

巾零リー群と偏微分方程式

京大・理 大鍛治 隆司 (Takashi Ōkaji)

§ 1 Introduction

リー群と偏微分方程式との関係については長い歴史があるが、近年特に巾零リー群との関係が注目されたのは、1977年に発表された Rothschild-Stein の論文が端緒である。彼らは $\mathbb{R}^n$ 上の実ベクトル場の平方の和で書ける 2 階作用素の解の精密な評価を求める為に、Lifting と呼ばれる独創的な手段を開発した。これにより、一般のベクトル場が Hörmander の条件 (後に $(CH)_r$ として述べる) を満たす時、“ガミ一変数”を増やせば、 $\mathbb{R}^{n+d}$ 上のベクトル場としてある巾零リー群上の左不変ベクトル場で“近似”出来ることがわかった。従ってベクトル場 (より正確には、ベクトル場の族) から生成される偏微分作用素を研究するにあたり、まず巾零リー群上の左不変ベクトル場から生成される作用素について研究し、後に一般の作用素についてその近似として取り扱うという図式が成り

立つ。本講演では、これをまず準楕円性の研究について概観し、後に初期値問題に適用してみたい。その前に Lifting Theorem をきちんと述べよう。

Ω を $\mathbb{R}^n$ の開集合, $\{X_j\}_{1 \leq j \leq p}$ を Ω 上の実ベクトル場の族で係数はすべて smooth とする。多重指数 $I = (i_1, \dots, i_N) \in \{1, 2, \dots, p\}^N$ に対し、その長さ $|I| = N$ とし、 $[X, Y] = XY - YX$ に対し、

$$|I| \geq 2, \quad \text{ad}_I(X) = [X_{i_1}, [X_{i_2}, \dots, [X_{i_N}, \dots]]$$

$$|I| = 1 \quad \text{ad}_I(X) = X_{i_1}$$

と定義する。自然数 r に対し、 $\{X_j\}_{1 \leq j \leq p}$ が Hörmander の条件 $(CH)_r$ をみたすと言うのは、 Ω の各点 x で

$$\text{span} \{ \text{ad}_I(X), |I| \leq r \} = T_x(\Omega) \quad (\text{接空間})$$

が成り立つ事であるとする。(この条件の下に 1967 年彼は、

$$L = \sum_{j=1}^{p-1} X_j^2 + X_p \quad \text{が準楕円性を持つ事を示した。})$$

Lifting Theorem $\{X_j\}_{1 \leq j \leq p}$ は $(CH)_r$ をみたすと仮定する。この時新しい変数 $(t_1, \dots, t_q) \in \mathbb{R}^q$ と適当な実 smooth 函数 $a_{jk}(x, t)$, $1 \leq j \leq p, 1 \leq k \leq q$ を選べば、次の条件を満足させることが出来る。

以下必要なるは Ω を適当に shrink させる事にして、

$$(1) \quad \tilde{X}_j = X_j + \sum_{k=1}^q a_{jk}(x, t) \frac{\partial}{\partial t_k} \quad (1 \leq j \leq p)$$

は $\tilde{\Omega} = \Omega \times V$ で $(CH)_r$ をみたす。但し V は $0 \in \mathbb{R}^q$ の近傍。

$$(2) \quad \{\tilde{X}_j\}_{1 \leq j \leq p} \text{ は "free up to step } r", \text{ 即ち } n+q = \dim \mathcal{F}_{r,p}$$

但し $\mathcal{F}_{r,p}$ は p 個の生成元を持つ step r の Free Nilpotent Lie Algebra.

(3) ある C^∞ -map $\theta(x, y) : \widehat{\Omega} \times \widehat{\Omega} \rightarrow Fr_p$ が存在して

$\forall x \in \widehat{\Omega}$ に対し, $\theta_x : y \mapsto \theta(x, y)$ は $\widehat{\Omega}$ の $\exists$ sub近傍から

Fr_p の単位元の近傍への C^∞ -diffeomorphismであり,

$\widehat{X}_j$ の θ_x による像を $\widehat{X}_{j,x}$ と書けば

$$\widehat{X}_{j,x} = \widehat{X}_{j,x} + R_{j,x}$$

と分解されて, $\widehat{X}_{j,x}$ は Free Nilpotent Lie 群 $Fr_p (= \exp Fr_p)$ 上

の左不変ベクトル場, $R_{j,x} = \sum_{\alpha} a_{\alpha}^{(j)}(x) u^{\alpha}$ はその係数を

$$a_{\alpha}^{(j)}(u) \cong \sum_{\beta} a_{\alpha\beta}^{(j)} u^{\beta} \quad (\text{形式的に Taylor 展開すれば}) \quad \text{と} \quad \text{し} \quad \text{た} \quad \text{時}$$

$a_{\alpha\beta}^{(j)} \neq 0$ に対して $|\beta| - |\alpha| \leq 0$ が成立する.

