

Twisted Kummer and Kummer-Artin-Schreier theories

諏訪紀幸 (中央大学理工学部)

本論の目的の一つは、陸名 [5] によって見出された体の n 次巡回拡大に対する生成多項式や小松 [4] によって定式化された descent Kummer theory を group scheme の枠組みで捉え直すことにある。[4] に従うなら、標題は descent Kummer and Kummer-Artin-Schreier theories とすべきであろうが、60 年代の雰囲気を感じて twisted を採用した。

第 1 節では Kummer 理論と Kummer-Artin-Schreier 理論について概観する。第 2 節では議論の展開に必要な group scheme の定義と基本的な性質を簡略に述べる。第 3 節では Kummer 理論を二次拡大でひねって得られる twisted Kummer theory について、第 4 節では Kummer-Artin-Schreier 理論を二次拡大でひねって得られる twisted Kummer-Artin-Schreier theory について説明する。ここで省いた証明や考察は [9] に詳しく論述した。

本論では陸名 [5] や小松 [4] の仕事を一般の環の上に拡張したが、group scheme を高次元にして得られる一般化も考えられる。これについては本講究録所収の木田雅成氏の論説を参照されたい。

記号.

M を可換群あるいは可換群の層、 φ を M の自己準同型とする。 $\text{Ker}[\varphi : M \rightarrow M]$ を ${}_{\varphi}M$ で、 $\text{Coker}[\varphi : M \rightarrow M]$ を M/φ で表わす。

scheme の上の層はすべて fppf 位相で考える。したがって、層の cohomology はすべて fppf cohomology を意味する。 $H^*(\text{Spec } R, G)$ を $H^*(R, G)$ と略記する。

G が scheme X の上の smooth quasi-projective group scheme であるとき、 G に係数を持つ X の上の fppf cohomology は étale cohomology と一致することが知られている (Grothendieck [3], III.11.7)。

1. Kummer 理論と Kummer-Artin-Schreier 理論

1.1. (Kummer 理論) $\mathbb{G}_m = \text{Spec } \mathbb{Z}[U, 1/U]$ によって multiplicative group scheme を表わす。乗法は $U \mapsto U \otimes U$ で与えられる。

n を整数 ≥ 2 とし、 $\mu_n = \text{Ker}[n : \mathbb{G}_m \rightarrow \mathbb{G}_m]$ と記す。ここで、 $\zeta = e^{2\pi i/n}$ とすれば、 μ_n は $\mathbb{Z}[\zeta, 1/n]$ の上で constant group scheme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に同型。したがって、 X が $\mathbb{Z}[\zeta, 1/n]$ -scheme であるとき、 group scheme の完全列

$$0 \longrightarrow \mu_n \longrightarrow \mathbb{G}_m \xrightarrow{n} \mathbb{G}_m \longrightarrow 0$$

から完全列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) &\longrightarrow H^0(X, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{n} H^0(X, \mathbb{G}_m) \\ &\longrightarrow H^1(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{n} H^1(X, \mathbb{G}_m) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

を得る. さらに, $H^1(X, \mathbb{G}_m) = \text{Pic}(X)$ (Hilbert 90) に注意して完全列

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O})^\times / n \longrightarrow H^1(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow {}_n\text{Pic}(X) \longrightarrow 0$$

を得る. 特に, $X = \text{Spec } K$ (K は体) であれば, $\text{Pic}(X) = 0$ なので, 同型

$$K^\times / n \xrightarrow{\sim} H^1(K, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$$

を得る. 言い換えれば, $t^n - u \in K[u][t]$ は K の n 次巡回拡大の生成多項式である.

1.2. (Artin-Schreier 理論) $\mathbb{G}_a = \text{Spec } \mathbb{Z}[T]$ によって additive group scheme を表わす. 加法は $T \mapsto T \otimes 1 + 1 \otimes T$ で与えられる.

p を素数とし, $F: \mathbb{G}_{a, \mathbb{F}_p} \rightarrow \mathbb{G}_{a, \mathbb{F}_p}$ を Frobenius 写像とすれば, $\text{Ker}[F - 1: \mathbb{G}_{a, \mathbb{F}_p} \rightarrow \mathbb{G}_{a, \mathbb{F}_p}]$ は constant group scheme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ に同型. したがって, X が $\mathbb{F}_p$ -scheme であるとき, group scheme の完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{G}_{a, \mathbb{F}_p} \xrightarrow{F-1} \mathbb{G}_{a, \mathbb{F}_p} \longrightarrow 0$$

から完全列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) &\longrightarrow H^0(X, \mathbb{G}_{a, \mathbb{F}_p}) \xrightarrow{F-1} H^0(X, \mathbb{G}_{a, \mathbb{F}_p}) \\ &\longrightarrow H^1(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X, \mathbb{G}_{a, \mathbb{F}_p}) \xrightarrow{F-1} H^1(X, \mathbb{G}_{a, \mathbb{F}_p}) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

を得る. ここで, $H^1(X, \mathbb{G}_a) = H^1(X, \mathcal{O})$ なので, 完全列

$$0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}) / (F - 1) \longrightarrow H^1(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow {}_{F-1}H^1(X, \mathcal{O}) \longrightarrow 0$$

を得る. 特に, $X = \text{Spec } K$ (K は体) であれば, $H^1(X, \mathcal{O}) = 0$ なので, 同型

$$K / (F - 1) \xrightarrow{\sim} H^1(K, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

を得る. 言い換えれば, $t^p - t - u \in K[u][t]$ は K の p 次巡回拡大の生成多項式である.

