

Wielandt 型 transfer 定理とその応用

北大、理 佐々木洋城

0. transfer 理論についての吉田氏による詳細な論説[5] の中で次の問題が提出された。

問題 コホモロジー的とは限らない群関手についての Wielandt 型 transfer 定理はあるか。

ここではこの問題に対する肯定的な解決を与え、その応用として加群の Green 対応に関連して有限群の cohomology 群についての transfer 定理を示す。

以下では G は有限群、 k は特にことわらない限り単位元をもつ可換環であるとする。ここでは k 上の G -関手 a は G の各部分群 H に対して k -加群 $a(H)$ は k 上有限生成であるとする。考える kG -加群は有限生成右 kG -加群である。

1. Pairing

定義 1.1 a, b, c を k 上の G -関手とする。pairing $a \times b \rightarrow c$ とは k -双線型子像

$$a(H) \times b(H) \longrightarrow c(H) : (\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta \quad (H \leq G)$$

の族で次の公理をみたすものをいう. ($H \leq K \leq G, g \in G$ とする)

$$(P.1) \quad (\alpha'\beta')_H = \alpha'_H \beta'_H \quad \alpha' \in a(K), \beta' \in b(K),$$

$$(P.2) \quad (\alpha\beta)^g = \alpha^g \beta^g \quad \alpha \in a(H), \beta \in b(H),$$

$$(P.3) \quad \alpha^K_{\beta'} = (\alpha\beta'_H)^K \quad \alpha \in a(H), \beta' \in b(K),$$

$$(P.4) \quad \alpha'\beta^K = (\alpha'_H \beta)^K \quad \alpha' \in a(K), \beta \in b(H).$$

定義 1.2 r を k 上の G -関手とする. r が pairing

$r \times r \rightarrow r$ をもち, 各 $H \leq G$ に対して双線型写像

$$r(H) \times r(H) \longrightarrow r(H) : (\alpha, \beta) \mapsto \alpha\beta$$

によって $r(H)$ が単位元をもつ結合的 k -多元環となり, かつ ρ^K_H が単位元を保存するとき ring とよばれる.

k 上の G -関手 r が ring であるとする. k 上の G -関手 a が r -加群であるとは pairing $a \times r \rightarrow a$ が存在し各 $H \leq G$ に対して双線型写像

$$a(H) \times r(H) \longrightarrow a(H) : (\alpha, \phi) \mapsto \alpha\phi$$

によって $a(H)$ が右単位的 $r(H)$ -加群になることという.

定義 1.3 k 上の G -関手とその間の射のつくるアーベル圏を $M_k(G)$ で表わす. $M_k(G)$ の部分圏で ring を対象とし ring homomorphism を射とする圏を $A_k(G)$ で表わす.

定義 1.4 $r \in A_k(G)$ が local ring であるとは $r(G)$ が局所環であることをいう。

例 U を kG -加群とする。 U を係数加群とする n 次 cohomology 群 G -関手 $\hat{h}_U^n$:

$$\hat{h}_U^n(H) = \hat{H}^n(H, U) \text{ , } n \text{ 次 Tate cohomology 群};$$

$$\tau_H^K = \text{cor}_{H,K} ;$$

$$\rho_H^K = \text{res}_{K,H} ;$$

$$\sigma_H^G = \text{con}_H^G .$$

U の中心化群 G -関手 c_U :

$$c_U(H) = \{ u \in U \mid uh = u \text{ for all } h \in H \} ;$$

$$\tau_H^K : u \mapsto u^K = \sum_{t \in [H \setminus K]} ut ;$$

$$\rho_H^K : u \mapsto u \text{ (inclusion)} ;$$

$$\sigma_H^G : u \mapsto ug .$$

$E = \text{End}_k(U)$ とおく。 E を次の様にして G -多元環とする:

$$\phi \in E, g \in G \text{ に対し } \phi^g : u \mapsto ((ug^{-1})\phi)g \quad (u \in U),$$

