

双曲型方程式の解の無限遠における挙動 について

北大 理 久保田 幸次
白 田 平

§ 1. 序

$R^n \times [0, \infty)$ で定義された強双曲型偏微分作用素

$$P[u] = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^m u + \sum_{\substack{|v|+j \leq m \\ j < m}} a_{v,j}(x,t) \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^v \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j u$$

($|v|+j = m$ のとき $a_{v,j}(x,t) = a_{v,j}$ 定数とする)

に関する初期値問題

$$P[u] = 0,$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j u(x,0) = 0 \quad (0 \leq j \leq m-2), \quad \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{m-1} u(x,0) = f(x)$$

の解が $t \rightarrow \infty$ のとき $u(x,t) \rightarrow 0$ となる状態には次の三種が考えられる。

[定義] 1) 極限振巾の原理: (適当に制限された範囲内の) 任意の f と任意の compact set $K \subset R^n$ に対して

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |u(x,t)| = 0, \quad \text{又は} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(K)} = 0$$

が成立する。

2) exponential decay : (適当に制限された範囲内の) 任意の f と任意の compact set $K \subset \mathbb{R}^n$ に対して定数 $\alpha > 0, C > 0$ が存在して

$$\sup_{x \in K} |u(x, t)| \leq C e^{-\alpha t}, \text{ また } \|u(\cdot, t)\|_{L^2(K)} \leq C e^{-\alpha t} \quad (t \rightarrow \infty)$$

が成立する。

3) diffusion of waves が存在しない : 定数 $C_1, C_2, C_3 \geq 0$ が存在して任意の $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ と

$$t > C_1 |x| + C_2 \sup_{y \in \text{supp } f} |y| + C_3$$

をみたす全ての (x, t) に対して常に $u(x, t) = 0$ が成立する。

この論文で我々は $\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ における作用素 $P = (\frac{\partial}{\partial t})^2 - \Delta + g(x)$ に関する極限振中の原理が成立するための条件を求める。

$\mathbb{R}^3 \times [0, \infty)$ で定義される作用素

$$P = (\frac{\partial}{\partial t})^2 - \Delta + g(x)$$

に対する初期値問題

$$(1) \quad \begin{aligned} & \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} \right)^2 - \Delta + g(x) \right] u(x, t) = 0, \\ & u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = f(x) \end{aligned}$$

を考える。ここで Δ は $\mathbb{R}^3$ における Laplacian, g, f は § 2 の条件 $(C_1), (C_2), (C_3)$ をみたすものである。

$-\Delta + g$ の $L^2(\mathbb{R}^3)$ における自己共役拡張 A が固有値をもてば一般に (即ち条件 (C_3) をみたす全ての f に対する) 極限

振巾の原理が成立しないことは O.A. Ladyzhenskaya [1] によって指摘されているが、極限振巾の原理が成立するための十分条件として、D.M. Èidus [2], その他の人達によって与えられたものは全て「方程式

$$(-\Delta + g)w = 0, \quad w \notin L^2(\mathbb{R}^3)$$

をみたしかつ $|x| \rightarrow \infty$ のとき $w = O(|x|^{-1})$, $\frac{\partial w}{\partial x_i} = O(|x|^{-2})$ なる order で減少する函数 w が存在しない」という条件を含んでいる。実際、上記の函数 w は作用素 A の resolvent kernel を求める際に現れる modified resolvent equation (T. Ikebe [4] 参照) に Banach 空間 $B = \{ \varphi \in C(\mathbb{R}^3); \lim_{r \rightarrow \infty} \sup_{|x|=r} |\varphi(x)| = 0 \}$, $\|\varphi\|_B = \max_{x \in \mathbb{R}^3} |\varphi(x)|$ で考えたとき、 B から B への compact operator

$$T\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{|x-y|} g(y) \varphi(y) dy \quad (\varphi \in B)$$

の 1 に対する固有函数, 即ち

$$(I - T)w = 0, \quad w \in B, \quad w \neq 0$$

をみたす函数である。もしこのような函数 w が存在しなければ任意の $\varphi \in B$ に対して方程式 $\varphi = \varphi + T\varphi$ は B で一意な解をもち (1) に対する極限振巾の原理が成立することが分る。

上記の函数 w の存在に関しては、K. Asano と T. Shiota が [3] において、 $g \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$ が次の不等式

$$-g(x) \leq 1/4|x|^2$$

が R^3 全体では成立しないような或る g に対して $(-\Delta + g)w = 0$,
 $w \notin L^2(R^3)$, $w = O(|x|^{-1})$, $\frac{\partial w}{\partial x_i} = O(|x|^{-2})$ ($|x| \rightarrow \infty$) をみたす w を
 構成した。更に筆者達は [5] においてこのような函数 w を使つ
 て初期値問題

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta + g(x) \right] u(x, t) = 0, \quad u(x, 0) = g(x), \quad \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = f(x)$$