記号 1.3. A を環, $\lambda \in A$ とし,

$$\mathcal{G}^{(\lambda)} = \text{Spec } A[T, \frac{1}{\lambda T + 1}]$$

とおく.

$$T \mapsto T \otimes 1 + 1 \otimes T + \lambda T \otimes T$$

によって乗法を定義すれば, $\mathcal{G}^{(\lambda)}$ は commutative group scheme となる. さらに, group scheme の準同型 $\alpha^{(\lambda)}: \mathcal{G}^{(\lambda)} \rightarrow \mathbb{G}_{m, A}$ を

$$U \mapsto \lambda T + 1: A[U, \frac{1}{U}] \longrightarrow A[T, \frac{1}{\lambda T + 1}]$$

で定義する. λ が A において可逆なら, $\alpha^{(\lambda)}$ は同型. 一方, λ が A で可逆でないとき, $A_0 = A/(\lambda)$ とすれば, $\mathcal{G}^{(\lambda)} \otimes_A A_0$ は $\mathbb{G}_{a, A_0}$ に他ならない.

B を A 代数とする. B が局所環, または, λ が B において巾零なら, $H^1(B, \mathcal{G}^{(\lambda)}) = 0$ が成立する ([6], Cor.1.3, 1.4).

1.4. (Kummer-Artin-Schreier 理論) p を素数とする. また, $\zeta = e^{2\pi i/p}$, $\lambda = \zeta - 1$, $A = \mathbb{Z}[\zeta]$, $K = \mathbb{Q}(\zeta)$ とおく. このとき,

$$\frac{(\lambda T + 1)^p - 1}{\lambda^p} \in \mathbb{Z}[\zeta][T]$$

で

$$\frac{(\lambda T + 1)^p - 1}{\lambda^p} \equiv T^p - T \pmod{\lambda}.$$

A の上の group scheme の準同型

$$\Psi : \mathcal{G}^{(\lambda)} = \operatorname{Spec} A[T, \frac{1}{\lambda T + 1}] \rightarrow \mathcal{G}^{(\lambda^p)} = \operatorname{Spec} A[T, \frac{1}{\lambda^p T + 1}]$$

を

$$T \mapsto \frac{(\lambda T + 1)^p - 1}{\lambda^p}$$

によって定義する. このとき, $\operatorname{Ker}[\Psi : \mathcal{G}^{(\lambda)} \rightarrow \mathcal{G}^{(\lambda^p)}]$ は constant group scheme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ に同型. これから, $A = \mathbb{Z}[\zeta]$ の上の group scheme の完全列

$$(\#) \quad 0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathcal{G}^{(\lambda)} \xrightarrow{\Psi} \mathcal{G}^{(\lambda^p)} \longrightarrow 0$$

を得る. $(\#) \otimes_A K$ は Kummer sequence

$$0 \longrightarrow \mu_{p, K} \longrightarrow \mathbb{G}_{m, K} \xrightarrow{p} \mathbb{G}_{m, K} \longrightarrow 0$$

に同型. また, $\mathbb{F}_p = A/(\lambda)$ で $(\#) \otimes_A \mathbb{F}_p$ は Artin-Schreier sequence

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{G}_{a, \mathbb{F}_p} \xrightarrow{F-1} \mathbb{G}_{a, \mathbb{F}_p} \longrightarrow 0$$

に他ならない.

さらに, X が A -scheme であるとき, group scheme の完全列 $(\#)$ から完全列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) &\longrightarrow H^0(X, \mathcal{G}^{(\lambda)}) \xrightarrow{\Psi} H^0(X, \mathcal{G}^{(\lambda^p)}) \\ &\longrightarrow H^1(X, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{G}^{(\lambda)}) \xrightarrow{\Psi} H^1(X, \mathcal{G}^{(\lambda^p)}) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

を得る. 特に, $X = \operatorname{Spec} B$ (B は局所 A 代数) であれば, $H^1(X, \mathcal{G}^{(\lambda)}) = 0$ なので, 同型

$$\operatorname{Coker}[\Psi : \mathcal{G}^{(\lambda)}(B) \rightarrow \mathcal{G}^{(\lambda^p)}(B)] \xrightarrow{\sim} H^1(B, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$$

を得る. 言い換えれば, $\frac{(\lambda t + 1)^p - 1}{\lambda^p} - u \in B[u][t]$ は局所環 B の p 次不分岐巡回拡大の「生成多項式」である.

補註 1.5. 完全列 (#) は Waterhouse[10] と [7] によって独立に発見された. 方程式

$$\frac{(\lambda t + 1)^p - 1}{\lambda^p} = a$$

は Furtwängler の仕事 [1][2] に遡る.

2. Group scheme $U_{B/A}, G_{B/A}$

2.1. A を環, $r, s \in A$ とし, $D = r^2 - 4s$, $B = A[t]/(t^2 - rt + s)$ とおく. t の B における像を ε で表わす. このとき, $B = A[\varepsilon]$ で $\varepsilon^2 - r\varepsilon + s = 0$. また,

$$\prod_{B/A} \mathbb{G}_{m,B} = \text{Spec } A[U, V, \frac{1}{U^2 + rUV + sV^2}]$$

で乗法は

$$U \mapsto U \otimes U - sV \otimes V, V \mapsto U \otimes V + V \otimes U + rV \otimes V$$

で与えられる. $\prod_{B/A} \mathbb{G}_{m,B}$ は関手 $R \mapsto (R \otimes_A B)^\times$ を表現する.

