

円形ピストン音源から放射される強非線形音響衝撃波の伝播

北大工 矢野 猛 (Takeru Yano)

北大工 井上 良紀 (Yoshinori Inoue)

1. はじめに

非線形音響学 (nonlinear acoustics) において取り扱われる問題のなかでも、ピストン音源から放射される音波の非線形伝播の問題は、非線形効果 (音響衝撃波の形成と発展) に回折効果が結合した現象が現れうるという点でとくに興味深い問題の一つであり、これに関する理論的な研究も多い (例えば、[1]–[3])。しかしながら、それらは全て弱非線形理論の範囲内の研究であり、有限ではあるが十分小さい振幅を持つ音波にしか有効ではない。すなわち、次式で定義される音響マッハ数 M が 1 に比べて十分小さい場合にのみ適用できる：

$$M \equiv ka \ll 1 \quad \left(k \equiv \frac{\omega}{c_0} \right) \quad (1)$$

ここで、 a はピストンの振動の振幅、 ω はその角振動数、 c_0 は初期の静止一様状態における音速である。これに対して本研究は、

$$M = O(1) \quad (2)$$

である大振幅の音波を対象とする。有限振幅ではあっても $M \ll 1$ である音波が弱非線形音波と呼ばれるのに対応して、 $M = O(1)$ の音波を強非線形音波と呼ぶことにする。強非線形音波の伝播過程の理論的研究は始まったばかりといってよく [4]、まだ十分解明されていない点が多い。

今回、われわれは、円形ピストン音源から理想気体中に放射される強非線形音波の伝播過程および強非線形音響衝撃波の形成と発展の過程の特徴を、数値計算を用いて明らかにすることに取り組む (図 1 参照)。とくに、衝撃波面を不連続面とみなすことができ、そこを除いて粘性と熱伝導性によるエネルギー散逸が無視できる場合を考察する。

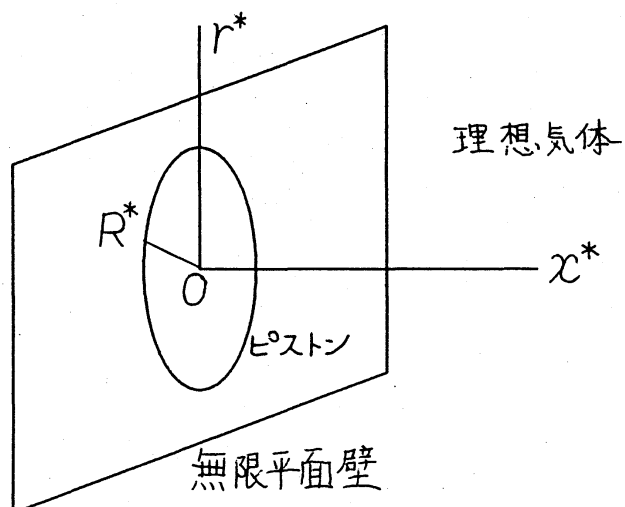


図1. 概略図

このための条件は、音響レイノルズ数 Re を用いて

$$Re \equiv \frac{(\gamma + 1)c_0 a}{\delta} \gg 1 \quad (3)$$

(γ : 気体の比熱比, δ : 音の拡散率) と表される[2]。さらに、ピストン近傍に著しい回折効果が現れる場合、すなわち、放射される音波の代表的な波長 $2\pi k^{-1}$ とピストン半径 R^* が同程度である場合に問題を限定する。以上のことから、本研究が扱う現象は、三つの無次元パラメータに対する条件

$$M = O(1), \quad Re \gg 1, \quad R \equiv \frac{kR^*}{2\pi} = O(1) \quad (4)$$

によって特徴づけられることになる。このとき、回折された波の干渉の結果として音源近傍に生じる複雑な波形は、強い非線形効果によって急激に変形され、衝撃波へと発展していく。このようなピストン近傍における回折と強非線形効果の結合した現象を数値的に解析することが本研究の目的である。

2. 問題とその定式化

$x^* = 0$ に無限平面壁があり、壁上に半径 R^* の円形ピストンが、その中心軸が x^* 軸と一致するよう取り付けられている (図 1 参照)。このピストンが、時刻 $t^* = 0$ から振幅 a 、角振動数 ω の正弦振動を行い、 $x^* > 0$ の半無限領域を占めている理想気体中に音波を放射する。とくに、条件 (4) によって特徴づけられる現象を考察する。