の解で $|x| \leq t$ なる全この (x, t) に対して

$$u(x, t) = w(x)$$

が成立する $u(x, t)$ を構成した。この場合 $g \in C_0^2(R^3)$, $f \in C_0^2(R^3)$,
 $f \in C_0^1(R^3)$ である。更にその際、 A が固有値をもたないとは仮
 定したとき (I) に関する極限振中の原理が成立するための必要
 十分条件は上記の函数 w が存在しないことであることをものべ
 た。以上のことから次のように予想することは自然であるよ
 うに思われる「 $g = O(|x|^{-2-\alpha})$ ($|x| \rightarrow \infty$) ($\alpha > 0$) のとき (I) に関す
 る極限振中の原理が成立するための必要十分条件は A が固有
 値をもたずかつ上記の函数 w も存在しないことである。」

この論文の目的は上記の予想が $g = O(|x|^{-3-\alpha})$, $D^\beta g = O(|x|^{-2-\alpha})$
 $(|x| \rightarrow \infty)$ ($\alpha > 0$) ^($|\beta|=1, 2$) のとき正しいことを証明することである。

問題の難しさは次の部分にある： $f \in L^2(R^3)$, $f = O(|x|^{-3-\alpha})$ ($|x| \rightarrow \infty$) ($\alpha > 0$), $\theta(x, \lambda)$ を補題 8 で定義されたものとする
 全ての $\lambda \in (0, \infty)$ に対して

$$\frac{d}{d\lambda} (E_\lambda f, \varphi)_{L^2} = (\theta(\lambda), \varphi)_{L^2} \quad \text{for all } \varphi \in C_0^\infty(R^3),$$

$$\int_0^\infty |(\theta(\lambda), \varphi)| d\lambda \leq (\|\varphi\|_{L^2}^2 + 1) \|\varphi\|_{L^2}$$

for all $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3)$

が成立することが分るが、上述の ω が存在すれば $|\theta(\lambda)|$ 自身 $(0, 1)$ で可積分であるか否か分らず、又 $\lambda \rightarrow 0$ のときの増加の order も分らないことである。それ故定理 2 の証明において (補題 8 参照) $\lambda \in (0, \infty)$ の函数 $T_\lambda(\varphi) = (\theta(\lambda), \varphi)_{L^2}$ が Banach 空間 $C_{3+\alpha}^2 = \{\varphi \in C^2(\mathbb{R}^3); \sup_{x \in \mathbb{R}^3, |\beta| \leq 2} |D^\beta \varphi(x)| (1+|x|^2)^{\frac{3+\alpha}{2}} < \infty\}$ から $L^1(0, \infty)$ への nuclear operator, 従つて $\|T_\lambda\|_{(C_{3+\alpha}^2)^*} = \|\theta(\lambda)\|_{(C_{3+\alpha}^2)^*}$ が $L^1(0, \infty)$ に属することを使う。そのために $g = O(|x|^{-3-\alpha})$, $D^\beta g = O(|x|^{-2-\alpha})$ ($|x| \rightarrow \infty$) ($|\beta| = 1, 2$) が必要になる。

以下の内容と叙述は [6] に従つた。

§ 2. 結果

§ 2 - § 5 を通じて、 $g(x), f(x)$ は次の条件 $(C_1), (C_2), (C_3)$ を満たすと仮定する。以後 $\mathbb{R}^3 \ni E$, $C_0^\infty(E)$, $L^p(E)$ をそれぞれ C_0^∞ , L^p とかき、更に $\langle \varphi, \varphi \rangle$ によつて $\int_E \varphi(x) \varphi(x) dx$ を表わす。

(C_1) : $g(x)$ は E 全体で定義された実数値、局所 Hölder 連続な函数で、正の定数 α, C_0, R_0 が存在して

$$|g(x)| \leq C_0 |x|^{-2-\alpha} \quad (|x| \geq R_0)$$

が成立する。

条件 (C_1) のもとで C_0^∞ で定義された作用素 $-\Delta + g$ は L^2 で

一意の自己共役拡張をもつ。それを A と表わす。 A の定義域

$\mathcal{D}(A)$ は Sobolev space W_2^2 であることが知られている。

(C₂): A は固有値をもたない。

条件 (C₂) のもとで A は strictly positive definite である。

$\mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$ で自己共役作用素 $A^{\frac{1}{2}}$ の定義域を表わす。

(C₃): f は $\mathcal{D}(A^{\frac{1}{2}})$ に属し、 $|x| \rightarrow \infty$ のとき $O(|x|^{-3-\rho})$ ($\rho > 0$) なる order で減少する。

定理 1. $(-\Delta + g)w = 0$, $w \notin L^2$, $w = O(|x|^{-1})$, $\frac{\partial w}{\partial x_i} = O(|x|^{-2})$

($|x| \rightarrow \infty$) をみたす全ての w に対して $\langle f, w \rangle = 0$ と仮定する。

このとき (1) の解 $u(t) = u(x, t)$ は次の性質をもつ:

$$(2.1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} (u(t), \varphi)_{L^2} = 0 \quad \text{for all } \varphi \in L^2,$$

$$(2.2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \|u(t)\|_{L^2(K)} = 0 \quad \text{for all compact } K \subset E.$$