また, 自然な埋め込み $R^\times \rightarrow (R \otimes_A B)^\times$ は対応 $U \mapsto T, V \mapsto 0$ が定義する射

$$i: \mathbb{G}_{m,A} = \text{Spec } A[T, \frac{1}{T}] \rightarrow \prod_{B/A} \mathbb{G}_{m,B} = \text{Spec } A[U, V, \frac{1}{U^2 + rUV + sV^2}]$$

によって表現される. 一方, norm 写像 $\text{Nr}: (R \otimes_A B)^\times \rightarrow R^\times$ は対応 $T \mapsto U^2 + rUV + sV^2$ が定義する射

$$\text{Nr}: \prod_{B/A} \mathbb{G}_{m,B} = \text{Spec } A[U, V, \frac{1}{U^2 + rUV + sV^2}] \rightarrow \mathbb{G}_{m,A} = \text{Spec } A[T, \frac{1}{T}]$$

によって表現される. さらに,

- (1) $i: \mathbb{G}_{m,A} \rightarrow \prod_{B/A} \mathbb{G}_{m,B}$ は closed immersion ;
- (2) $\text{Nr}: \prod_{B/A} \mathbb{G}_{m,B} \rightarrow \mathbb{G}_{m,A}$ は faithfully flat ;
- (3) $\text{Nr} \circ i: \mathbb{G}_{m,A} \rightarrow \mathbb{G}_{m,A}$ は二乗写像.

記号 2.2. A の上の group scheme $U_{B/A}$ を

$$U_{B/A} = \text{Ker}[\text{Nr}: \prod_{B/A} \mathbb{G}_{m,B} \rightarrow \mathbb{G}_{m,A}].$$

によって定義する. このとき,

$$U_{B/A} = \text{Spec } A[U, V]/(U^2 + rUV + sV^2 - 1)$$

で乗法は

$$U \mapsto U \otimes U - sV \otimes V, \quad V \mapsto U \otimes V + V \otimes U + rV \otimes V$$

で与えられる.

D が A において可逆なら $U_{B/A}$ は A の上の torus である. より一般に, D が A において中零でなければ, $U_{B/A} \otimes_A A[1/D]$ は $A[1/D]$ の上の torus で, $B[1/D]$ の上で分解する. 実際, 対応 $T \mapsto U + \varepsilon V$ によって定義される準同型

$$\sigma : U_{B/A} \otimes_A B = \text{Spec } B[U, V]/(U^2 + rUV + sV^2 - 1) \rightarrow \mathbb{G}_{m,B} = \text{Spec } B[T, \frac{1}{T}]$$

は $B[1/D]$ の上で同型を誘導する.

記号 2.3. A の上の group scheme $G_{B/A}$ を

$$G_{B/A} = \text{Spec } A[X, Y]/(X^2 + rXY + sY^2 - Y)$$

(a) 乗法

$$\begin{aligned} X &\mapsto X \otimes 1 + 1 \otimes X - rX \otimes X - 2sX \otimes Y - 2sY \otimes X - rsY \otimes Y, \\ Y &\mapsto Y \otimes 1 + 1 \otimes Y + (r^2 - 2s)Y \otimes Y + rX \otimes Y + rY \otimes X + 2X \otimes X; \end{aligned}$$

(b) 単位元

$$X \mapsto 0, \quad Y \mapsto 0;$$

(c) 逆元

$$X \mapsto -X - rY, \quad Y \mapsto Y.$$

によって定義する. $G_{B/A}$ は A の上に smooth.

さらに, 対応

$$X \mapsto \frac{UV}{U^2 + rUV + sV^2}, \quad Y \mapsto \frac{V^2}{U^2 + rUV + sV^2}$$

によって準同型

$$\prod_{B/A} \mathbb{G}_{m,B} = \text{Spec } A[U, V, \frac{1}{U^2 + rUV + sV^2}] \rightarrow G_{B/A} = \text{Spec } A[X, Y]/(X^2 + rXY + sY^2 - Y)$$

を定義すれば, group scheme の完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_{m,A} \xrightarrow{i} \prod_{B/A} \mathbb{G}_{m,B} \longrightarrow G_{B/A} \longrightarrow 0$$

を得る.

また, 対応

$$U \mapsto 1 - rX - 2sY, \quad V \mapsto 2X + rY$$

は準同型

$$\alpha: G_{B/A} = \operatorname{Spec} A[X, Y]/(X^2 + rXY + sY^2 - Y) \rightarrow \\ U_{B/A} = \operatorname{Spec} A[U, V]/(U^2 + rUV + sV^2 - 1)$$

を定義する. D が A において可逆なら α は同型. より一般に, D が A において巾零でなければ, α は $A[1/D]$ の上で同型. 実際, $\alpha \otimes_A A[1/D]$ の逆射は

$$X \mapsto \frac{r(1-U) - 2sV}{D}, \quad Y \mapsto \frac{rV - 2(1-U)}{D}$$

によって与えられる.

また, 準同型

$$\beta: U_{B/A} = \operatorname{Spec} A[U, V]/(U^2 + rUV + sV^2 - 1) \rightarrow \\ G_{B/A} = \operatorname{Spec} A[X, Y]/(X^2 + rXY + sY^2 - Y)$$

を合成

$$U_{B/A} \rightarrow \prod_{B/A} \mathbb{G}_{m,B} \rightarrow G_{B/A}.$$

として定義すれば, $\alpha \circ \beta$ は $U_{B/A}$ の二乗写像で, $\beta \circ \alpha$ は $G_{B/A}$ の二乗写像.

