

Riemann 多様体上の乱歩

名大 理 砂田 利一

M を C^∞ -多様体, $g=(g_{ij})$ をその上の固定された完備な Riemann 計量とする。正数 $a > 0$ に対し, $\Delta_{a,x}$ を $x \in M$ から出発する歩幅 a の乱歩の全体とする。精確に言えば, $R_+ = \{t \in \mathbb{R} \text{ (実数)}; t \geq 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ ($I_k = [k-1, k)$) と置く時,

$$\Delta_{a,x} = \{w: R_+ \rightarrow M; \text{連続 } w(0)=x, \text{ 各 } k \text{ に対して } w|_{I_k} \text{ は速さ } a \text{ の測地線}\}$$

と定義する。すなわち x から出発した粒子が距離 a だけ測地線に沿って進み, ここで勝手に向きを変え再び a だけ進むということをくりかえす, 粒子の運動過程のモデルである。

ここでは, 次の3つの問題について考える。

問題 1. $\Delta_{a,x}$, あるいは $\Delta_a = \bigcup_{x \in M} \Delta_{a,x}$ に幾何学的に自然な測度をいれること。

問題 2. M が compact の時, 乱歩のエルゴード性を論ずること。

問題 3. Brown 運動への近似を論ずること。

問題 1, 2, 3 に関連して 作用素 $L_a: C^0(M) \rightarrow C^0(M)$ を次の様に定義しておく。

$$(L_a f)(x) = \int_{S_x} f(\exp a v) dS_x,$$

ここで $S_x \subset T_x M$ は M の tangent unit sphere bundle SM の x 上の fiber, dS_x はその上の標準的な volume element ($\int_{S_x} dS_x = 1$ としておく), $\exp: TM \rightarrow M$ は (M, g) の exponential 写像である。これは (M, g) が Euclid 空間の場合には, 通常半径 a の球面上の平均化をあじわし, また乱歩を M に値をとる Markov 連鎖と考えた時には, いわゆる推移作用素と呼ばれるものにあたる。

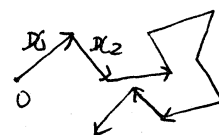
§ 1. 問題 1

(M, g) が Euclid 空間の時, $\Omega_{a,x}$ には次の様にして測度を導入するのが自然である。 ($x=0$ 原点としておく。)

すなわち, n 回目の方向 vector (長さ 1) を x_n とすると

$$w(n) = a(x_1 + \cdots + x_n)$$

となり, それぞれの vector $\{x_n\}$ は $\Omega_{a,0}$ 上の独立な確率変数と思える。



よって, $\Omega_{a,0}$ を sphere の無限積 $S_x \times S_x \times \cdots$ と同一視し,

各 S_x に自然な確率測度をいれておき、その積測度により $\Omega_{a,x}$ に確率測度がはれる。

一般の場合にも、この考え方が適用される。すなわち $\Omega_{a,x}$ と $S_x^\infty (= S_x \times \dots)$ を次の様に同一視しよう：

$$\tau_x : \Omega_{a,x} \longrightarrow S_x^\infty$$

を $\tau_x(w)_{i+1} = \mathcal{P}_{S_i(w)}(\frac{1}{a} \dot{w}(i+1))$ により定義する。ここで $\tau_x(w)_{i+1}$ は $\tau_x(w) \in S_x^\infty$ のオ $i+1$ 番目 ($i \geq 0$) の成分をあしわし、 $S_i : \Omega_{a,x} \rightarrow \Omega_{a,x}(i)$ ($\Omega_{a,x}(i)$ は i 回目で停止する乱歩の全体) は制限、 $\mathcal{P}_{S_i(w)}$ は $S_i(w)$ なる区分的に可微分な曲線に沿う $w(i)$ から $w(0)=x$ までの平行移動：

$$\mathcal{P}_{S_i(w)} : T_{w(i)}M \longrightarrow T_{w(0)}M$$

をあしわす。また $\dot{w}(i+1)$ は、 $w|I_{i+1}$ なる測地線の $w(i)$ における速度 vector $\in T_{w(i)}M$ をあしわしている。