更に、 $f \in \mathcal{D}(A)$, $\sup_{x \in E} |\nabla g(x)| < \infty$ ($\nabla g(x)$ は $\text{grad } g(x)$ を表わす) と仮定すると

$$(2.3) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |u(x, t)| = 0 \quad \text{for all compact } K \subset E$$

が成立する。

定理 2 (主定理). $g \in C^2(E)$, $g = O(|x|^{-3-\alpha})$, $D^3 g = O(|x|^{-2-\alpha})$

($|x| \rightarrow \infty$) ($|\alpha| = 1, 2$) と仮定する。 $u(t)$ を (1) の解とする。こ

のとき任意の $\varphi \in L^2$, $\varphi = O(|x|^{-2-\sigma})$ ($\sigma > \frac{1}{2}$) ($|x| \rightarrow \infty$) に対して

$$(2.4) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \langle u(t), \varphi \rangle = 4\pi \langle \varphi, \omega \rangle \langle f, \omega \rangle \langle g, \omega \rangle^{-2}$$

が成立する。ここで ω は定理 1 の ω のベタものである。

定理 2 と [2] における定理 6 より次の系をうる。

系. $g(x)$ は定理 2 と同じ条件を満足すると仮定する。このとき条件 (C₃) をみたす全ての f に対する (L) の解 $u(x, t)$ が

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} |u(x, t)| = 0 \quad \text{for all compact } K \subset E$$

をみたすための必要十分条件は定理 1 の ω のベタ関数 ω が存在しないことである。

§ 3. 定理 1 の証明に次の補題 1, 2 が使われる。

$\varphi \in L^6$ に対して

$$(3.1) \quad T\varphi = -\frac{1}{4\pi} \int_E \frac{1}{|x-y|} g(y) \varphi(y) dy \quad (\varphi \in L^6)$$

とおく。このとき定理 1 における ω は次のように特徴づけられる。

補題 1. 1). T は L^6 から L^6 への compact operator であり, T の双一次形式 $\langle, \rangle$ に関する adjoint operator T^* は $L^{\frac{6}{5}}$ から $L^{\frac{6}{5}}$ への compact operator で次の形で与えられる:

$$(3.2) \quad T^*\varphi = -\frac{1}{4\pi} g(x) \int_E \frac{1}{|x-y|} \varphi(y) dy \quad (\varphi \in L^{\frac{6}{5}}).$$

2). $M = \{\omega \in L^6; (I-T)\omega = 0\}$, $M' = \{\omega' \in L^{\frac{6}{5}}; (I-T^*)\omega' = 0\}$

とおく。ここで I は恒等作用素を表わす。このとき

$$\omega = O(|x|^{-1}), \quad \frac{\partial \omega}{\partial x_i} = O(|x|^{-2}) \quad (|x| \rightarrow \infty) \quad (\omega \in M),$$

$$\omega' = O(|x|^{-3-\alpha}) \quad (|x| \rightarrow \infty) \quad (\omega' \in M')$$

が成立する.

註. 定理1における ω の全体が補題1における M と一致することは容易に分る.

補題2. $\varphi \in L^2$, $\varphi = O(|x|^{-2-\sigma})$ ($\sigma > \frac{1}{2}$) ($|x| \rightarrow \infty$), かつ全ての $\omega \in M$ に対して $\langle \varphi, \omega \rangle = 0$ と仮定する. このとき φ は $A^{\frac{1}{2}}$ の値域に属する.

§4. この節で我々は定理2の証明に必要ないくつかの補題を準備する.

補題3. 1). $a > 0$, $t > 0$ を fix する. このとき積分

$$\int_{a-i\infty}^{a+i\infty} \left| \frac{e^{st}}{\lambda + s^2} \right| d\lambda \quad \text{は } \lambda \in (0, \infty) \text{ の有界連続関数である.}$$

2). $a' < 0$, $t > 0$ を fix する. このとき積分 $\int_{a'-i\infty}^{a'+i\infty} \left| \frac{e^{st}}{\lambda + s^2} \right| d\lambda$ は $t \geq t_0$ なる t に関して一様に収束し

$$\int_{a'-i\infty}^{a'+i\infty} \frac{e^{st}}{\lambda + s^2} d\lambda = 0 \quad (t > 0)$$

が成立する.

補題4. $t > 0$, $a > 0$ を fix する. 函数 $l(\lambda)$ が $(0, \infty)$ で局所有界かつ $l(\lambda) \in L^1(0, \infty)$ ならば積分 $\int_0^\infty |l(\lambda)| d\lambda \int_{-a+iN}^{a+iN} \left| \frac{e^{st}}{\lambda + s^2} \right| d\lambda$ は $|N| > 3a$ なる任意の実数 N に対して収束する.

