

## 弱1完備多様体について

京大数理研 大沢健夫

$X$  を  $n$  次元複素多様体とし,  $\pi: B \rightarrow X$  を  $X$  上の正則ベクトル束とする。  $X$  と  $B$  が与えられたとき,  $C^\infty$  級  $(p, q)$  型  $B$  値の閉形式の空間を  $C^\infty$  級  $(p, q)$  型  $B$  値の完全形式でわった空間を考え, それを  $H^{p,q}(X, B)$  と書く。  $X$  がコンパクトでない場合,  $H^{p,q}(X, B)$  がどのような場合に有限次元ベクトル空間になるか調べることは興味深い問題である。筆者は中野によって予想されていた次の命題を証明した。 ' $X$  が弱1完備で  $B$  が  $X$  のあるコンパクト部分集合を除いて正であるような直線束ならば,  $q \geq 1$  なる  $q$  に対し,  $H^{p,q}(X, B)$  は有限次元である。'

講演の目的は上の命題の証明の概要を述べることであった。

### §1. 記号

$X$  を連結でパラコンパクトな  $n$  次元複素多

様体,  $\pi: B \rightarrow X$  を  $X$  上の(正則)直線束とし,  $\{U_i\}$  を  $\pi^{-1}(U_i) \cong U_i \times \mathbb{C}$  なる  $X$  の座標近傍による被覆とする。  $\{U_i\}$  に関する  $B$  の変換関数系を  $\{e_{ij}\}$  としたとき,  $X$  上の  $B$  値微分型式とは  $U_i$  上の微分型式の系  $\{\varphi_i\}$  であって  $U_i \cap U_j$  上で  $\varphi_i = e_{ij} \varphi_j$  をみたすものをいう。我々は  $C^{p,q}(X, B)$  で  $(p, q)$  型の  $C^\infty$  級  $B$  値微分型式の空間をあらわし,  $C_0^{p,q}(X, B)$  で台がコンパクトな  $C^{p,q}(X, B)$  の元全体をあらわすことにする。

$X$  のエルミート計量  $ds^2$  及び,  $B$  のファイバーに沿うエルミート計量  $\{a_i\}$  が与えられたとき,  $\varphi, \psi \in C^{p,q}(X, B)$  に対して

$$a_i \varphi_i \wedge \overline{* \psi_i} = \langle \varphi, \psi \rangle dv$$

によって  $\langle \varphi, \psi \rangle$  を定義する。ただし  $*$ ,  $dv$  はそれぞれ  $ds^2$  に関する星印作用素及び体積要素を示すものとする。このとき  $\langle \varphi, \psi \rangle$  は  $\varphi$  によらず、従って  $X$  上の関数であり、とくに  $\varphi = \psi$  のとき  $\langle \varphi, \varphi \rangle \geq 0$  が成立する。等号は  $\varphi = 0$  のときに限る。

$C^{p,q}(X, B)$  から  $C^{p,q+1}(X, B)$  への作用素  $\bar{\partial}$  を,  $(\bar{\partial}\varphi)_i = \bar{\partial}\varphi_i$  で定義する。  $X$  上の  $C^\infty$  級実数値関数  $\Psi$  に関し,  $L^{p,q}(X, B, \Psi)$  を

$$\int_X \langle \varphi, \varphi \rangle e^{-\Psi} dV < \infty \quad (1)$$

なる可測な  $(p, q)$  型  $B$  値形式  $\varphi$  の空間とする。  
(1) の左辺を  $(\varphi, \varphi)_\Psi$  と書く。  $(\varphi, \varphi)_\Psi$  も同様に定義する。

一般に, 二つのヒルベルト空間  $H_1, H_2$  及び稠密な定義域をもつ閉線型作用素  $T: H_1 \rightarrow H_2$  に対し,  $T$  の定義域, 値域, 核をそれぞれ  $D_T, R_T, N_T$  で示し,  $T$  の共役作用素を  $T^*$  で示す。とくに,  $H_1 = L^{p,q-1}(X, B, \Psi)$ ,  $H_2 = L^{p,q}(X, B, \Psi)$  かつ  $T$  が  $\bar{\partial}$  の閉拡張であるとき,  $D_{\bar{\partial}} = D_{\bar{\partial}}^{p,q-1}$ ,  $R_{\bar{\partial}} = R_{\bar{\partial}}^{p,q}$ ,  $N_{\bar{\partial}} = N_{\bar{\partial}}^{p,q-1}$  と書く。  $R_{\bar{\partial}}^{p,0}$  は 0 とする。  $D_{\bar{\partial}}^{p,q*}$ ,  $R_{\bar{\partial}}^{p,q-1*}$ ,  $N_{\bar{\partial}}^{p,q*}$  も同様に定義する。