$\lambda = 2\varepsilon - r \in B$ とおく. このとき, 対応

$$T \mapsto X + \varepsilon Y, \quad \frac{1}{1 + \lambda T} \mapsto 1 - \lambda\{X + (r - \varepsilon)Y\}$$

は B の上で同型

$$\sigma: G_{B/A} = \operatorname{Spec} B[X, Y]/(X^2 + rXY + sY^2 - Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}^{(\lambda)} = \operatorname{Spec} B[T, \frac{1}{1 + \lambda T}].$$

を定義する.

2.4. X を A -scheme とする. group scheme の完全列

$$0 \longrightarrow U_{B/A} \longrightarrow \prod_{B/A} \mathbb{G}_{m,B} \xrightarrow{\operatorname{Nr}} \mathbb{G}_{m,A} \longrightarrow 0$$

は完全列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \Gamma(X, U_{B/A}) &\longrightarrow \Gamma(X \otimes_A B, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\operatorname{Nr}} \Gamma(X, \mathbb{G}_m) \\ &\longrightarrow H^1(X, U_{B/A}) \longrightarrow \operatorname{Pic}(X \otimes_A B) \xrightarrow{\operatorname{Nr}} \operatorname{Pic}(X) \\ &\longrightarrow H^2(X, U_{B/A}) \longrightarrow H^2(X \otimes_A B, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\operatorname{Nr}} H^2(X, \mathbb{G}_m) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

を誘導する. 一方, group scheme の完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_{m,A} \xrightarrow{i} \prod_{B/A} \mathbb{G}_{m,B} \longrightarrow G_{B/A} \longrightarrow 0$$

は完全列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathbb{G}_m) &\xrightarrow{i} \Gamma(X \otimes_A B, \mathbb{G}_m) \longrightarrow \Gamma(X, G_{B/A}) \\ &\longrightarrow \text{Pic}(X) \xrightarrow{i} \text{Pic}(X \otimes_A B) \longrightarrow H^1(X, G_{B/A}) \\ &\longrightarrow H^2(X, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{i} H^2(X \otimes_A B, \mathbb{G}_m) \longrightarrow H^2(X, G_{B/A}) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

を誘導する.

特に, $X = \text{Spec } R$ (R は A 代数) とすれば, 完全列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow U_{B/A}(R) &\longrightarrow (R \otimes_A B)^\times \xrightarrow{\text{Nr}} R^\times \\ &\longrightarrow H^1(R, U_{B/A}) \longrightarrow \text{Pic}(R \otimes_A B) \xrightarrow{\text{Nr}} \text{Pic}(R) \\ &\longrightarrow H^2(R, U_{B/A}) \longrightarrow H^2(R \otimes_A B, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{\text{Nr}} H^2(R, \mathbb{G}_m) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

と

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow R^\times &\xrightarrow{i} (R \otimes_A B)^\times \longrightarrow G_{B/A}(R) \\ &\longrightarrow \text{Pic}(R) \xrightarrow{i} \text{Pic}(R \otimes_A B) \longrightarrow H^1(R, G_{B/A}) \\ &\longrightarrow H^2(R, \mathbb{G}_m) \xrightarrow{i} H^2(R \otimes_A B, \mathbb{G}_m) \longrightarrow H^2(R, G_{B/A}) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

を得る. さらに, R が局所環なら, $\text{Pic}(R \otimes_A B) = 0$ なので, 同型

$$\text{Coker}[\text{Nr} : (R \otimes_A B)^\times \rightarrow R^\times] \xrightarrow{\sim} H^1(R, U_{B/A}),$$

$$H^1(R, G_{B/A}) \xrightarrow{\sim} \text{Ker}[i : H^2(R, \mathbb{G}_m) \rightarrow H^2(R \otimes_A B, \mathbb{G}_m)]$$

を得る. ここで, 合成

$$\text{Nr} \circ i : \mathbb{G}_{m,A} \rightarrow \prod_{B/A} \mathbb{G}_{m,B} \rightarrow \mathbb{G}_{m,A}$$

が二乗写像なので, $H^1(R, U_{B/A}), H^1(R, G_{B/A})$ は 2 によって消える.

補註 2.5. group scheme $G_{B/A}$ の記述は Waterhouse-Weisfeiler [11] による.

3. Twisted Kummer theory

3.1. n を整数 ≥ 3 とし, $\zeta = e^{2\pi i/n}$, $\omega = \zeta + \zeta^{-1}$, $A = \mathbb{Z}[\omega]$, $B = \mathbb{Z}[\zeta]$ とおく. このとき, B は $A[t]/(t^2 - \omega t + 1)$ に同型. したがって,

$$U_{B/A} = \text{Spec } A[U, V]/(U^2 + \omega UV + V^2 - 1)$$

で乗法は

$$U \mapsto U \otimes U - V \otimes V, \quad V \mapsto V \otimes U + U \otimes V + \omega V \otimes V$$

で与えられる. $U_{B/A} \otimes_A A[1/n]$ は $A[1/n] = \mathbb{Z}[\omega, 1/n]$ の上の torus で, $\text{Ker}[n : U_{B/A} \rightarrow U_{B/A}]$ は $\mathbb{Z}[\omega, 1/n]$ の上で constant group scheme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ に同型.