補題5. $a > 0$ を fix する. このとき

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{2-i\infty}^{2+i\infty} e^{st} R(-s^2) f ds$$

は、初期値問題(1)の解である。ここで $R(-s^2)$ は A の $-s^2$ に対する resolvent $(A+s^2)^{-1}$ を表わす。

次の補題6は[4]における lemma 3.2 を modify したものである。

補題6. $v \in L^2$, $v = O(|x|^{-3-\varepsilon})$ ($|x| \rightarrow \infty$) ($0 < \varepsilon < 1$), かつ $\int_E v(x) dx = 0$ とする。このとき

$$\int_E \frac{v(y)}{|x-y|} dy = O(|x|^{-1-\varepsilon}) \quad (|x| \rightarrow \infty).$$

補題7. $w \in M$ かつ $w \neq 0$ ならば $\langle g, w \rangle \neq 0$. $w \in M$ かつ $w \neq 0$ なるものが存在すれば $\dim M = \dim M' = 1$.

註. g が定理2の仮定をみたすとき補題7は定理2の証明の過程においても得られる。

補題8. $\lambda > 0$ に対して

$$\theta(\lambda) = \theta(x, \lambda) = (2\pi i)^{-1} (u_+(x, \lambda) - u_-(x, \lambda))$$

と置く。ここで $u_{\pm}(x, \lambda) = R(\lambda \pm i0) f(x) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} (A - (\lambda \pm i\varepsilon))^{-1} f(x)$.

更に $\varphi \in C^2(E)$ に対して $\|\varphi\|_{C_{3+\alpha}^2} = \sup_{x \in E, |x| \leq 2} |D^{\alpha} \varphi(x)| (1+|x|^2)^{\frac{3+\alpha}{2}}$ なる

norm を定義し, $C_{3+\alpha}^2$ によって Banach 空間 $\{\varphi \in C^2(E);$

$\|\varphi\|_{C_{3+\alpha}^2} < \infty\}$ を表わす。このとき $\lambda \in (0, \infty)$ の函数 $T_{\lambda}(\varphi)$

$= \langle \theta(\lambda), \varphi \rangle$ ($\varphi \in C_{3+\alpha}^2$) は $C_{3+\alpha}^2$ から $L^1(0, \infty)$ への nuclear

operator であり、かつ $\|T_\lambda\|_{(C_{3+\alpha}^2)^*} = \|\theta(\lambda)\|_{(C_{3+\alpha}^2)} \in L^1(0, \infty)$ である。

§ 5. 定理 2 の証明.

$w \in M$ かつ $w \neq 0$ なる w が存在するとする。そのとき補題 7 より $\dim M = 1$ かつ $\langle g, w \rangle \neq 0$ が従う。よって $\langle g, w \rangle = 1$ となる w をとる。任意の $\varphi \in L^2$, $\varphi = O(|x|^{-2-\delta})$ ($|x| \rightarrow \infty$) ($\delta > \frac{1}{2}$)

を

$$\varphi = \langle \varphi, w \rangle g + (\varphi - \langle \varphi, w \rangle g) \equiv \varphi_1 + \varphi_2$$

と分けると、 $\langle \varphi_2, w \rangle = 0$, $g = O(|x|^{-3-\alpha})$ ($|x| \rightarrow \infty$) であるから定理 1 により

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \langle u(t), \varphi_2 \rangle = 0$$

をうる。よって

$$(5.1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \langle u(t), g \rangle = 4\pi \langle f, w \rangle$$

を証明すればよい。

$f, g \in L^2$ かつ $f = O(|x|^{-3-\delta})$, $g = O(|x|^{-2-\alpha})$ ($|x| \rightarrow \infty$) であることから [2] の定理 4 により λ の函数 $\frac{d}{d\lambda} \langle E_\lambda f, g \rangle$ は $(0, \infty)$ で連続で、かつ [4] の定理 6 により $L^1(0, \infty)$ に属することが分る。よって補題 3, 4, 5 と Fubini の定理を使って

$$\langle u(t), g \rangle = \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{d}{d\lambda} \langle E_\lambda f, g \rangle d\lambda \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} \frac{e^{st}}{\lambda + \zeta^2} d\zeta$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{d}{d\lambda} \langle E_\lambda f, g \rangle d\lambda \int_{\Gamma_1 + \Gamma_2} \frac{e^{st}}{\lambda + s^2} d\zeta + \int_{N^2} \frac{\sin \sqrt{\lambda} t}{\sqrt{\lambda}} \frac{d}{d\lambda} \langle E_\lambda f, g \rangle d\lambda$$

と変形する. ここで $a > 0$, Γ_1 と Γ_2 はそれぞれ正の向きの曲線 $\{\lambda - iN; 0 < \lambda \leq a\} \cup \{a + i\zeta; -N < \zeta < N\} \cup \{\lambda + iN; 0 < \lambda \leq a\}$, $\{\lambda + iN; -a \leq \lambda < 0\} \cup \{-a + i\zeta; -N < \zeta < N\} \cup \{\lambda - iN; -a \leq \lambda < 0\}$ を表わし, $N > 3a$ である. 右辺の等式の右辺第 2 項は $N \in T$ 十分大きくすれば $t > 0$ に関して一様に十分零に近くできる. そのように $N \in T$ 十分大きく fix しておく. 次に, $s \in \Gamma_2$ ならば $\operatorname{Re} s < 0$ であるから補題 4 と Lebesgue の定理により

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{d}{d\lambda} \langle E_\lambda f, g \rangle d\lambda \int_{\Gamma_2} \frac{e^{st}}{\lambda + s^2} d\zeta = 0$$