定義 (1.1)

$$H^{p,q}(X, B, \Psi) = N_{\bar{\partial}}^{p,q} / \overline{R_{\bar{\partial}}^{p,q}}$$

ただし  $\overline{R_{\Psi}^{p,q}}$  は  $R_{\Psi}^{p,q}$  の  $L^{p,q}(X, B, \Psi)$  内での閉包をあらわす.  $L^{p,q}(X, B, 0)$ ,  $H^{p,q}(X, B, 0)$  を簡単に  $L^{p,q}(X, B)$ ,  $H^{p,q}(X, B)$  で示す.

## §2. 弱い意味の有限性定理

本節では弱1完備多様体  $X$  と  $X$  上の直線束  $B$  で, あるコンパクト部分集合の外で正になるものに対し,  $X$  上のエルミート計量  $da^2$  と  $B$  のファイバーに沿う(エルミート)計量  $\{a_i\}$  を適当にえらべば  $p+q > n$  なる  $p, q$  に対し,  $H^{p,q}(X, B)$  が有限次元ベクトル空間になることを示す.

定義 (2.1) 複素多様体  $X$  が弱1完備であるとは,  $X$  上の実数値  $C^\infty$  級関数  $\Psi$  で次の二条件を満足するものが存在することとする.

1. (多重劣調和), 任意の点のまわりの局所座標  $(z_1, \dots, z_n)$  に関して,

$$\left( \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z_i^\alpha \partial \bar{z}_i^\beta} \right)_{1 \leq \alpha, \beta \leq n} \geq 0$$

2. (汲み尽し), 任意の実数  $C$  に対し

$$X_c := \{x; \Psi(x) < c\} \subset X.$$

ただし  $X_c \subset X$  は  $X_c$  の  $X$  内での閉包がコンパクトであることとする。1. 2. の性質を持つ関数を ( $X$  の) 汲み尽し関数と言うことにする。次の命題の証明は容易である。

命題 (2. 2)  $X$  が弱 1 完備ならば  $X$  の任意のコンパクト部分集合  $K$  に対して次のような汲み尽し関数  $\Psi$  が存在する, すなわち

$$\text{Int} \{x; \Psi(x) = 0\} \supset K$$

かつ

$\partial \{x; \Psi(x) = 0\}$  はなめらかな実  $2n-1$  次元多様体。

ただし,  $\text{Int} \{ \}$  は  $\{ \}$  の内点を示し,  $\partial \{ \}$  は  $\{ \}$  の  $X$  における境界を示すものとする。

定義 (2. 3) 直線束  $\pi: B \rightarrow X$  が  $X$  の部分集合  $Y$  上で正であるとは,  $X$  の座標近傍による開被覆  $\{U_i\}$  と  $B$  のファイバーに沿う計量  $\{a_i\}$  で, 各  $U_i \cap Y$  内の点で

$$\left( \frac{\partial^2 \log a_i^{-1}}{\partial z_i^\alpha \partial \bar{z}_i^\beta} \right)_{1 \leq \alpha, \beta \leq n} > 0$$

をみたすようなものが存在することとする。

以後、 $X$  は常に弱 1 完備とし、 $\pi: B \rightarrow X$  は  $X$  のコンパクト部分集合  $K$  の外で正であるとする。また、 $X$  の汲み尽し関数  $\Psi$  で  $K \subset \text{Int} \{x; \Psi(x) = 0\}$ , かつ  $\partial \{x; \Psi(x) = 0\}$  がなめらかになるものを固定する。便宜上、 $\text{Int} \{x; \Psi(x) = 0\}$  を  $X_0$  と書くことにする。

補題 (2.4)  $\varphi_1, \dots, \varphi_k$  を有限個の可測で局所二乗可積分な  $B$  値形式とする。このとき  $X$  上のエルミート計量  $d\sigma^2$ ,  $B$  のファイバーに沿う計量  $\{a_i\}$  及び  $X_0$  のコンパクト部分集合  $K_1$  で次の 1), 2), 3) をみたすものが存在する。

1)  $d\sigma^2$  は完備である。

2)  $X - K_1$  上で

$$d\sigma^2 = \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 \log a_i^{-1}}{\partial z_i^\alpha \partial \bar{z}_i^\beta} (dz_i^\alpha, d\bar{z}_i^\beta)$$

3)  $(\varphi_i, \varphi_i)_0 < \infty, 1 \leq i \leq k$ .