補註 3.1.1. n が奇数と仮定する. このとき, $D = \omega^2 - 4$, $A_0 = A/(D)$ とおけば, $U_{B/A} \otimes_A A_0$ は $\mathbb{G}_a \times \mu_2$ に同型. したがって, $U_{B/A}$ は A の上に smooth.

実際,

$$U_{B/A} \otimes_A A_0 = \text{Spec } A_0[U, V]/(U^2 + \omega UV + V^2 - 1) = \text{Spec } A_0[U, V]/\left((U + \frac{\omega}{2}V)^2 - 1\right)$$

で $U + \frac{\omega}{2}V$ は $A_0[U, V]/\left((U + \frac{\omega}{2}V)^2 - 1\right)$ の group-like element なので, 対応 $T \mapsto U + \frac{\omega}{2}V$ は準同型

$$\pi : U_{B/A} \otimes_A A_0 = \text{Spec } A_0[U, V]/\left((U + \frac{\omega}{2}V)^2 - 1\right) \rightarrow \mu_{2, A_0} = \text{Spec } A_0[T]/(T^2 - 1)$$

を定義する. さらに, 対応 $U \mapsto 1 - \frac{\omega}{2}S$, $V \mapsto S$ は準同型

$$\mathbb{G}_{a, A_0} = \text{Spec } A_0[S] \rightarrow U_{B/A} \otimes_A A_0 = \text{Spec } A_0[U, V]/\left((U + \frac{\omega}{2}V)^2 - 1\right)$$

を定義する. このとき, group scheme の完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{G}_{a, A_0} \longrightarrow U_{B/A} \otimes_A A_0 \xrightarrow{\pi} \mu_{2, A_0} \longrightarrow 0$$

を得る.

さらに, 対応 $U \mapsto T$, $V \mapsto 0$ によって準同型

$$s : \mu_{2, A_0} = \text{Spec } A_0[T]/(T^2 - 1) \rightarrow U_{B/A} \otimes_A A_0 = \text{Spec } A_0[U, V]/\left((U + \frac{\omega}{2}V)^2 - 1\right)$$

を定義すれば, s は $\pi : U_{B/A} \otimes_A A_0 \rightarrow \mu_{2, A_0}$ の切断であることが確かめられる.

3.2. (twisted Kummer theory) X を $\mathbb{Z}[\omega, 1/n]$ -scheme とする. このとき, group scheme の完全列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow U_{B/A} \xrightarrow{n} U_{B/A} \longrightarrow 0$$

から完全列

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^0(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) &\longrightarrow H^0(X, U_{B/A}) \xrightarrow{n} H^0(X, U_{B/A}) \\ &\longrightarrow H^1(X, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow H^1(X, U_{B/A}) \xrightarrow{n} H^1(X, U_{B/A}) \longrightarrow \dots \end{aligned}$$

を得る.

特に, R が $\mathbb{Z}[\omega, 1/n]$ 代数なら, 完全列

$$0 \longrightarrow U_{B/A}(R)/n \longrightarrow H^1(R, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) \longrightarrow {}_n H^1(R, U_{B/A}) \longrightarrow 0$$

を得る. さらに, R が局所環なら, $H^1(R, U_{B/A})$ は 2 で消える. これから,

命題 3.3. R を局所 $\mathbb{Z}[\omega, 1/n]$ 代数とする. n が奇数なら, $H^1(R, \mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ は $U_{B/A}(R)/n$ に同型.

言い換えれば,

系 3.4. R を局所 $\mathbb{Z}[\omega, 1/n]$ 代数, S を R の不分岐 n 次巡回拡大とする. n が奇数なら, 射 $\text{Spec } R \rightarrow U_{B/A}$ が存在して図式

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } S & \longrightarrow & U_{B/A} \\ \downarrow & & \downarrow n \\ \text{Spec } R & \longrightarrow & U_{B/A} \end{array}$$

が cartesian となる.

以下, この可換図式を具体的に記述する.

補題 3.5. n を整数 ≥ 3 とする. このとき, $U_{B/A} = \text{Spec } A[U, V]/(U^2 + \omega UV + V^2 - 1)$ の上の n 乗写像は

$$U \mapsto \frac{\zeta^{-1}(U + \zeta V)^n - \zeta(U + \zeta^{-1}V)^n}{\zeta^{-1} - \zeta}, \quad V \mapsto \frac{(U + \zeta V)^n - (U + \zeta^{-1}V)^n}{\zeta - \zeta^{-1}}$$

によって与えられる.

実際, 対応

$$T \mapsto U + \zeta V, \quad \frac{1}{T} \mapsto U + \zeta^{-1}V$$

は $B[1/n]$ の上で group scheme の同型

$$U_{B/A} \otimes_A B\left[\frac{1}{n}\right] = \text{Spec } B\left[\frac{1}{n}\right][U, V]/(U^2 + \omega UV + V^2 - 1) \xrightarrow{\sim} \mathbb{G}_{m, B[1/n]} = \text{Spec } B\left[\frac{1}{n}\right][T, \frac{1}{T}]$$

を与えるので, $\mathbb{G}_m$ における n 乗写像の記述に帰着できる.