を得る. よって

$$(5.2) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^\infty \frac{d}{d\lambda} \langle E_\lambda f, g \rangle d\lambda \int_{\Gamma_1} \frac{e^{st}}{\lambda + s^2} d\zeta = 8\pi^2 i \langle f, w \rangle$$

を証明すればよい.

$$(5.3) \quad \int_0^\infty \frac{d}{d\lambda} \langle E_\lambda f, g \rangle d\lambda \int_{\Gamma_1} \frac{e^{st}}{\lambda + s^2} d\zeta = \int_{\Gamma_1} e^{st} \langle R(-s^2) f, g \rangle d\zeta$$

と再び変形する. $\operatorname{Re} s > 0$ に対して $u(s) = R(-s^2) f$ とおくと $u(s)$ は

$$(5.4) \quad u(x, y) = \frac{1}{4\pi} \int_E \frac{e^{-s|x-y|}}{|x-y|} f(y) dy - \frac{1}{4\pi} \int_E \frac{e^{-s|x-y|}}{|x-y|} g(y) u(y, s) dy$$

をみたす. これと $g = O(|x|^{-3-\alpha})$ ($|x| \rightarrow \infty$) であることから

$$(5.5) \quad \langle u(s), g \rangle = -\frac{1}{s} \int_{E \times E} \frac{e^{-s|x-y|}}{|x-y|} f(y) g(x) w(x) dx dy + s \langle u(s), p(s) \rangle$$

が成立することが分る. ここで

$$(5.6) \quad p(\zeta) = p(x, \zeta) = g(x) \int_E g(y) \omega(y) |x-y| dy \int_0^1 dz' \int_0^1 z e^{-\zeta |x-y| z z'} dz$$

と書いた。

更に、(5.4) と (5.5) にくり返し代入して (3.1), (5.6) を考慮に入
れると、(5.3) の左辺は

$$(5.7) \quad \int_0^\infty \frac{d}{d\lambda} \langle E_\lambda f, g \rangle d\lambda \int_{\Gamma_1} \frac{e^{\zeta t}}{\lambda + \zeta^2} d\zeta = 4\pi \langle f, \omega \rangle \int_{\Gamma_1} \frac{e^{\zeta t}}{\zeta} d\zeta \\ + \int_{\Gamma_1} e^{\zeta t} F(\zeta) d\zeta + \int_{\Gamma_1} \zeta e^{\zeta t} \langle R(-\zeta^2) f, T_\zeta^{*3} p(\zeta) \rangle d\zeta$$

となる。ここで

$$F(\zeta) = \int_{E \times E} f(y) g(x) \omega(x) dx dy \int_0^1 e^{-\zeta |x-y| z} dz + \zeta \sum_{j=0}^2 \langle T_\zeta^j \psi_j, p(\zeta) \rangle,$$

$$\psi_j(x) = \frac{1}{4\pi} \int_E \frac{e^{-\zeta |x-y|}}{|x-y|} f(y) dy, \quad T_\zeta \psi(x) = -\frac{1}{4\pi} \int_E \frac{e^{-\zeta |x-y|}}{|x-y|} g(y) \psi(y) dy,$$

$$T_\zeta^* \psi(x) = -\frac{1}{4\pi} g(x) \int_E \frac{e^{-\zeta |x-y|}}{|x-y|} \psi(y) dy, \quad T^0 \psi(x) = \psi(x),$$

$$T^j \psi(x) = T(T^{j-1} \psi)(x) \quad (j=1, 2, 3)$$

と書いた。

以下において、 $t \rightarrow \infty$ のとき (5.7) の右辺第一項が $8\pi^2 i \langle f, \omega \rangle$
に収束し第二項と第三項が零に収束することを示す。第一項
については Lebesgue の定理を使って

$$(5.8) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} 4\pi \langle f, \omega \rangle \int_{\Gamma_1} \frac{e^{\zeta t}}{\zeta} d\zeta = 8\pi^2 i \langle f, \omega \rangle$$

とえる。第二項は、 $f, g \in L^2$ から $f = O(|x|^{-3-\epsilon})$, $g = O(|x|^{-3-\epsilon})$
($|x| \rightarrow \infty$) であることから $F(\zeta)$ は $\{\zeta; \operatorname{Re} \zeta > 0\}$ で正則であり、

更に $\operatorname{Re} \zeta \geq 0$ なる ζ に関して一様に $T_\zeta^j \psi_\zeta(x) = O(|x|^{-1})$ ($j=0,1,2$),
 $p(x, \zeta) = O(|x|^{-2-\alpha})$ ($|x| \rightarrow \infty$) となるから $F(\zeta)$ は $\{\zeta; \operatorname{Re} \zeta \geq 0\}$ で
 連続である. よって Lebesgue の定理と Riemann-Lebesgue の
 定理により

$$(5.9) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_1} e^{st} F(\zeta) d\zeta = 0$$