§2 準楕円性

Ω で定義された偏微分作用素 L が準楕円性を持つとは,

$$\forall u \in \mathcal{D}(\Omega), \forall \omega \subset \Omega \text{ open}, Lu \in C^\infty(\omega) \Rightarrow u \in C^\infty(\omega)$$

が成り立つ時をいう。まずや零リ一群上の結果を述べよう。

$\mathcal{G}$ を graded Lie algebra: i.e. $\mathcal{G} = \mathcal{G}_1 \oplus \mathcal{G}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{G}_r$, s.t.

$$\begin{aligned} [\mathcal{G}_i, \mathcal{G}_j] &\subset \mathcal{G}_{i+j} \quad (i+j \leq r) \\ &= 0 \quad (i+j > r). \end{aligned}$$

さらに $\mathcal{G}$ は stratified: i.e. $\mathcal{G}_1$ が $\mathcal{G}$ を生成する. $[(CH)_r$ に相当]

と仮定する. G を $\mathcal{G}$ に附随した simply connected Lie 群, $\widehat{G}$ を G の既約ユニタリ表現全体の集合とする. さらに $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ を $\mathcal{G}$ の universal enveloping algebra, $\mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ をその中で dilation $\delta_t(x) = t^m x, x \in \mathcal{G}_j$

$t > 0$ に関して homogeneous degree m のものを表わすとする。この時次の結果が成り立つ。

Theorem (Helffer & Nourigat, 1979)

$P \in \mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ i.e. $P = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha X^\alpha$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$, $X^\alpha = X_{\alpha_1} \cdots X_{\alpha_n}$, $X_{\alpha_i} \in \mathcal{G}_1$ に対し, 次の3条件は同値である。

(1) P は準楕円性を持つ。

(2) $\forall \pi \in \hat{G} \setminus \{0\}$, $\pi(P)$ は空間 $\mathcal{S}_\pi$ で単射である。

但し $\mathcal{S}_\pi$ は π の C^∞ -vector 全体 i.e. $\mathcal{S}_\pi = \{u \in \mathcal{H}_\pi : \pi(g)u : g \mapsto \mathcal{H}_\pi^{C^\infty}\}$ $\downarrow \mathcal{G}$

(3) $\forall Q \in \mathcal{U}_m(\mathcal{G})$, $\exists C_Q$ s.t.

$$\|\pi(Q)u\|^2 \leq C_Q \|\pi(P)u\|^2 \quad \forall u \in \mathcal{S}_\pi, \forall \pi \in \hat{G}.$$

ここで次の事に注意しておく, $Xf(x) = \frac{d}{dt} f(xe^{tx})|_{t=0}$, $f \in C^\infty(\mathcal{G})$

$\pi(X)f = \frac{d}{dt} \pi(e^{tx})f|_{t=0}$, $f \in \mathcal{S}_\pi$, $\mathcal{H}_\pi$ は π に付随する Hilbert space.

Remark 1. $\{X_j\}_{1 \leq j \leq p}$ を $\mathcal{G}_1$ の base とした時, Hörmander (1967) により, $L = \sum_{j=1}^p X_j^2$ は準楕円性を持つことがわかってゐるが, この事は上の定理からもうすぐ分かる。実際, $u \in \mathcal{S}_\pi$ に対し,

$$-(\pi(L)u, u) = \sum_{j=1}^p \|\pi(X_j)u\|^2$$

だから, $\pi(L)u = 0$ より $\pi(X_j)u = 0$ が従う。すると,

$$X_j(\pi g u, u) = (\pi g \pi(X_j)u, u) = 0 \quad \text{より}$$

$(\pi g u, u)$ は g の関数として定数, よって

$$(\pi g u, u) = (\pi u, u) = \|u\|^2 \quad \forall g \in \mathcal{G}.$$

従って, $\pi g u \equiv u$, 故に $u = 0$ 。

Remark 2 G を 1 次 Heisenberg 群, 即ち $\mathcal{H}_1(\mathcal{G})$ の生成元は

$$X = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{1}{2}y \frac{\partial}{\partial z}, \quad Y = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2}x \frac{\partial}{\partial z}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \cong G. \text{ とする.}$$

$$L = X^2 + Y^2 + \alpha [X, Y], \quad \alpha \in \mathbb{C} \text{ を考える. } ([X, Y] = \frac{\partial}{\partial z} \text{ である.})$$