系 3.6. R を局所 $\mathbb{Z}[\omega, 1/n]$ 代数, S を R の不分岐 n 次巡回拡大とする. n が奇数なら $u, v \in R$ が存在して $u^2 + \omega uv + v^2 = 1$ で S は

$$R[U, V]/\left(\frac{\zeta^{-1}(U + \zeta V)^n - \zeta(U + \zeta^{-1}V)^n}{\zeta^{-1} - \zeta} - u, \frac{(U + \zeta V)^n - (U + \zeta^{-1}V)^n}{\zeta - \zeta^{-1}} - v\right)$$

に同型となる.

3.7. さらに, 対応 $T \mapsto \frac{U+1}{V}$ によって有理写像

$$i: U_{B/A} = \text{Spec } A[U, V]/(U^2 + \omega UV + V^2 - 1) \rightarrow \text{Spec } A[T]$$

を定義すれば, i は双有理.

補題 3.8. n を整数 ≥ 3 とする. 有理写像 $\psi: \operatorname{Spec} A[T] \rightarrow \operatorname{Spec} A[T]$ を

$$T \mapsto -\frac{\zeta^{-1}(T+\zeta)^n - \zeta(T+\zeta^{-1})^n}{(T+\zeta)^n - (T+\zeta^{-1})^n}$$

によって定義する. このとき, 有理写像の図式

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} A[U, V]/(U^2 + \omega UV + V^2 - 1) & \xrightarrow{i} & \operatorname{Spec} A[T] \\ n \downarrow & & \downarrow \psi \\ \operatorname{Spec} A[U, V]/(U^2 + \omega UV + V^2 - 1) & \xrightarrow{i} & \operatorname{Spec} A[T] \end{array}$$

は可換.

図式の可換性は「半角の公式」を援用して確認できる. これから補題 3.5 あるいは系 3.6 と併せて以下を得る.

系 3.9. R を局所 $\mathbb{Z}[\omega, 1/n]$ 代数, S を R の不分岐 n 次巡回拡大とする. n が奇数なら, 射 $\operatorname{Spec} R \rightarrow \operatorname{Spec} A[T]$ が存在して有理写像の図式

$$\begin{array}{ccc} \operatorname{Spec} S & \longrightarrow & \operatorname{Spec} A[T] \\ \downarrow & & \downarrow \psi \\ \operatorname{Spec} R & \longrightarrow & \operatorname{Spec} A[T] \end{array}$$

が cartesian となる.

系 3.10. R を局所 $\mathbb{Z}[\omega, 1/n]$ 代数, S を R の不分岐 n 次巡回拡大とする. n が奇数なら, $c \in R$ が存在して S は

$$R[T]/\left(\frac{\zeta^{-1}(T+\zeta)^n - \zeta(T+\zeta^{-1})^n}{\zeta^{-1} - \zeta} - c \frac{(T+\zeta)^n - (T+\zeta^{-1})^n}{\zeta - \zeta^{-1}}\right)$$

に同型となる.

補註 3.11. 多項式

$$\frac{\zeta^{-1}(T+\zeta)^n - \zeta(T+\zeta^{-1})^n}{\zeta^{-1} - \zeta}, \frac{(T+\zeta)^n - (T+\zeta^{-1})^n}{\zeta^{-1} - \zeta} \in \mathbb{Z}[\omega][T]$$

は本質的には Čebyšev 多項式である. 対応 $T \mapsto (U+1)/V$ を $T \mapsto -(U+1)/V$ に代えて議論を進めれば陸名 [5] によって得られた n 次巡回拡大に対する生成多項式

$$\frac{\{\zeta^{-1}(T-\zeta)^n - \zeta(T-\zeta^{-1})^n\} - Y\{(T-\zeta)^n - (T-\zeta^{-1})^n\}}{\zeta - \zeta^{-1}}$$

に至る.

また, 対応 $T \mapsto -(U+1)/V$ によって定義される有理写像 $i: U_{B/A} \otimes_A A[1/n] \rightarrow A_{A[1/n]}^1$ は射 $i: U_{B/A} \otimes_A A[1/n] \rightarrow \mathbb{P}_{A[1/n]}^1$ に延長できる. 特に, $\mathbb{Z}[\omega, 1/n]$ 代数であるような体 K に対して単射 $i: U_{B/A}(K) \rightarrow \mathbb{P}^1(K)$ を得る. $U_{B/A}(K)$ の i による像は小松 [4] によって定義された Galois 加群 T_K に他ならない. [4] では Galois 加群 T_K を用いて twisted Kummer theory を定式化している.

補註 3.12. Serre[8], Ch. VI は最初に体の Galois 拡大における正規底の存在を代数群の枠組みで定式化し, そこから Kummer 理論や Artin-Schreier 理論を, さらに, Artin-Schreier-Witt 理論を導いている. そして, 第 9 項の終わりに

Lorsqu'on ne suppose plus que k contienne ε , la théorie de Kummer ne s'applique plus. Toutefois, on peut encore, dans certains cas, réduire la dimension de $G(N)$. Lorsque $n = 3$ par exemple, on peut prendre pour quotient de $G(N)$ le groupe orthogonal G pour la forme quadratique $x^2 - xy + y^2$; on voit facilement que ce groupe contient un sous-groupe N cyclique d'ordre 3 formé de points rationnels sur corps premier, et que l'isogénie $G \rightarrow G/N$ vérifie la propriété universelle de la prop. 7. Au point de vue de la théorie des corps, cela revient à l'énoncé suivant facile à vérifier directement:

En caractéristique différente de 3, toute extension cyclique de degré 3 peut être engendré un élément g ayant pour conjuguées $1/(1-g)$ et $1-1/g$.