(補題) τ_x は 1対1 onto である。

証明は、上の手続きの逆を示す写像を構成すればよい。

勿論 $S_x^\infty = S_x \times S_x \times \dots$ には確率測度がおはれるから τ_x により、 $\Omega_{a,x}$ にも測度 P_x がはれる。また $\Omega_a = \bigcup_{x \in M} \Omega_{a,x}$ と $S^\infty M = \bigcup_{x \in M} S_x^\infty$ (sphere の無限積 bundle) と同一視すれば $S^\infty M$ には M の canonical measure と S_x^∞ の measure による fiber product measure がはれていふから、 Ω_a にも measure P がはれる。

後のためにいくつかの記号を導入しておこう。

$$X_k: \Omega_a \rightarrow M, X_k(\omega) = \omega(k) \quad (k \text{ 番目の足跡})$$

$\mathcal{B}(\Omega_a): \{X_k^{-1}(A)\} \quad A \in \mathcal{B}(M) \quad (M \text{ の Borel 集合})$ で生成される Ω_a の完全加法族。

$$T: \Omega_a \rightarrow \Omega_a, T\omega(t) = \omega(t+1) \quad (\text{一歩前進})$$

次の定理は、前の様にして導入した $\Omega_{a,x}$ の確率測度に関して $(\Omega_{a,x}, P_x, T)$ が推移作用素として L_a をもつ、 M 上の Markov 連鎖であることを示す。

(定理1) $A \in \mathcal{B}(M)$ に対して、 $P_n(x, A)$ により、 x から出発した乱歩の n 番目の足跡が A の中にいる確率 $P_x(\omega; \omega(n) \in A)$ をあしわす時、

$$P_n(x, A) = L_a^n \chi_A(x)$$

(χ_A は A の定義関数)

証明には、次の2つの補題が必要である。

(補題2) (Markov 性) 任意の $\mu \in \Omega_{a,x}(k) \quad B \in \mathcal{B}(\Omega_a)$ に対して

$$P_x(T^{-k}B \mid S_k = \mu) = P_{\mu(k)}(B)$$

が成り立つ。ここで記号 $P(\cdot)$ は条件付確率をあしわす。

証明は 平行移動の直交性を利用する。

(補題3) $B \in \mathcal{B}(\Omega_a)$ に対して、 $x \mapsto P_x(B)$ は可測であり

$$P_x(T^{-1}B) = (L_a(P_x(B)))(x)$$

$$(証. \quad P_x(T^{-1}B) = \int_{S_x \ni v} P_x(T^{-1}B | S_x = v) dP_{x, S_x}(v) \quad (1)$$

$$= \int_{S_x \ni v} P_{v|u}(B) dS_x \quad (2)$$

$$= \int_{S_x \ni v} P_{\exp av}(B) dS_x$$

$$= L_a(P(B))(x)$$

ここで (1) の等号は一般の条件付確率の公式, (2) は上の補題からである。

定理1は補題3を利用して帰納的に証明される。

次に M が compact と仮定しよう。 $dM = \det(g_{ij})^{\frac{1}{2}} dx^1 \cdots dx^n$ を (M, g) の体積要素, $A \in \mathcal{B}(M)$ に対し $m(A) = \int_A dM$ とおく。