$L \in \mathcal{U}_2(\mathcal{G})$ であるから, 上の定理が適用出来る. Heisenberg 群の既約ユニタリ表現を Schrödinger 表示すれば, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ に対して

$$\pi_\lambda(L) = \partial_s^2 - s^2 \lambda^2 + i\alpha \lambda, \quad \mathcal{H}_{\pi_\lambda} = L^2(\mathbb{R}_s), \quad \mathcal{S}_{\pi_\lambda} = \mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ (Schwartz)}$$

の急減少関数空間. となるから, Hermite 作用素 $-\partial_s^2 + s^2$ の固有値が $(2n+1)$, $n=0,1,2,\dots$ である事を使えば, 結局,

$$\text{『 } L \text{ が準楕円性をもつ } \Leftrightarrow \alpha \notin \{ \pm(2n+1), n=0,1,2,\dots \} \text{ 』}$$

である事がわかる. (有限次元既約ユニタリ表現については, 定理の条件は今は α に対してのみたされている.) この結果は, 1970 年の Grushin の結果に対応するものである.

Remark 3 一般には, 定理の (2) の条件を具体的に書き下すことは容易ではない.

次に一般の作用素の場合を考えよう. $L(\Omega)$ を Ω 上 smooth 実ベクトル場全体とする. 今 $\{X_j\}_{1 \leq j \leq p}$ は $(CH)_r$ をみたしていると仮定し, $\mathcal{G}$ を graded stratified Lie algebra で step 数 r のもので

$$\exists \lambda: \mathcal{G} \rightarrow L(\Omega) \text{ linear s.t. } \lambda(Y_j) = X_j \quad 1 \leq j \leq p$$

partial homomorphism of rank r : i.e. $\lambda([g_j, g_k]) = [\lambda(g_j), \lambda(g_k)], g_j \in \mathcal{G}_j, g_k \in \mathcal{G}_k,$

$j+k \leq r$ となるものが存在すると仮定する. ここで Y_j は $\mathcal{G}_j$ の base である. [Lifting Theorem によれば少なくとも 1 つ存在する.]

この時 $P = \sum_{|\alpha| \leq m} \omega_\alpha(x) X^\alpha$ なる形 ($\omega_\alpha \in C^\infty(\Omega)$) の作用素に対し,
 $P_{x_0} = \sum_{|\alpha| \leq m} \omega_\alpha(x_0) Y^\alpha \in \mathcal{U}_m(\mathcal{G})$ とおく。さすれば、問題は、 $\hat{G}$ の
 部分集合 Γ_{x_0} で、次の性質を持つものを特徴付ける事である。

$\square \forall \pi \in \Gamma_{x_0} \pi(P_{x_0})$ が単射 $\Leftrightarrow P$ が x_0 の近傍で準楕円性を持つ。
 実際、Helffer-Nourrigat は 1985 年に出版された本の中で Γ_{x_0} の候補
 者を記述し、いくつかの場合に上の性質をもつことを示した。

$\mathcal{G}^*$ を $\mathcal{G}$ 上の linear functional 全体, $\delta_t^*: \mathcal{G}^* \rightarrow \mathcal{G}^*, \lambda_x^*: T_x^*\Omega \rightarrow \mathcal{G}^*$
 をそれぞれ δ_t, λ_x の transpose とする。Kirillov Theory によれば
 $\mathcal{G}^* \subset \hat{G}$ とみなせる。即ち、 $\ell \in \mathcal{G}^*, B_\ell(x, y) = \ell([x, y])$, $\mathcal{H}$ を
 B_ℓ に関して maximal isotropic subalgebra of $\mathcal{G}$ とすれば、

$$\chi: e^a \mapsto e^{i\langle \ell, a \rangle} : V = \exp \mathcal{H} \text{ 上のスカラー-unitary 表現}$$