と述べている. この一節は torus による Kummer 理論を示唆しているとも読み取れる.

4 Twisted Kummer-Artin-Schreier theory

4.1. p を素数 > 2 とし, $\zeta = e^{2\pi i/p}$, $\omega = \zeta + \zeta^{-1}$, $A = \mathbb{Z}[\omega]$, $B = \mathbb{Z}[\zeta]$ とおく. このとき, B は $A[t]/(t^2 - \omega t + 1)$ に同型なので, このとき,

$$G = G_{B/A} = \text{Spec } A[X, Y]/(X^2 + \omega XY + Y^2 - Y)$$

で乗法は

$$\begin{aligned} X &\mapsto X \otimes 1 + 1 \otimes X - \omega X \otimes X - 2X \otimes Y - 2Y \otimes X - \omega Y \otimes Y, \\ Y &\mapsto Y \otimes 1 + 1 \otimes Y + (\omega^2 - 2)Y \otimes Y + \omega X \otimes Y + \omega Y \otimes X + 2X \otimes X \end{aligned}$$

によって与えられる.

ここで,

$$\lambda = \zeta - \zeta^{-1}, \quad \Theta(T) = \sum_{i=0}^{\frac{p-1}{2}} \binom{p}{i} (-1)^i T^{p-2i}$$

とおく. このとき,

$$\lambda^p = \Theta(\zeta) - \Theta(\zeta^{-1})$$

が成立する. さらに,

$$\tilde{\omega} = \text{Tr}_{B/A} \Theta(\zeta) = \Theta(\zeta) + \Theta(\zeta^{-1}), \quad \tilde{\eta} = \text{Nr}_{B/A} \Theta(\zeta) = \Theta(\zeta) \Theta(\zeta^{-1})$$

とおく. このとき, $\theta = \Theta(\zeta)$ とおけば, $\tilde{B} = A[\theta] \subset B$ は $\theta^2 - \tilde{\omega}\theta + \tilde{\eta} = 0$ によって定義される A の二次拡大. したがって,

$$\tilde{G} = G_{\tilde{B}/A} = \operatorname{Spec} A[X, Y]/(X^2 + \tilde{\omega}XY + \tilde{\eta}Y^2 - Y)$$

で乗法は

$$\begin{aligned} X &\mapsto X \otimes 1 + 1 \otimes X - \tilde{\omega}X \otimes X - 2\tilde{\eta}X \otimes Y - 2\tilde{\eta}Y \otimes X - \tilde{\omega}\tilde{\eta}Y \otimes Y, \\ Y &\mapsto Y \otimes 1 + 1 \otimes Y + (\tilde{\omega}^2 - 2\tilde{\eta})Y \otimes Y + \tilde{\omega}X \otimes Y + \tilde{\omega}Y \otimes X + 2X \otimes X \end{aligned}$$

によって与えられる.

補註 4.1.1. $D = \omega^2 - 4$, $A_0 = A/(D)$ とおく. このとき, $G_{B/A} \otimes_A A_0$ は加法群 $\mathbb{G}_{a, A_0}$ に同型. 実際,

$$G_{B/A} \otimes_A A_0 = \operatorname{Spec} A_0[X, Y]/(X^2 + \omega XY + Y^2 - Y) = \operatorname{Spec} A_0[X, Y]/\left(\left(X + \frac{\omega}{2}Y\right)^2 - Y\right)$$

で対応 $X \mapsto S - \frac{\omega}{2}S^2, Y \mapsto S^2$ は同型

$$\mathbb{G}_{a, A_0} = \operatorname{Spec} A_0[S] \xrightarrow{\sim} G_{B/A} \otimes_A A_0 = \operatorname{Spec} A_0[X, Y]/\left(\left(X + \frac{\omega}{2}Y\right)^2 - Y\right)$$

を定義する.

定理 4.2. (twisted Kummer-Artin-Schreier theory) $A = \mathbb{Z}[\omega]$ の上の group scheme の準同型

$$\Psi : G = \operatorname{Spec} A[X, Y]/(X^2 + \omega XY + Y^2 - Y) \rightarrow \tilde{G} = \operatorname{Spec} A[X, Y]/(X^2 + \tilde{\omega}XY + \tilde{\eta}Y^2 - Y)$$

が対応

$$\begin{aligned} X &\mapsto \frac{1}{\lambda^{2p}} \left[-\Theta(\zeta^{-1})\{1 + \lambda(X + \zeta Y)\}^p + \tilde{\omega} - \Theta(\zeta)\{1 - \lambda(X + \zeta^{-1}Y)\}^p \right], \\ Y &\mapsto \frac{1}{\lambda^{2p}} \left[\{1 + \lambda(X + \zeta Y)\}^p - 2 + \{1 - \lambda(X + \zeta^{-1}Y)\}^p \right] \end{aligned}$$

によって定義される. さらに, Ψ は finite étale で $\operatorname{Ker} \Psi$ は constant group scheme $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ に同型.