以下のような無次元変数を導入し問題を定式化する：

$$t = \omega t^*, \quad x = kx^*, \quad r = kr^*, \quad u = \frac{u^*}{c_0}, \quad v = \frac{v^*}{c_0}, \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_0}, \quad p = \frac{p^*}{\rho_0 c_0^2} \quad (5)$$

ここで、 r^* は x^* 軸からの距離、 u^* と v^* はそれぞれ x^* 方向と r^* 方向の流速、 ρ^* は気体の密度、 p^* は圧力であり、添え字 0 は初期の静止一様状態における量であることを意味する。 x 軸のまわりの対称性から、諸量は x 、 r 、および t の関数となる。したがって、支配方程式 (質量、運動量、および、エネルギーの保存則) は以下のように表される：

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial r} + \frac{\rho v}{r} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(p + \rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial r} + \frac{\rho uv}{r} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(p + \rho v^2)}{\partial r} + \frac{\rho v^2}{r} = 0 \quad (8)$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} + \frac{\partial[(E_t + p)u]}{\partial x} + \frac{\partial[(E_t + p)v]}{\partial r} + \frac{(E_t + p)v}{r} = 0 \quad (9)$$

ただし、 $E_t = \rho(u^2 + v^2)/2 + p/(\gamma - 1)$ は無次元化された単位体積あたりの理想気体の全エネルギーである。

ピストンが振動を開始するまで ($t < 0$) は気体は静止一様状態にあるので、初期条件

$$t = 0 \quad \text{において} \quad u = v = 0, \quad \rho = 1, \quad p = \frac{1}{\gamma} \quad (10)$$

を課す。ピストンと平面壁は剛体であると仮定し、ピストンの変位が

$$x = M(\cos t - 1) \quad (11)$$

で与えられる場合を考えることにすると、境界条件は

$$u = \begin{cases} -M \sin t & (x = M(\cos t - 1) \text{ かつ } 0 \leq r < 2\pi R \text{ において}) \\ 0 & (x = 0 \text{ かつ } 2\pi R < r \text{ において}) \end{cases} \quad (12)$$

$$v = 0 \quad (r = 2\pi R \text{ かつ } 0 < x < M(\cos t - 1) \text{ において}) \quad (13)$$

となる。また、問題の対称性から、 x 軸上で $v = 0$ とする。さらに、十分遠方 ($x \rightarrow \infty$ と $r \rightarrow \infty$) では、気体は (10) 式で定められる静止一様状態にあるとする。

強非線形音波の伝播過程を解析するためには、散逸項を陽に含まない保存則 (6)–(9) を、衝撃波を含む流れ場の計算に適した差分法を用いて直接数値的に解くという解析方法が有効である[4]。4 節に Osher スキーム[5,6] を用いて数値的に得られた結果を示す。

3. ピストン音源から放射される線形音波

この節では、円形ピストン音源から放射される線形音波のピストン近傍でのふるまいを述べる (ピストン近傍では弱非線形音波も第一近似では線形音波とみなされる)。次節で、以下に示す線形波と強非線形波の数値解との比較を行う。

2 節で定式化した問題に対応する線形問題 ($M \rightarrow 0, Re \gg 1$) の解は、速度ポテンシャルに対する波動方程式の初期値・境界値問題を解くことによって容易に得ることができる。その結果を用いれば、例えば、圧力 (音圧) は次式で与えられる：

$$\frac{p^* - p_0}{M\rho_0 c_0^2} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi R} \sigma d\sigma \int_0^{2\pi} H(t - \eta) \frac{\cos(t - \eta)}{\eta} d\psi \quad (14)$$

$$\eta = \sqrt{x^2 + r^2 + \sigma^2 - 2r\sigma \cos \psi} \quad (15)$$

ここで、 $H(\cdot)$ は Heaviside の単位階段関数である。(14) 式は $R \rightarrow \infty$ の極限で一次元平面波の解になる。また、(14) 式右辺で、 $H(t - \eta)$ をとりのぞくと、ピストンが定常振動し