$\pi_\ell = \pi(\ell, \mathcal{H})$ は χ から誘導される G 上のユニタリ表現と
 すれば、 π_ℓ は既約である。この意味で Γ_{x_0} を次の様に定義する。

定義

$$\Gamma_{x_0} = \left\{ \ell \in \mathcal{G}^* : \exists (t_n, x_n, \xi_n) \in \mathbb{R}^+ \times T^*\Omega \text{ s.t.} \right.$$

$$(t_n, x_n) \rightarrow (0, x_0) \text{ as } n \rightarrow \infty$$

$$\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_{t_n}^* \lambda_{x_n}^* \xi_n \quad \left. \right\}$$

P の準楕円性を示すには、超局所解析レベルで $T^*\Omega$ の精細な
 単位分解を用いて、 X_j を $\pi_\ell(X_j)$ で近似するという手段を用い
 る。

Remark 4 $x \in \Omega \neq \emptyset$

$$V_k(x) = \lambda_x (g_1 \oplus \dots \oplus g_k), \quad V_0(x) = 0.$$

$$H_k(x) = g_k \cap \lambda_x^{-1}(V_{k-1}(x))$$

$$H(x) = \bigoplus_{k=1}^r H_k(x)$$

$$H(x)^\perp = \{ \ell \in g^*, \ell(H(x)) = 0 \} \quad \text{とおけば,}$$

一般に $H(x)^\perp \subset P_x$ だが, もし $\dim V_k(x)$ が locally constant, $k=1, \dots, r$ ならば $P_x = H(x)^\perp$ である.

Remark 5 $1 \leq r \leq 2$ の場合は上の特徴付けは正しい.

§3 初期値問題

$P = D_t^m + \sum_{j=1}^m A_j D_t^{m-j}$, $D_t = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial t}$, $A_j(x, D_x) \mathbb{R}^n$ 上 j 階微分作用素.
に対して, 次の初期値問題を考える.

$$(C.P) \quad \begin{cases} Pu = f(x, t) & \text{in } U \ni (0, 0) \\ \partial_t^j u(x, 0) = g_j(x) & 0 \leq j \leq m-1, \quad U \cap \{t=0\} = \Omega \end{cases}$$

この時 (C.P) が原点 $(0, 0)$ で C^∞ -well-posed であるとは, 任意の $f(x, t) \in C^\infty(U)$, 任意の $g_j(x) \in C^\infty(\Omega)$ に対して, ある原点の近傍 D が存在して,

$$\begin{cases} Pu = f & \text{in } D \\ \partial_t^j u|_{t=0} = g_j & \text{on } D \cap \{t=0\} \end{cases}$$

の解 $u(x, t) \in C^\infty(D \cap \{t \geq 0\})$ が一意に存在する時を言う.

まず中零リ一群上の話を始めよう.

Theorem 1 $\mathcal{G}$ を graded stratified Lie algebra, $A_j \in \mathcal{U}_j(\mathcal{G})$ とする.
 この時 (C.P) が C^∞ -well-posed なるは, $\forall \pi \in \hat{G} \setminus \{0\}, \forall \zeta \in \mathbb{C}$ st.
 $\text{Im} \zeta < 0$ に対して.

$$P_{\zeta, \pi} = \zeta^m + \sum_{j=1}^m \pi(A_j) \zeta^{m-j}$$

が δ_π で単射でなければならぬ.

Proof) 結論を否定して, $\exists \pi \in \hat{G} \setminus \{0\}, \exists \text{Re}(\zeta) > 0$ st.

$$\ker P_{\zeta, \pi} \neq \{0\}$$

と仮定する. $v \in \ker P_{\zeta, \pi} \setminus \{0\}$ に対して.

$$u(g, t) = (\pi_g v, v) e^{it\zeta}$$

とおけば $Pu(g, t) = (\pi_g P_{\zeta, \pi} v, v) = 0$ をみたす.

一方 C^∞ -well-posedness と Banach の closed graph Theorem により, ある原点の近傍 D_0 が存在して, 任意のコンパクト部分集合 $K \subset D_0$ に対し, ある定数 C_K が存在して, 次の不等式が成り立つ.

$$\sup_K |u(g, t)| \leq C \sum_{j=0}^{m-1} |(\partial_t^j u)(\alpha, 0)|_\ell \quad \text{for } \forall u \in C^\infty(D_0) \text{ st.}$$

$Pu = 0$, 但し $\|\cdot\|_\ell$ は $C^\ell(\mathcal{G})$ のノルムを表わす.