実際, $B = \mathbb{Z}[\zeta]$ の上の group scheme の準同型

$$s : G \otimes_A B = \operatorname{Spec} B[X, Y]/(X^2 + \omega XY + Y^2 - Y) \rightarrow \mathcal{G}^{(\lambda)} = \operatorname{Spec} B[T, \frac{1}{1 + \lambda T}],$$

$$\tilde{s} : \tilde{G} \otimes_A B = \operatorname{Spec} B[X, Y]/(X^2 + \tilde{\omega}XY + \tilde{\eta}Y^2 - Y) \rightarrow \mathcal{G}^{(\lambda^p)} = \operatorname{Spec} B[T, \frac{1}{1 + \lambda^p T}]$$

をそれぞれ

$$T \mapsto X + \zeta Y, \frac{1}{1 + \lambda T} \mapsto 1 - \lambda(X + \zeta^{-1}Y)$$

あるいは

$$T \mapsto X + \Theta(\zeta)Y, \frac{1}{1 + \lambda^p T} \mapsto 1 - \lambda^p \{X + \Theta(\zeta^{-1})Y\}$$

によって定義すれば, $s, \tilde{s}$ は同型で, B の上の group scheme の図式

$$\begin{array}{ccc} G \otimes_A B & \xrightarrow{\Psi} & \tilde{G} \otimes_A B \\ s \downarrow & & \downarrow \tilde{s} \\ \mathcal{G}^{(\lambda)} & \xrightarrow[\Psi]{} & \mathcal{G}^{(\lambda^p)} \end{array}$$

は可換. したがって, Kummer-Artin-Schreier 理論から結論を得る.

twisted Kummer theory の場合と同様の議論によって, 例えば以下の結論を得る.

命題 4.3. R を局所 $\mathbb{Z}[\omega]$ 代数とする. このとき, $H^1(R, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ は $\text{Coker}[\Psi : G(R) \rightarrow \tilde{G}(R)]$ に同型.

系 4.4. R を局所 $\mathbb{Z}[\omega]$ 代数, S を R の不分岐 p 次巡回拡大とする. このとき, 射 $\text{Spec } R \rightarrow \tilde{G}$ が存在して図式

$$\begin{array}{ccc} \text{Spec } S & \longrightarrow & G \\ \downarrow & & \downarrow \Psi \\ \text{Spec } R & \longrightarrow & \tilde{G} \end{array}$$

が cartesian となる.

例 4.5. $p = 3$ とする. このとき,

$$\zeta = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}, \omega = -1$$

したがって,

$$G = G_{B/A} = \text{Spec } \mathbb{Z}[X, Y]/(X^2 - XY + Y^2 - Y)$$

で乗法は

$$\begin{aligned} X &\mapsto X \otimes 1 + 1 \otimes X + X \otimes X - 2X \otimes Y - 2Y \otimes X + Y \otimes Y, \\ Y &\mapsto Y \otimes 1 + 1 \otimes Y - Y \otimes Y - X \otimes Y - Y \otimes X + 2X \otimes X \end{aligned}$$

によって与えられる. また,

$$\theta = \frac{5 + 3\sqrt{-3}}{2}, \tilde{\omega} = 5, \tilde{\eta} = 13$$

なので,

$$\tilde{G} = G_{\tilde{B}/A} = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[X, Y]/(X^2 + 5XY + 13Y^2 - Y)$$

で乗法は

$$\begin{aligned} X &\mapsto X \otimes 1 + 1 \otimes X - 5X \otimes X - 26X \otimes Y - 26Y \otimes X - 65Y \otimes Y, \\ Y &\mapsto Y \otimes 1 + 1 \otimes Y - Y \otimes Y + 5X \otimes Y + 5Y \otimes X + 2X \otimes X \end{aligned}$$

によって与えられる. さらに, 準同型

$$\Psi : G = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[X, Y]/(X^2 - XY + Y^2 - Y) \rightarrow \tilde{G} = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[X, Y]/(X^2 + 5XY + 13Y^2 - Y)$$

は対応

$$X \mapsto -X - 2Y + 4XY + 3Y^2 - 3XY^2 - Y^3, \quad Y \mapsto Y - 2Y^2 + Y^3$$

によって与えられる.

参考文献.

- [1] P. Furtwängler – Über die Reziprozitätsgesetze der ℓ -ten Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern, wenn ℓ eine ungerade Primzahl bedeutet. Math. Ann. 58 (1904) 1–50
- [2] P. Furtwängler – Allgemeiner Existenzbeweis für den Klassenkörper eines beliebigen Zahlkörpers. Math. Ann. 63 (1907) 1–37
- [3] A. Grothendieck – Le groupe de Brauer. Dix exposés sur la cohomologie des schémas, North-Holland, Amsterdam (1968) 46–188
- [4] T. Komatsu – Arithmetic of Rikuna's generic cyclic polynomial and generalization of Kummer theory. Manuscripta Math 114 (2004) 265–279
- [5] Y. Rikuna – On simple families of cyclic polynomials. Proc. Amer. Math. Soc. 130 (2002) 2215–2218
- [6] T. Sekiguchi, N. Suwa – Théorie de Kummer-Artin-Schreier et applications. J. Théorie des Nombres de Bordeaux 7 (1995) 177–189
- [7] T. Sekiguchi, F. Oort, N. Suwa – On the deformation of Artin-Schreier to Kummer. Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 22 (1989) 345–375
- [8] J. P. Serre – Groupes algébriques et corps de classes. Hermann (1959)
- [9] N. Suwa – Twisted Kummer and Kummer-Artin-Schreier theories. Preprint
- [10] W. C. Waterhouse – A unified Kummer-Artin-Schreier sequence. Math. Ann. 277 (1987) 447–451
- [11] W. C. Waterhouse, B. Weisfeiler – One-dimensional affine group schemes. J. Algebra 66 (1980) 550–568