、これは逆接線法の仮題のひとつである。

逆接線法というのは、曲線の性質を接線や法線の言葉を通じて局所的に指定して、曲線の全体像を復元することをめざす方法である。ライプニッツの1684年の論文

「分数量にも無理量にも妨げられない、極大と極小および接線を求めるための新しい方法。ならびにそれらのための特殊な計算」

の末尾を見ると、ドゥボーンが提出し、デカルトが試みて解けなかったという問題が紹介され、解答が与えられている。平面上に曲線を描き、軸  $AX$  を設定する。点  $A$  は軸の始点である。曲線上の任意の点  $W$  において接線を引き、軸  $AX$  に届くまで延長し、到達点を  $C$  とする。また、点  $W$  から軸に向かって垂線を降ろし、点  $X$  において軸に到達するとする。このような状態のもとで、提示された曲線は、軸上の二点  $C$  と  $X$  を結ぶ線分  $XC$  の長さがつねに定量  $a$  に等しいという性質を備えているとする。そのような曲線の形を決定せよというのが、ドゥボーンの問題である。

線分  $WX$  の長さを  $w$ 、軸の始点  $A$  から点  $X$  までの距離を  $x$  で表すと、指定された幾何学的状態により微分方程式

$$\frac{w}{a} = \frac{dw}{dx}$$

が成立し、これを解くと、等式

$$\log w = \frac{x}{a} + C \quad (C \text{ は定量})$$

が得られる。すなわち、提示された曲線は対数曲線であることが判明する。

この一例がよく示しているように、逆接線法の数学的実体は一階の常微分方程式の解法理論にほかならない。曲線が囲む領域の面積の算出、すなわち求積を実行するには、領域を無限小の領域に細分して、その無限小部分の面積、すなわち「面素」を初等的な方法により算出し、その後に面素を寄せ集めるという手順を踏む。領域の形状が複雑であっても、区分けされた無限小部分の面積は簡単に求められることがあり、この点に着目して細分化を工夫するところに求積法の眼目が認められるのであるから、求積法もまた逆接線法の事例である。ベルヌーイのねらいは曲線にまつわるあれこれの性質を理解することであり、どこまでも曲線から離れることがない。

逆接線法は積分計算の一区域であり、積分計算の守備範囲そのものはいっそう大きく広がっているが、いずれにしても微分計算と積分計算のテーマは「曲線の性質の解明」にあることはまちがいない。それならどうして曲線への執着が発生したのかという素朴な疑問が生じるが、たとえば E. ハイラー、G. ヴァンナーの著作 *Analysis by its History* (邦訳、『解析教程』, 上下二巻, 蟹江幸博訳, シュプリンガー・ジャパン) には,

二本の曲線の交叉角度の算出 (デカルト)  
望遠鏡の製作 (ガリレオ) と時計の製作 (ホイヘンス)  
極大極小問題 (フェルマ)  
運動の速度と加速度 (ガリレオ, ニュートン)  
天文学, 重力の法則の検証 (ケプラー, ニュートン) (邦訳書, 上, 97 頁)

という、五つの契機が記されている。これらのテーマの性格がどれも具象的であるのに対し、「曲線の諸性質の解明」はきわめて抽象度の高いテーマであり、五つのテーマの具象性はことごとくみな「曲線の諸性質の解明」の抽象性に帰着されていく。すなわち、「曲線の諸性質の解明」は「具象が詰め込まれている抽象」なのである。このようなテーマが自覚的に設定されたという出来事には、数学という学問の本来の面目がよく象徴されていると思う。微積分の古層の風光はこのようなものである。

### III ベルヌーイの積分計算講義

ヨハン・ベルヌーイの積分法の講義録の目次は次の通りである。

- 第 1 講 積分の性質と計算
- 第 2 講 平面領域の求積
- 第 4 講 いろいろな曲線の求積
- 第 3 講の続き. デカルトの葉
- 第 5 講 (欠)
- 第 6 講 (欠)
- 第 7 講 みいだされた積分を完全化する方法
- 第 8 講 逆接線法
- 第 9-14 講 逆接線法の続き
- 第 15 講 曲率円, 曲線の伸開線およびその曲線の弧長測定への応用
- 第 16 講 曲率円の中心を見つけること, および縮閉線
- 第 17 講 続き
- 第 18 講 続き
- 第 19 講 第二種 3 次放物線の伸開により描かれる曲線をみいだ

すこと／曲線の弧長をその伸開線を利用して求めること

第 20 講 続き

第 21 講 続き／サイクロイド、その弧長測定、囲まれる領域の測定、およびその伸開線

サイクロイドは当時、着目されていた数少ない超越曲線である。サイクロ緯度に接線を引くのは微分計算の領域だが、第 21 講のタイトルに見られるように、サイクロイドの弧長測定や、囲まれる面積の算出は積分計算の担当である。