次に $\rho > 0$ をパラメータとして, $u_\rho(g, t) = u \circ \delta_\rho$ を代入すれば,

P の同次性より $\delta_\rho(P) = \rho^m P$, $\delta_\rho(e) = e$ である.

$\exists \mu > 0 \exists N = N(\mu)$ に対して

$$e^{\mu \rho^N t} |(\pi_e v, v)| \leq C \rho^N$$

が任意の $\rho > 0$ に対して成立する. 故に $(\pi_e v, v) = 0 = \|v\|^2$ となり

v の選定方に矛盾する. Q.E.D.

以下簡単の為に2階の場合のみを考えよう。すぐわかることは、一般に定理1の逆は不成立であることである。実際

Example 1 G を Remark 2 で述べた Heisenberg 群とし、

$$P = -\partial_t^2 + 2X\partial_t + Y^2 + \alpha[X, Y], \quad \alpha \in \mathbb{C}.$$

とすれば、これに対する (C.P) が C^∞ -well-posed になるのは、 $\alpha=0$ しかもうの時に限ることは簡単な形算からすぐわかる。又、 α が何であっても、任意の無限次元既約ユニタリ表現と、任意の $\lambda \in \mathbb{C}$ s.t. $\text{Im} \lambda < 0$ に対して $P_{\lambda, \pi}$ は δ_π で単射であることも容易に知れる。従って、 $\alpha \neq 0$ の時は定理1の必要条件が成り立つにもかかわらず、 P に対する (C.P) は C^∞ -well-posed にならないことになる。この点は準楕円性との大きな違いであり、似たような状況は、局所可解性の研究においても現われる。

次に2次の形の作用素を考えよう。

$$(3.1) \quad P = -\partial_t^2 + \sum_{j=1}^p X_j^2 + T, \quad T \text{ は 1 階作用素}$$

まず $\{X_j\}$ が graded stratified Lie group G の $\mathcal{G}_1$ の basis の場合、

Theorem 2 (3.1) において $\{X_j\}_{1 \leq j \leq p}$ は $\mathcal{G}_1$ の basis, $T \in \mathcal{U}(\mathcal{G})$ とし、

P に対する (C.P) が C^∞ -well-posed なるは、 $T \in \mathcal{U}_2(\mathcal{G}) \cup \mathcal{U}_1(\mathcal{G})$ でなければならぬ。

証明は定理1と同様に、結論を否定した時、Apriori評価を破る関数列を構成する事による。その際任意の $\pi \in \hat{G} \setminus \{0\}$ に対して $\{\sum_{j=1}^p \pi(X_j)^2\}$ が discrete spectrum のみを持つ事が効いてくる。

γ で低階 T として、次の形のものを考えよう。

$$(3.2) \quad T = \sqrt{-1} \sum_{i,j=1}^p C_{ij} [X_i, X_j]$$

== で、 $C = (C_{ij}) = b + \sqrt{-1}a$, a, b は実 skew-symmetric 行列。

Theorem 3 $\{X_j\}_{1 \leq j \leq p}$ は $\mathfrak{g}_1$ の basis, T は (3.2) の形, C は定数行列,

この時、 $P: (3.1)$ に対する (C, P) が C^∞ -well-posed なるは

$$a \in S = \{ \text{実 skew-symmetric } p \times p \text{ 行列 } (S_{jk}) : \sum S_{jk} [X_j, X_k] = 0 \}$$

$$\text{かつ} \quad \sup_{\substack{\|P\|_{tr} \leq 1 \\ P \in S^\perp}} |\text{tr}(b \cdot P)| \leq 1$$

但し、 $S^\perp$ は実 skew-symmetric $p \times p$ 行列の空間における内積: $-\text{tr}(x \cdot y)$

に関する S の直交補空間をあらわす。但し tr は H^2 -ス, $\|\cdot\|_{tr}$ は H^2 -norm をあらわす。

$$\text{逆に} \quad a \in S \quad \text{かつ} \quad \sup_{\substack{\|P\|_{tr} \leq 1 \\ P \in S^\perp}} |\text{tr}(b \cdot P)| < 1$$