もうる. 問題はホ三項であるが、簡単のために

$$p_3(x, \zeta) = T_\zeta^{*3} p(x, \zeta)$$

と置いて

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_1} \zeta e^{st} \langle R(-\zeta^2) f, p_3(\zeta) \rangle d\zeta &= \int_{\Gamma_1} \zeta e^{st} d\zeta \int_0^\infty \frac{\langle \theta(\lambda), p_3(\zeta) \rangle}{\lambda + \zeta^2} d\lambda \\ &= \frac{1}{i} \int_{\Gamma_1} e^{st} d\zeta \int_0^\infty \left(\frac{1}{\lambda - i\zeta} - \frac{1}{\lambda + i\zeta} \right) \langle \lambda \theta(\lambda^2), p_3(\zeta) \rangle d\lambda \end{aligned}$$

と変形する. ここで $\theta(\lambda)$ は §4 補題 8 で定義されたものである.
 右辺ホ三項を考える (ホ一項についても全く同様のことが成り立つ). 先ず $a > 0$ を fix したとき

$$(5.10) \quad \int_{\Gamma_1} e^{st} d\zeta \int_0^\infty \frac{\langle \lambda \theta(\lambda^2), p_3(\zeta) \rangle}{\lambda + i\zeta} d\lambda = \int_0^\infty d\lambda \int_{\Gamma_1} e^{st} \frac{\langle \lambda \theta(\lambda^2), p_3(\zeta) \rangle}{\lambda + i\zeta} d\zeta$$

が成立することを示そう. 条件 $f \in L^2$, $f = O(|x|^{-3-\nu})$ ($|x| \rightarrow \infty$) より
 $\theta(x, \lambda)$ は任意の $0 < \beta_1 < \beta_2$ に対して $E \times [\beta_1, \beta_2]$ で連続であ
 り、かつ

$$\sup_{\beta_1 \leq \lambda \leq \beta_2} |\theta(x, \lambda)| \leq C_{\beta_1, \beta_2} (1 + |x|)^{-1} \quad (x \in E),$$

$$\int_0^\infty |(\theta(\lambda), \psi)_{L^2}| d\lambda \leq (\|f\|_{L^2}^2 + 1) \|\psi\|_{L^2} \quad (\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^3))$$

と評価される. ($\because \frac{d}{d\lambda} (E_\lambda f, \varphi)_{L^2} = (\theta(\lambda), \varphi)_{L^2}$). 又 $f \in L^2$,

$$f = O(|x|^{-3-\alpha}) \quad (|x| \rightarrow \infty) \quad \text{より}$$

$$\sup_{\operatorname{Re} \zeta \geq 0} |P_3(\lambda, \zeta)| \leq C(1+|\lambda|)^{-4-\alpha} \quad (\lambda \in E)$$

が従う. 以上のことから (5.10) の左辺は λ, ζ に関して絶対可積分であることが分り, Fubini の定理が使える.

又, $\lambda > 0$ を fix したとき $\langle \lambda \theta(\lambda^2), P_3(\zeta) \rangle$ が $\{\zeta; \operatorname{Re} \zeta > 0\}$ で正則であるから, (5.10) より

$$\begin{aligned} (5.11) \quad \int_{\Gamma_1} e^{\zeta t} d\zeta \int_0^\infty \frac{\langle \lambda \theta(\lambda^2), P_3(\zeta) \rangle}{\lambda + i\zeta} d\lambda &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^\infty d\lambda \int_{\Gamma_\varepsilon} e^{\zeta t} \frac{\langle \lambda \theta(\lambda^2), P_3(\zeta) \rangle}{\lambda + i\zeta} d\zeta \\ &= \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} e^{\zeta t} d\zeta \int_0^\infty \frac{\langle \lambda \theta(\lambda^2), P_3(\zeta) \rangle}{\lambda + i\zeta} d\lambda \end{aligned}$$

をうる. ここで Γ_ε は Γ_1 において ε を ε で置きかえられる曲線である.

先ず (5.10) の証明と同じ議論により

$$(5.12) \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{\varepsilon \pm iN}^{\varepsilon + iN} e^{\zeta t} d\zeta \int_0^\infty \frac{\langle \lambda \theta(\lambda^2), P_3(\zeta) \rangle}{\lambda + i\zeta} d\lambda = 0$$

をうる. ここで複号は同順にとる. よって次の補題 9 が証明されれば定理は証明されたことになる.

補題 9. $f(x)$ が定理 2 の仮定をみたすとする. このとき

$$(5.14) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^\infty d\lambda \int_{\varepsilon - iN}^{\varepsilon + iN} e^{\zeta t} \frac{\langle \lambda \theta(\lambda^2), P_3(\zeta) \rangle}{\lambda + i\zeta} d\zeta = 0$$

が成立する.