第 22-24 講 続き

第 25 講 (断片。タイトルなし)

第 26-32 講

この七つの講義ではさまざまなタイプの包絡線が論じられている。何らかの仕方で曲線群が指定されるとき、そこに所属するすべての曲線と接するという性質をもつ曲線が探索された。そのような曲線は包絡線と呼ばれるが、包絡線はその各点における接線の状況を通じて規定されるのであるから、包絡線の全体像の復元をめざすのはまちがいになく積分計算のテーマである。

第 33 講 いろいろな物理・力学の問題とその解決／一様降下曲線をみいだすこと

ライブニッツが問題を提出し、ホイヘンスが解決した。「一様降下曲線」を見つけることが積分計算と見れるのは、包絡線の場合と同じである。

第 34 講 一様（均等）下降曲線に関する問題の解決。イソクロナ・パラセントリカ (*Isochrone Paracentrica*) をみいだすこと。

この問題を提出したのもライブニッツである。イソクロナ・パラセントリカという呼称を提案したのもライブニッツ。

第 35 講 等時性をみいだすこと

ホイヘンス。等時曲線はサイクロイドになる。

第 36 講 ロープ線もしくはチェーン線

第 37 講 ロープ線もしくはチェーン線 (続)

こうして概観すると、ベルヌーイの積分計算講義録のテーマはどこまでも曲線の性質の究明にあることが諒解される。同じベルヌーイの微分計算の講

義録と合わせると、「曲線の理論」というもののひとつの完成された形がここに提示されたとさえ言えそうに思う。数学の見地から見て著しいことは、ベルヌーイの積分計算講義には（微分計算講義にも）「関数」の概念が見あたらないという一事である。曲線の特性を示す方程式は登場するが、関数は存在せず、さらに根源にさかのぼるなら、座標系というものが存在しない。座標系が設定された平面上に曲線を描くのではなく、ベルヌーイは真っ白な平面上に曲線を描き、個々の曲線の固有の特性を調べるという視点に立脚して曲線を観察し、解明したい性質に応じて自由に切除線を設定するのである。

今日の微積分の基層、すなわちオイラーの微積分に移ると、曲線の根底に関数概念が認識されるという新たな出来事が発生した。これはオイラーの創意に出るものであり、オイラーは曲線の「解析的源泉」の存在を自覚して、そこに「関数」の概念を発見したのである。オイラーの無限解析にはもう曲線への執着はみられない。オイラーの積分計算の実体はさまざまなタイプの微分方程式の解法理論である。

「関数」の概念は「曲線」にも増して抽象の度合いが高いが、それだけにその詰まっている具象の多様さもまた豊かである。これを受けて、コーシー以降の微積分の第三期には、関数概念そのものが拡大され、きわめて抽象度の高い関数を対象にして理論体系が再編成される方向に進んだ。その流れは今も本質的な姿を変えないまま流れている。

#### IV 関数概念の発見をうながしたもの

オイラーによる関数概念の導入はいかにも斬新なアイデアだったが、オイラーはいかなる動機にうながされて「曲線の解析的源泉」の認識に向かったのだろうか。ここではこれ以上、立ち入って論じることはできないが、曲線の理論にはベルヌーイの微積分講義録には書かれていないもうひとつの課題がひそんでいる。それは「変分計算」である。ヨハン・ベルヌーイは最短降下線の問題を考察し、ヤコブ・ベルヌーイは等周問題を提示した。どちらも曲線の理論の範疇に所属する問題だが、オイラーはこの二例に手がかりを求めて変分計算の方法を考案した。これを推し進めるためには、微積分、すなわち無限解析の手法を大幅に拡大することが要請されるが、実際にオイラーの解析学はそうに進展し、関数概念の究明を手段とする強力な無限解析が形成された。

曲線の理論が変分計算を誘い、関数概念の発見をうながすにいたった経緯については、いずれ稿をあらためて詳細に論じたいが、ここではとりあえず関数概念の発見の前提になるのは「平面上に描かれた無限直線、すなわち一本の軸」を設定することであることを指摘しておきたいと思う。そのような軸があれば、一本の複数を関数のグラフとして認識することができるばかり

ではなく、いくつかの曲線がある同一の切除線  $x$  の関数のグラフとして描き、相互の位置関係を比較することが可能になるからである。

変分法は無限解析の新展開への契機として強力に作用した。オイラーが構築した変分法では、諸問題は「オイラー方程式」と呼ばれる一系の微分方程式の解法に帰着されていく。そこでオイラーは多種多様な微分方程式の解法理論を開発していかなければならなかったのである。この論点については稿をあらためて詳細に論じたいと思う。