証明)  $B$  に対する仮定より, 2) をみた

す  $ds_0^2$ ,  $\{a_i^0\}$ ,  $K_1$  が存在する。そこで、  
 正值単調増大凸関数  $\lambda$  に対して

$$a_i = a_i^0 e^{-\lambda(\Psi)}$$

$X - K_1$  上で

$$ds^2 = \sum_{\alpha, \beta} \frac{\partial^2 \log a_i^{-1}}{\partial z_i^\alpha \partial \bar{z}_i^\beta} (dz_i^\alpha, d\bar{z}_i^\beta)$$

$K_1$  上で

$$ds^2 = ds_0^2$$

とおく。[4]と同様にして  $\lambda$  を適当にとれば  $ds^2$ ,  $\{a_i\}$ ,  $K_1$  が 1), 2), 3) をみたすことがいえる。 g. e. d.

定理 (2.5)  $ds^2$ ,  $\{a_i\}$ ,  $K_1$  が補題 (2.4) の条件 1), 2) をみたすとき  $p+q > n$  なら

(a)  $R_{\bar{\partial}}^{p,q}$  は閉.

(b)  $\dim_{\mathbb{C}} H^{p,q}(X, B) < \infty$ .

略証) 我々は次の補題 ([1], 定理 1.1.3) を用いる。

補題 (2.6)  $H_i$ ,  $i=1, 2, 3$  を三つのヒルベルト空間とし、 $T: H_1 \rightarrow H_2$

又び  $S: H_2 \longrightarrow H_3$  を稠密な定義域をもつ閉線型作用素で  $ST=0$  をみたすものとする。このとき次の条件をみたす任意の列  $\{\varphi_\nu\}$  が収束部分列をもつならば  $R_T$  は閉であり  $N_S/R_T$  は有限次元ベクトル空間になる。

$$\varphi_\nu \in H_2 \cap D_S \cap D_{T^*},$$

$$\|\varphi_\nu\|_{H_2} \leq 1,$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|S\varphi_\nu\|_{H_3} = 0,$$

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \|T^*\varphi_\nu|_{H_1} = 0.$$

この補題をあてはめるには次の評価式が成り立つことを使う。すなわち  $p+q > n$  ならば  $D_{\frac{p}{2}}^{p,q} \cap D_{\frac{q}{2}}^{p,q*}$  内の任意の  $\varphi$  に対し

$$\int_{X-K_2} \langle \varphi, \varphi \rangle d\nu \leq C \left\{ \|\bar{\partial}\varphi\|^2 + \|\bar{\partial}^*\varphi\|^2 + \int_{K_2} \langle \varphi, \varphi \rangle d\nu \right\}$$

ただし  $C$  は定数であり、 $K_2 \subset X_0$  とする。

### §3. 基本不等式

以後、 $d\varphi$  と  $\{a_i\}$  は補題(2.4)の条件1), 2) をみたすものとする。記号を用意しよう。



$\varphi, \psi \in L^{p,q}(X, B, \nu_\Psi)$  に対して,  
 $(\varphi, \psi)_\nu = (\varphi, \psi)_{\nu_\Psi}$ , 及び  
 $\|\varphi\|_\nu = (\varphi, \varphi)_{\nu_\Psi}^{\frac{1}{2}}$

とおく. ( $\nu$  は 0 以上の自然数).  $(\ , \ )_\nu$   
 に関する  $\bar{\partial}$  の形式的共役を  $\partial_\nu$  と書き,

$$\square_\nu = \bar{\partial}\partial_\nu + \partial_\nu\bar{\partial}$$

とおく.  $d$  が完備だから  $\partial_\nu$  の閉拡張は  $\bar{\partial}$   
 の共役に等しい. ([5], 定理 1.1) 微分幾何のよく知  
 られた公式を次の形で用いる.