E の中心化群 G -関手 c_E は定義 1.2 の意味で ring である。

これを U の自己準同型環 G -関手とよび e_U で表わす。

任意の $\phi \in e_U(H)$ は準同型 $\phi_* : \hat{h}_U^n(H) \rightarrow \hat{h}_U^n(H)$ とひきおこし

双線型子像

$$\hat{h}_U^n(H) \times e_U(H) \rightarrow \hat{h}_U^n(H) : (\alpha, \phi) \mapsto \alpha\phi_*$$

は pairing の公理とみなす。従って $\hat{h}_U^n$ は e_U -加群である。

同様に c_U は e_U -加群である。

2. G -関手の Green correspondent

はじめに記号を用意する。 $a = (a, \tau, \rho, \sigma)$ を k 上の G -関手、

H を $K \leq G$ の部分群の族とするとき

$$a(H)^K = \sum_{H \in H} a(H) \tau_H^K,$$

以下この節では k を完備局所的単項 ideal 整域とする。

定義 2.1 $r \in A_k(G)$ を local ring, $a \in M_k(G)$ を r -加群とす

る。 D と r の defect 群とし $H \geq N_G(D)$,

$$X = \{ D^g \cap D \mid g \in G - H \},$$

$$Y = \{ D^g \cap H \mid g \in G - H \}$$

とする。

$$1_H = \varepsilon_0 + \cdots + \varepsilon_n$$

を $r(H)$ の単位元 1_H の直交原始巾等元の和による分解とする。

Green [3] の Proposition 4.34 により丁度 1 個の ε_i に対して

$\varepsilon_i r|_H \varepsilon_i$ が D と defect 群としてもつ。この様な ε_i を ε とおくと

$$1_H \equiv \varepsilon \pmod{r(Y)^H}, \quad \varepsilon^G \equiv 1_G \pmod{r(X)^G}$$

が成り立つ。 X が D の真部分群の族であることから ε^G が $r(G)$

の可逆元であることがわかる。H-関手 b を次の様に定義し、これを a の (G, D, H, r) に関する Green correspondent という：

$$b(K) = a(K)\varepsilon_K \quad (K \leq G).$$

命題 2.1 定義 2.1 の記号の下で次が成り立つ。

- (1) b は $a|_H$ の直和因子であり、 $\varepsilon|_{H^e}$ -加群である。
 (2) $\lambda_H^G : a(G) \rightarrow b(H) : \alpha \mapsto \alpha_H \varepsilon$ 1 次の同型をひきおこす：

$$a(G)/a(X)^G \cong b(H)/b(Y)^H$$

例 U を直既約 kG -加群、 D を U の vertex、 $N_G(D) \leq H \leq G$ とし、 V を U の (G, D, H) に関する Green correspondent とする。このとき V を係数加群とする n 次 cohomology 群 H-関手 $\hat{h}_V^n$ は U を係数加群とする n 次 cohomology 群 G-関手 $\hat{h}_U^n$ の (G, D, H, e_U) に関する Green correspondent である。又 V の中心化群 H-関手 c_V は U の中心化群 G-関手 c_U の (G, D, H, e_U) に関する Green correspondent である。命題 2.1 により同型

$$\hat{H}^n(G, U) / \sum_{X \in X} \hat{H}^n(X, U) \text{cor}_{X, G} \cong \hat{H}^n(H, V) / \sum_{Y \in Y} \hat{H}^n(Y, V) \text{cor}_{Y, H},$$

$$c_U(G)/c_U(X)^G \cong c_V(H)/c_V(Y)^H$$

が成り立つ。

3. Transfer 定理

この節の目的は命題 2.1 (2) で定義した $\lambda_H^G : a(G) \rightarrow a(H)$ が同型になるための十分条件を与えることである。初めに次の key lemma を述べる。

補題 3.1 $r \in A_k(G)$ を ring, $a = (a, \tau, \rho, \sigma) \in M_k(G)$ を r -加群とする。 $H \leq G$ とし r は H -projective であると仮定する。 $\phi \in r(H)$ を ϕ^G が $r(G)$ の単数であるものとする。次の様に 2 つの k -準同型を定義する:

$$\lambda_H^G : a(G) \rightarrow a(H) : \alpha \mapsto \alpha_H \phi,$$

$$\mu_H^G : a(H) \rightarrow a(G) : \beta \mapsto (\beta \phi)^G.$$

このとき次が成立する:

(1) $\rho_H^G, \lambda_H^G : a(G) \rightarrow a(H)$ は共に分解型の単型である。

(2) $\tau_H^G, \mu_H^G : a(H) \rightarrow a(G)$ は共に分解型の全型である。

$$\begin{aligned} (3) \quad a(H) &= \text{Im } \rho_H^G \oplus \text{Ker } \mu_H^G \\ &= \text{Im } \lambda_H^G \oplus \text{Ker } \tau_H^G. \end{aligned}$$

定義 3.1 a を k 上の G -関手とする。 $X, S \leq G$ かつ $\alpha \in a(S)$ とする。次が成立するとき, (G, S, α, X) を (a に関して) 特異な 4 つ組という:

$$(S.1) \quad \alpha_X^G \neq 0,$$

(S.2) S の部分群 T が X の真部分群に G で共役ならば

$$\alpha_T = 0.$$

部分群 S を特異な部分群といい S が G の真部分群であるとき
特異な 4-組 (G, S, α, X) は proper であるといわれよう.

以下では k を完備局所的単項 ideal 整域とし 2 節の記号の下
で議論する.

D は $\varepsilon r|_H \varepsilon$ の defect 群であるから $r(D)$ の元 ψ で $\varepsilon = \varepsilon \psi^H \varepsilon$
となるものが存在する. ε^G の逆元を δ とし $\phi = \varepsilon_D \psi \varepsilon_D \delta_D$ とおく
と $\phi^H = \varepsilon \delta_H$, $\phi^G = 1$ である.

補題 3.2 上の記号の下で次は同値である:

- (1) $\lambda_H^G : a(G) \rightarrow b(H) : \alpha \mapsto \alpha_H \varepsilon$ は同型である.
- (2) $(\text{Im } \rho_D^G) \varepsilon_D = (\text{Im } \rho_D^H) \varepsilon_D$.
- (3) $(\text{Im } \rho_D^G) \phi = (\text{Im } \rho_D^H) \phi$.

定理 1. k を完備局所的単項 ideal 整域とし, $r \in A_k(G)$ と
local ring, $a \in M_k(G)$ と r -加群とする. D と r の defect 群,
 $N_G(D) \leq H \leq G$, b と a の (G, D, H, r) に関する Green correspondent
とする. $G-H$ の任意の元 g に対して $D^g \cap D$ が $b|_D$ に関する
特異な部分群でなければ $\lambda_H^G : a(G) \rightarrow b(H) : \alpha \mapsto \alpha_H \varepsilon$ は

同型である. ここで ε は b を定義する $r(H)$ の原始巾等元である.

証明の概略は次の通りである. $(\text{Im } \rho_D^G)\phi < (\text{Im } \rho_D^H)\phi$ と仮定する. 補題 3.1 から $a(H)$ の元 α で $(\alpha_D\phi)^G = 0, \alpha_D\phi \neq 0$ となるものが存在する. ϕ のとり方から $(\alpha\varepsilon)_D \neq 0$ である. X を D の部分群で $(\alpha\varepsilon)_X \neq 0$ なるもので最小位数のものとする.

Mackey の公理と pairing の公理により,

$$\sum_{g \in \Gamma} (((\alpha\varepsilon)_D^g - (\alpha\varepsilon)_{D^g \cap D})\phi^g_{D^g \cap D} \varepsilon_{D^g \cap D})^D_X = -(\alpha\varepsilon)_X,$$

ここで Γ は G における (D, D) -両側剰余類の代表系である.