補題9を証明する前に次のことを補題の形でのべておく。

補題10. $f(x)$ が定理2の仮定をみたすとする。このとき

$$\sup_{x \in E, |\beta| \leq 2} |D_x^\beta P_3(x, S)| (1+|x|^2)^{\frac{3+\beta}{2}} \leq C_K \quad \text{for } \operatorname{Re} S \geq 0, |S| \leq K$$

が成立する。ここで K は任意の正数, C_K は S に無関係な定数である。

補題9の証明. $\lambda > 2N, |\operatorname{Im} S| \leq N$ のとき $|\lambda \pm iS| \geq N$ が成立するから補題8, 10, Lebesgueの定理, Riemann-Lebesgueの定理により

$$(5.14)' \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^{2N} d\lambda \int_{\varepsilon - iN}^{\varepsilon + iN} e^{St} \frac{\langle \lambda \theta(\lambda^2), P_3(S) \rangle}{\lambda \pm iS} dS = 0$$

を証明すればよいことが分る。先ず

$$(5.15) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^N d\lambda \int_{-N}^N e^{(\varepsilon + iS)t} \frac{(\lambda - S) \langle \lambda \theta(\lambda^2), P_3(\varepsilon + iS) \rangle}{(\lambda - S)^2 + \varepsilon^2} dS = 0$$

が成立することを示そう。

$$\rho = t - (|x-y| + |y-z| + |z-u| + |u-v| + |v-x|)$$

とおく。Fubiniの定理により $t > 0, \varepsilon > 0$ を fix したとき

$$(5.16) \quad \int_{-N}^N e^{(\varepsilon + iS)t} \frac{(\lambda - S) \langle \lambda \theta(\lambda^2), P_3(\varepsilon + iS) \rangle}{(\lambda - S)^2 + \varepsilon^2} dS$$

$$= \left(\frac{1}{4\pi}\right)^3 e^{\varepsilon t} \int_E \lambda \theta(x, \lambda^2) \varphi_{\varepsilon, t}(x, \lambda) dx$$

という。ここで

$$(5.17) \quad \varphi_{\varepsilon, t}(x, \lambda) = g(x) \int_E \frac{g(y)}{|x-y|} dy \int_E \frac{g(z)}{|y-z|} dz \int_E \frac{g(u)}{|z-u|} du \int_E |u-v| \times \\ \times g(v) \omega(v) dv \int_0^1 dz' \int_0^1 z e^{-\varepsilon(t-P)} dz \int_{-N}^N \frac{(s-\lambda) e^{iPs}}{(s-\lambda)^2 + \varepsilon^2} ds$$

とあった。先ず

$$(5.18) \quad \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^N d\lambda \int_{-N}^N e^{(\varepsilon+i\lambda)t} \frac{(s-\lambda) \langle \lambda \theta(\lambda^2), P_3(\varepsilon+i\lambda) \rangle}{(s-\lambda)^2 + \varepsilon^2} ds \\ = \left(\frac{1}{4\pi}\right)^3 \int_0^N d\lambda \int_E \lambda \theta(x, \lambda^2) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varphi_{\varepsilon, t}(x, \lambda) dx$$

を示そう。 $t > 0$ を fix する。このとき定数 C が存在して

$$(5.19) \quad \sup_{x \in E, |s| \leq 2} |D_x^\alpha \varphi_{\varepsilon, t}(x, \lambda)| (1+|x|^2)^{\frac{3+\alpha}{2}} \leq C (1 + \log \frac{N+\lambda}{N-\lambda}) \\ \text{for all } \lambda < N, \varepsilon < 1$$

が成立する。実際、 $s \cos s$ は奇函数であるから $\lambda < N$ に対

して

$$(5.20) \quad \int_{-N}^N \frac{(s-\lambda) e^{iPs}}{(s-\lambda)^2 + \varepsilon^2} ds = e^{iP\lambda} \left[\int_{(-N-\lambda)P}^{(N-\lambda)P} \frac{s \cos s}{s^2 + \varepsilon^2 P^2} ds + i \int_{(-N-\lambda)P}^{(N-\lambda)P} \frac{s \sin s}{s^2 + \varepsilon^2 P^2} ds \right] \\ = e^{iP\lambda} \left[\int_{(-N-\lambda)P}^{(N-\lambda)P} \frac{\cos s}{s} ds - \varepsilon^2 P^2 \int_{(-N-\lambda)P}^{(N-\lambda)P} \frac{\cos s}{s(s^2 + \varepsilon^2 P^2)} ds \right. \\ \left. + i \int_{(-N-\lambda)P}^{(N-\lambda)P} \frac{\sin s}{s} ds - i \varepsilon^2 P^2 \int_{(-N-\lambda)P}^{(N-\lambda)P} \frac{\sin s}{s(s^2 + \varepsilon^2 P^2)} ds \right]$$

と変形できるから

$$(5.21) \quad \left| \int_{-N}^N \frac{(s-\lambda) e^{iPs}}{(s-\lambda)^2 + \varepsilon^2} ds \right| \leq C' (1 + \log \frac{N+\lambda}{N-\lambda})$$

を得る。ここで C' は ε, λ, P に無関係な定数である。 $t-P \geq 0$

かつ $g = O(|x|^{-3-\alpha})$, $D^\alpha g = O(|x|^{-2-\alpha})$ ($|x| \rightarrow \infty$) ($|s| = 1, 2$) であるか

ら、部分積分により (5.17) と (5.21) を使つて (5.19) をうる。よつて (5.16), (5.19), 補題 8 及び Lebesgue の定理により (5.18) をうる。