補題 (3.1)  $X - K_1$  上で,

$$\square_\nu - *^{-1}\square_\nu* = e(\lambda_\nu)\wedge - \wedge e(\lambda_\nu)$$

ただし,  $\lambda_\nu = L + \nu\sqrt{-1}\partial\bar{\partial}\Psi$ .

補題 (3.1) を用いることにより次の基  
 本不等式を得る. (c.f. [3])

補題 (3.2) ある定数  $C$  とコンパクト  
 集合  $K_2$  で  $K_1 \subset K_2 \subset X_0$  をみたすもの  
 があって,

$$a) \quad \varphi \in D_{\bar{\partial}}^{p,q} \cap D_{\partial_0}^{p,q}, \quad p+q \geq n$$

ならば,

$$\int_{X-K_2} \langle \varphi, \varphi \rangle dv$$

$$\leq C \left( \|\bar{\partial}\varphi\|^2 + \|\partial_0\varphi\|^2 + \int_{K_2} \langle \varphi, \varphi \rangle dv \right)$$

b) 自然数  $\nu$  に対し,  $\varphi \in D_{\bar{\partial}}^{n, q} \cap D_{\partial_0}^{n, q}$ ,  
 $q \geq 1$  ならば,

$$\int_{X-K_2} \langle \varphi, \varphi \rangle e^{\nu\psi} dv$$

$$\leq C \left( \|\bar{\partial}\varphi\|_{\nu}^2 + \|\partial_0\varphi\|_{\nu}^2 + \int_{K_2} \langle \varphi, \varphi \rangle dv \right).$$

#### §4. 主定理の証明.

$dn^2$ ,  $\{a_i\}$  は §3 の通りとし、これらを  $X_0$  に制限することにより  $L^{p, q}(X_0, B)$  を定義する。 $\bar{\partial}$  を  $L^{p, q-1}(X_0, B)$  から  $L^{p, q}(X_0, B)$  への作用素とみたときの共役を  $\bar{\partial}^*$  とし,

$$\mathcal{H}^{p, q}(X_0, B) = \left\{ \psi; \psi \in L^{p, q}(X_0, B), \bar{\partial}\psi = \bar{\partial}^*\psi = 0 \right\}$$

とおく,

命題 (4. 1) 自然数  $\nu_0$  及び定数  $C_0$

が存在して,  $\nu \geq \nu_0$  なる自然数  $\nu$  に對し,

$$\|\varphi\|_\nu^2 \leq C_0 (\|\bar{\partial}\varphi\|_\nu^2 + \|\partial\varphi\|_\nu^2)$$

ただし,  $\varphi \in D_{\bar{\partial}}^{n,q} \cap D_{\partial}^{n,q}$ ,  $q \geq 1$ , かつ  $h \in \mathcal{H}^{n,q}(X_0, B)$  なる任意の  $h$  に対し

$$\int_{X_0} \langle \varphi, h \rangle d\nu = 0 \quad \text{なるものとする。}$$

定義 (4.2) 可測かつ任意のコンパクト集合上で可積分な  $B$  値  $(p, q)$  形式の空間を  $L_{loc}^{p,q}(X, B)$  とし,

$$H_{loc}^{p,q}(X, B)$$

$$= \{f; f \in L_{loc}^{p,q}(X, B), \bar{\partial}f = 0\} /$$

$$L_{loc}^{p,q}(X, B) \cap \{\bar{\partial}f; f \in L_{loc}^{p,q-1}(X, B)\}$$

とおく。

ドルボーの定理より, 自然な同型

$$H^{p,q}(X, B) \xrightarrow{\sim} H_{loc}^{p,q}(X, B)$$

が存在する。命題 (4.1) により次のことがいえる。

命題 (4.3)  $q \geq 1$  ならば, 自然な準同型

$\rho: H_{loc}^{n,g}(X, B) \longrightarrow H^{n,g}(X_0, B)$   
 は単射である。

定理 (4.4)  $g \geq 1$  ならば

$$\dim_{\mathbb{C}} H^{n,g}(X, B) < \infty$$

証明) 次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc}
 H_{loc}^{n,g}(X, B) & & \\
 \begin{array}{c} \xi \uparrow S \end{array} & \searrow \rho & \\
 H^{n,g}(X, B) & \xrightarrow{\rho'} & H^{n,g}(X_0, B|_{X_0}) \\
 \downarrow r & & \nearrow r' \\
 H^{n,g}(X_c, B|_{X_c}) & & 
 \end{array}$$