従って $G-H$ の元 g で $\zeta = ((\alpha\varepsilon)_{D^g \cap D}^g - (\alpha\varepsilon)_{D^g \cap D})\phi^g_{D^g \cap D} \varepsilon_{D^g \cap D}$ に対して $\zeta_X^D \neq 0$ であり $\zeta \in b(D^g \cap D)$, かつ $(D, D^g \cap D, \zeta, X)$ は $b|_D$ に関する特異な 4 組になるものが存在して、矛盾.

注意 $N = N_G(D)$ とおく. c を b の $(H, D, N, \text{er}|_{H\varepsilon})$ に関する Green correspondent とする. c は a の (G, D, N, r) に関する Green correspondent である. 従って例えば $G-N$ の任意の元 g に対して $D^g \cap D$ が $c|_D$ に対する特異な 4 組でなければ, 任意の $H \geq N_G(D)$ に対して $a(G)$ と $b(H)$ は同型である.

4. 加群の Green correspondence と cohomology 群

この節では定理 1 を cohomology 群に応用してみる. 以下では

次の記号と固定して用いる:

k : 完備局所的単項 ideal 整域, (π) : k の極大 ideal

p : $k/(\pi)$ の標数

U : 直既約 kG -加群, D : U の vertex, W : 対応する source

H : $N_G(D)$ を含む G の部分群, V : U の (G, D, H) に関する Green correspondent.

補題 4.1 D が W を係数加群とする n 次 cohomology 群 D -関手 $\hat{h}_W^n$ の socle $\text{Soc}(\hat{h}_W^n)$ に対する proper 特異部分群をもたなければ $\hat{H}^n(G, U)$ と $\hat{H}^n(H, V)$ は同型である. k が標数 p の体で, D が中心化群 D -関手 c_W に対する proper 特異部分群をもたなければ $c_U(G)$ と $c_V(H)$ は同型である.

証明の概略は次の通りである. $a = \text{Soc}(\hat{h}_U^n)$, $b = \text{Soc}(\hat{h}_V^n)$ とおく. b は a の (G, D, H, e_U) に関する Green correspondent である. cohomology 群は有限であるから, $\lambda_{H|a}^G : a(G) \rightarrow b(H)$ が同型であることを示せばよい, ここで $\lambda_{H|a}^G$ は 2 節で定義された $\hat{h}_U^n(G) \rightarrow \hat{h}_V^n(H)$ の分解型の単型である. $H = N_G(D)$ と仮定し D が $b|_D$ に対する proper 特異部分群をもたないことを示せば十分である. V は W^H の直和因子に同型であるから $V|_D$ は W^h , $h \in H$ 達の直和に同型である. よって D が各 $h \in H$ に対して $\text{Soc}(\hat{h}_{W^h}^n)$ に対する proper 特異部分群をもたないことを示せば

よ、これは仮定から容易に従う。中心化群関手 c_U, c_V を考えれば同様の議論により第2の主張に従う。

この補題を用いて次が示される。

定理2 (1) D が可換で任意の $w \in W$ と $d \in D$ に対して

$[w, d; p-1] = 0$ が成立すれば $\hat{H}^n(G, U)$ と $\hat{H}^n(H, V)$ は同型である。

(2) k が標数 p の体で任意の $w \in W$ と $d \in D$ に対して

$[w, d; p-1] = 0$ が成立するならば $c_U(G)$ と $c_V(H)$ は同型である。

(3) k が標数 p の体で $W \cong k$, D が弱正則ならば $H^1(G, U)$ と $H^1(H, V)$ は同型である。

References

- [1] W.Feit, Representations of Finite Groups (mimeographed note, Yale Univ. 1969).
- [2] J.A.Green, A transfer theorem for modular representations, J.Algebra 1 (1964) 73 - 84.
- [3] _____, Axiomatic representation theory for finite groups, J.Pure Appl. Algebra 1 (1971) 41 - 77.
- [4] T.Yoshida, On G -functors (I): Transfer theorems for cohomological G -functors, Hokkaido Math. J. 9 (1980) 222 - 257.

[5] 吉田知行, トポスにおける transfer 理論, 数学 32
(1980) 193 - 212.

[6] H.Sasaki, Green correspondence and transfer theorems of
Wielandt type for G-functors, preprint.