次に

$$(5.22) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^N d\lambda \int_E \lambda \theta(x, \lambda^2) \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varphi_{\varepsilon, t}(x, \lambda) = 0$$

を示そう。(5.17), (5.20), (5.21) より

$$(5.23) \quad \begin{aligned} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \varphi_{\varepsilon, t}(x, \lambda) &= g(x) \int_E \frac{g(y)}{|x-y|} dy \int_E \frac{g(z)}{|y-z|} dz \int_E \frac{g(u)}{|z-u|} du \\ &\quad \int_E (u-v) g(v) w(v) dv \int_0^1 dz' \int_0^1 z e^{i\lambda p} dz' \left[\int_{(-N-\lambda)p}^{(\lambda-N)p} \frac{\cos s}{s} ds + i\pi \right. \\ &\quad \left. + i \left\{ \int_{(-N-\lambda)p}^{(\lambda-N)p} \frac{\sin s}{s} ds - \pi \right\} \right] \\ &\equiv J_{1,t}(x, \lambda) + J_{2,t}(x, \lambda) + J_{3,t}(x, \lambda) \end{aligned}$$

をうる。更に

$$\varphi_2(x, \lambda) = e^{-i\lambda t} J_{2,t}(x, \lambda)$$

とおく。 $g = O(|x|^{-3-\alpha})$, $D^\beta g = O(|x|^{-2-\alpha})$ ($|x| \rightarrow \infty$) ($|\beta| = 1, 2$) であるから

$$\sup_{\lambda \in E, |\beta| \leq 2} |D_x^\beta \varphi_2(x, \lambda)| (1+|x|^2)^{\frac{3+\alpha}{2}} \leq C \quad \text{for all } \lambda < N$$

をうる。ここで C は λ に無関係な定数である。よつて補題 8

と Riemann-Lebesgue の定理により

$$(5.24) \quad \begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^N d\lambda \int_E \lambda \theta(x, \lambda^2) J_{2,t}(x, \lambda) dx \\ = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^N e^{i\lambda t} d\lambda \int_E \lambda \theta(x, \lambda^2) \varphi_2(x, \lambda) dx = 0 \end{aligned}$$

をうる。又、 $p-t$ を fix すると $t \rightarrow \infty$ のとき $p \rightarrow \infty$ である

から $\lambda < N$, $\rho - t$ を fix すると

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{(-N-\lambda)\rho}^{(\lambda-N)\rho} \frac{\cos s}{s} ds = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_{(-N-\lambda)\rho}^{(N-\lambda)\rho} \frac{\sin s}{s} ds - \pi = 0$$

をうる。よって (5.18) を証明したときと同様の議論により

$$(5.25) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^N d\lambda \int_E \lambda \theta(x, \lambda^2) J_{k,t}(x, \lambda) dx = 0 \quad (k=1, 3)$$

をうる。結局 (5.23), (5.24), (5.25) より (5.22) が得られた。

又, (5.15) を証明したときと同様の議論により

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_N^{2N} d\lambda \int_{-N}^N e^{(\varepsilon + i\lambda)t} \frac{(\lambda - \varepsilon) \langle \lambda \theta(\lambda^2), P_3(\varepsilon + i\lambda) \rangle}{(\lambda - \varepsilon)^2 + \varepsilon^2} d\lambda = 0,$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_0^{2N} d\lambda \int_{-N}^N e^{(\varepsilon + i\lambda)t} \frac{\varepsilon \langle \lambda \theta(\lambda^2), P_3(\varepsilon + i\lambda) \rangle}{(\lambda - \varepsilon)^2 + \varepsilon^2} d\lambda = 0$$

をうる。よって (5.14)' の一方の式が示された。他方も全く同

様にして証明される。よって補題 9 の証明は終った。

参考文献

[1] O.A. Ladyzhenskaya: On the asymptotic amplitude principle.

Uspehi Mat. Nauk (N.S.), 12, 161-164 (1957).

[2] D.M. Eĭdus: The principle of limiting absorption. Mat. Sb.,

57(99), 13-44 (1962); A.M.S. Transl. series 2(47), 157-191 (1965).

[3] K. Asano and T. Shirota: Remarks on eigenfunctions of the

operators $-\Delta + \mathcal{L}$. Proc. Japan Acad., 42, 1044-1049 (1966).

- [4] T.Ikebe: Eigenfunction expansions associated with the Schrödinger operators and their applications to scattering theory. Arch Rat. Mech. Anal.,5,1-34(1960).
- [5] K.Kubota and T.Shirota: On certain condition for the principle of limiting amplitude. Proc.Japan Acad.,42, 1155-1160(1966).
- [6] K.Kubota and T. Shirota: The principle of limiting amplitude. J.Fac.Sci.Hokkaido Univ.Ser.A(1967)(to appear).
- [7] D.Thoe: Spectral theory for the wave equation with a potential term. Arch.Rat.Mech.Anal.,22,364-406(1966).
- [8] A.Grothendieck: Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires.Mem.Amer.Math.Soc.,1955.
- [9] H.G.Garnir: Les problèmes aux limites de la physique mathématique. Birkhauser Verlag,Basel, 1958.