ただし、写像  $\rho, \rho', r', r$  は制限写像によりみちびかれるものとし、 $c$  は正数、かつ、 $H^{n,g}(X_c, B)$  を定義する  $X_c$  上の計量  $ds^2$  及び  $B|_{X_c}$  ( $B$  の  $X_c$  上への制限) のファイバーに沿う計量  $\{g_i\}$  は補題 (2.4) の 1), 2) をみたし、 $C^\infty(\overline{X_c})$  加群としての  $C^{p,g}(\overline{X_c}, B)$  の生成元 (有限個!) に対して (2.4) の 3) をみた

$$\rho' = r \circ r$$

$$\rho' = \rho \circ \xi$$

13

すようにとる。 $(C^\infty(\bar{X}_c))$ は境界でもなめらかな関数全体。 $C^{p,q}(\bar{X}_c, B)$ も同様)。

よって  $\rho$  が単射だから  $\rho'$  も単射、従って  $r$  も単射である。 $H^{n,q}(X_c, B)$  は有限次元だから  $H^{n,q}(X, B)$  も有限次元である。g.e.d.

定理 (4.5)  $\psi \in L^{n,q}(X_0, B)$  かつ  $\bar{\partial}\psi = 0$  ならば、任意の正数  $\varepsilon$  に対し、  
 $\bar{\partial}\varphi = 0$  なる  $\varphi \in L^{n,q}_{loc}(X, B)$  で

$$\int_{X_0} \langle \varphi - \psi, \varphi - \psi \rangle d\mu < \varepsilon$$

なるものが存在する。

定理 (4.6) 自然な準同型

$$\rho_d : H^{n,q}(X, B) \longrightarrow H^{n,q}(X_d, B)$$

は同型である。ただし  $q \geq 1$  かつ  $d > 0$  .

証明) 次の図式を考える。

$$\begin{array}{ccc} H^{n,q}(X, B) & \xrightarrow{\rho'} & H^{n,q}(X_0, B|_{X_0}) \\ \downarrow \rho_d & & \nearrow f'' \\ H^{n,q}(X_d, B|_{X_d}) & & \end{array}$$

定理(4.5)より  $\text{Im } \rho'$  は  $\text{Im } \rho''$  内で稠密であるが、 $H^{n, \bar{q}}(X_d, B|_{X_d})$  は有限次元だから  $\text{Im } \rho' = \text{Im } \rho''$  .  $\rho_d$  は単射だからこれは  $\rho_d$  が全射であることを意味する。よって  $\rho_d$  は同型である。  $\text{q. e. d.}$

## §5. 応用

定理(5.1) 弱1完備多様体  $X$  がコンパクト部分集合の補集合で正な直線束  $\pi: B \rightarrow X$  をもつならば、任意の  $c > 0$  に対して自然数  $N$  及び有理型写像

$$\psi: X_c \rightarrow \mathbb{P}^N$$

で、 $X_c$  に真に含まれるあるコンパクト解析的集合  $A$  をとれば

$$\psi|_{X_c - A}: X_c - A \rightarrow \mathbb{P}^N$$

が中へのうめこみであるようなものが存在する。

証明) 小平のうめこみ定理と同様. ([2])  
他に所謂 'contraction problem' への応用などがあるが割愛する。以上。

## 文献

[1] Hörmander, L.

$L^2$  estimates and existence theorems  
for the  $\bar{\partial}$  operator. Acta Math. 113,  
89-152 (1965)

[2] Kodaira, K.

On Kähler varieties of restricted type.  
Ann. Math. 60, 28-48 (1954)

[3] Nakano, S.

On the inverse of monoidal  
transformation. Publ. RIMS Kyoto  
Univ. 6, 483-502 (1970/71)

[4] —————

Vanishing theorems for weakly  
1-complete manifolds, II. Publ. RIMS,  
Kyoto Univ. 10, 101-110 (1974)

[5] Vesentini, E.

Lectures on Levi convexity of complex  
manifolds and cohomology vanishing  
theorems, Tata Inst. (1967)