(定理2) T は $(\Omega_a, \mathcal{B}(\Omega_a), P)$ の保測変換である。すなわち $B \in \mathcal{B}(\Omega_a)$ に対して

$$P(T^{-1}B) = P(B)$$

が成り立つ。

(補題4) $L_a: C^0(M) \rightarrow C^0(M)$ は、拡張 $L_a: L^p(M) \rightarrow L^p(M)$ ($p \geq 1$ 整数) を有し、各 $f \in L^1(M)$ に対して

$$\int_M L_a f dM = \int_M f dM$$

(証. $\varphi_t: SM \rightarrow SM$ を測地的流れとする時

$$L_a = \int_{\text{fiber}} \varphi_a^* \pi^* \quad (\pi: SM \rightarrow M)$$

で、 φ_a は保測であることから補題を得る。

$$\begin{aligned} (\text{定理の証明}) \quad P(T^{-1}B) &= \int_{x \in M} P_x(T^{-1}B) dM(x) \\ &= \int_{x \in M} L_a(P(B))(x) dM(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{x \in M} P_x(B) dM(x) \\
 &= P(B) \quad (J)
 \end{aligned}$$

§2. 問題2

この § では, M は compact と仮定し, 簡単のため M の体積 $\int_M dM = m(M)$ は 1 としておく。

1 つの乱歩 $\omega \in \Omega_a$ がエルゴード的とは

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \left(\sum_{k=0}^{N-1} \chi_A(\omega(k)) \right) = m(A)$$

が任意の $A \in \mathcal{B}(M)$ に対して成り立つことである, と定義する。すなわち, 乱歩の足跡が A を訪問する平均回数が, 常に A の測度と一致する時エルゴード的であるという。また測度 P に関してほとんどの乱歩がエルゴード的である時, Ω_a はエルゴード的であるということにする。

(定理3) 次の命題は同値

- i) (抽象)力学系 (Ω_a, P, T) はエルゴード的
- ii) Ω_a はエルゴード的
- iii) $L_a: L^2(M) \rightarrow L^2(M)$ の固有値 1 に属する固有関数は a.e. 定数.

(注意) iii) は Markov 連鎖としてのエルゴード性である。

この定理の証明のためには次の補題が必要である。

(補題5) $((\bigcup^n \chi_{X_0^{-1}(A)}, \chi_{X_0^{-1}(B)}))_2 = (L_a^n \chi_A, \chi_B)_2$

ここで $A, B \in \beta(M)$, $U: L^2(\Omega_a) \rightarrow L^2(\Omega_a)$ は $Uf(w) = f(Tw)$ によって定義される等距離作用素, $(\cdot, \cdot)_2$ は $L^2(\Omega_a)$ の内積, $(\cdot, \cdot)_2$ は $L^2(M)$ の内積をあしなす。

証明は略する。

問題2に関連して次の予想をあげよう。 ($\dim M \geq 2$)

(予想) a を十分小さくすれば Ω_a はエルゴード的か?

これは非常にもっともふししいことものであるが、特別な場合にしか証明出来ていない。

(定理4) M が (局所) 対称空間の時、上の予想は正しい。

この証明は、 L_a が Laplacian Δ と可換なことを利用する。特に M が flat torus の時、任意の $a > 0$ に対して Ω_a はエルゴード的である。(もっと強く混合的)

§3. 問題3

ここでも (M, g) について §2 と同じ仮定をして置く。

$$\frac{\partial}{\partial t} - \frac{1}{2}\Delta$$

を熱作用素, $k_t(x, y)$ をその基本解, 作用素 K_t を

$$K_t f = \int_M k_t(x, y) f(y) dM(y)$$

により定義しよう。 K_t は M 上の Brown 運動の推移作用素と考えられる。問題3に対する解答として次の定理を得る。

(定理5) 任意の $f \in L^2(M)$ に対して

$$\left(L_{\sqrt{\frac{t}{N}}}\right)^N f \longrightarrow K_t f \quad (N \rightarrow \infty)$$

($t > 0$ $n = \dim M$) が成り立つ。

この定理は、次の補題による。

(補題6) $L^2(M)$ のある dense な部分空間で

$$\frac{1}{a^2} (L_a - I) \xrightarrow{w} \frac{1}{2n} \Delta \quad (a \rightarrow 0)$$

が成り立つ。

証明は略す。