なるは (C, P) は C^∞ -well-posed である。

Remark 6 準楕円性に関する Rothschild-Stein の結果と比べてみ

ると、低階項 T に現われる係数 C の虚部に条件が付く所が異

なるだけである。

次に一般の場合に、十分性の方を考えてみよう。(3.1)の P に対し

Conjecture $\{X_j\}_{1 \leq j \leq p}$ は $(CH)_r$ をみたすとする。§2 の記号で

$\forall \lambda \in \Gamma_0, \forall \zeta \in \mathbb{C} \text{ st } \text{Im} \zeta < 0 \wedge \zeta = 0$ に対して $\mathcal{P}_{\zeta, \pi_k}$ が $\mathcal{S}_{\pi_k}$ で単射
なるは、 (C, P) は原点の近傍で C^∞ -well-posed である。

実際いくつかの場合には正しいことがわかる。

この予想の subset 版として次の事は証明出来る。

Theorem 4 $\{X_j\}_{1 \leq j \leq p}$ は $(CH)_r$ を満たし (3.1), (3.2) で定義される P を考える。さらに係数行列 $C(x) = b(x) + A(x)$ について次を仮定する。

$$1) \quad A(x) \in S \text{ if } x \in \Sigma = \{x : \exists \xi \in \mathbb{R}^n \text{ s.t. } \sigma(X_j)(x, \xi) = 0, 1 \leq j \leq p\}$$

かつ $\exists \varepsilon > 0$ s.t. 各点 x で

$$2) \quad \sup_{\substack{\|P\|_{tr} \leq 1 \\ P \in S^\perp}} |\text{tr}(b(x) \cdot P)| \leq 1 - \varepsilon$$

但し、 S は Free Nilpotent Lie Algebra $\mathcal{F}_{r,p}$ の generator $\{Y_j\}_{1 \leq j \leq p}$ に対して

$$S = \{ \text{実 skew-symmetric } (S_{jk}) : \sum S_{jk} [Y_j, Y_k] = 0 \}$$

で決まる部分空間である。この時 P に対する (C, P) は局所的に C^∞ -well-posed である。

この定理と予想との違いの意味する所を説明しよう。

Example 2 $X_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $X_2 = x^k \frac{\partial}{\partial y}$ $k \in \mathbb{N}$ に対して

$$P = -\partial_t^2 + X_1^2 + X_2^2 + i\alpha(x, y) [X_1, X_2] \text{ on } \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_{xy}^2$$

但し、 $\alpha \in C^\infty$ real-valued. とする。まず定理4によれば、 P に対する (C, P) は、 $|\alpha(x, y)| \leq 1 - \varepsilon$ なる C^∞ -well-posed である ($\exists \varepsilon > 0$)。一方 k が奇数の時、定理1を使えば $|\alpha(x, y)| \leq 1$ が必要条件として得られる。しかし k が偶数の時は必要条件としては、

$$|\alpha(x, y)| \leq \frac{k+1}{k}$$

しか得られず、実際 $|\alpha(x, y)| \leq \frac{k+1}{k} - \varepsilon$ なる C^∞ -well-posed になる事は

予想の段階で始めて示されるのである。

定理4の証明はエネルギー不等式を示すことによる。その際、 $\sum_{j=1}^p \|x_j u\|^2 \leq C \{ \operatorname{Re}(Qu, u) + \|u\|^2 \}$, $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, type の評価を、超局所解析を用いて、 Q を巾零リ-群上の作用素 $\tilde{Q}$ で近似して、 $\tilde{Q}$ についての類似の評価式から元の評価式を出す方法で行なう。

Remark 7 Rothschild-Stein では基本解を構成する方法により、

$$\sum_{j=1}^p \|x_j u\|^2 \leq C \{ |(Qu, u)| + \|u\|^2 \}, u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$$

という形の不等式を導いているが、この方法は今の場合適用出来ないと思われる。

参考文献

- L. Hörmander, Hypoelliptic second order -----, Acta Math. 119 (1967), 147-171
 L.P. Rothschild - E.M. Stein, Hypoelliptic ----- nilpotent groups, Acta Math. 139 (1977), 248-315
 B. Helffer - J. Nourrigat, Caractérisation des opérateurs -----, Comm. P.D.Eg. 4 (1979), 899-958
 B. Helffer - J. Nourrigat, Hypoellipticité Maximale -----, 1985, Birkhäuser.
 T. Ōkaji, Equations of evolution ---- I, J. Math. Kyoto Univ. 32 (1992), 749-761
 T. Ōkaji, Equations of evolution ----- II, J. Math. Kyoto Univ. 33 (1993),