ている場合の境界値問題の解が得られる[7]。以下に示す定性的な特徴は、よく知られている定常振動の解の特徴と一致している。(14) 式の二重積分を台形公式を用いて数値積分した結果を図 2 に示す。図 2 (a)(b) は、それぞれ、 $R = 1, 3$ に対する、 $t = 12\pi$ (ピストンが振動を開始してから 6 周期目) の圧力波形で、図 3 (a)(b) が対応する等圧線図である。等圧線は規格化された圧力の間隔が 0.179 になるようにひかれている。明らかに、 $R = 3$ の場合の方がより複雑な音場が形成されている。 $r > 2\pi R$ の領域に回折して行く波の振幅は非常に小さいこともわかる。さらに、(i) $R = 1$ の場合、波面はほぼ球面状に広がって行く。ピストン前方へ伝播していく波と周囲へ回折して広がって行く弱い波との間には位相のずれがある；(ii) $R = 3$ の場合、 $r \lesssim 2\pi R$ の領域では波面はほぼピストン面に平行であるが、回折の結果として生じる干渉によって、 r 方向に振幅の極値が複数存在し、 x 方向の振幅の変化も単調ではない、等の特徴をみてとることができる。

4. 強非線形音響衝撃波の形成と発展

初期値・境界値問題 (6)–(13) を、空間三次精度、時間一次精度の Osher スキームを用いてを解いた結果を示す。この節では、3 節で見た線形問題の解、および、強非線形平面波の解析結果[4] ($M = O(1)$, $Re \gg 1$, $R \rightarrow \infty$ のピストン音源の問題に対応する) との比較を行いながら、ピストン音源から放射される強非線形波の特徴を明らかにしていく。

A. 圧力波形と衝撃波面の形状

図 4 に、 $M = 0.1$ で $R = 1$ と $R = 3$ の場合の、時刻 $t = 12\pi$ における圧力波形[図 4 (a)(c)]および等圧線図[図 4 (b)(d)]を示す。等圧線は図 3 (a)(b) と同じ間隔でひかれている。衝撃波面の形状は、図 4 (b)(d) において、等圧線の密集によって示されている。ピストンから放射された音波は、強い非線形効果のために直ちに大きく歪められ、ピストンの近傍で比較的強い衝撃波を形成している。

線形解のふるまい[図 2 (a)、図 3 (a)]と比較してわかるように、ピストン前方での干渉の弱い $R = 1$ の場合には x 軸上に強非線形平面波[4] に近い鋸歯状波型の波形が得られる[図 4 (a)(b) 参照]。これに対して、線形解[図 2 (b)、図 3 (b) 参照]においても強い干渉によって複雑な波形が得られていた $R = 3$ の場合には、非線形効果のためにさらに複雑な流れ場が形成されている。すなわち、 x 軸近傍にはピストン面とほぼ平行な波面を持つ衝撃波が生じ、 x 軸から離れたところには球面状の波面を持つ衝撃波が生じる。これらの衝撃波の交差点から後方へ向かって、非線形効果により歪められた (衝撃波へ発展する直前の状態の) 圧縮波が伸びている[図 4 (c)(d)]。

B. 音響流

$Re \gg 1$ かつ $M = O(1)$ の大振幅音波の伝播過程に現れる音響流は、最も興味深い強非線形現象の一つである[4]。本研究では、音響流の流速ベクトル $\mathbf{v}_s = (u_s, v_s)$ は、以下のように、無次元化された質量流束密度ベクトルの時間平均で定義する：

$$u_s(t, x, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{t-2\pi}^t \rho u \, dt, \quad v_s(t, x, r) = \frac{1}{2\pi} \int_{t-2\pi}^t \rho v \, dt \quad (16)$$

線形理論 ($M \rightarrow 0$) の範囲内では、当然のことながら、物理量の変動の時間平均は全て零であり、音響流も存在しない。弱非線形理論 ($M \ll 1$) においては、 $O(M^2)$ の音響流として Eckart の流れ[8]が知られているが、これは、 $Re \ll 1$ かつ $R \gg 1$ の弱非線形音波によって励起される音響流であり、本問題と対応しない。

図 5 に、 $M = 0.3$ で $R = 2$ の場合の音響流の流速ベクトル $\mathbf{v}_s$ を矢印で示す。 $|\mathbf{v}_s|$ が 0.01 より小さい点では、計算誤差の影響が無視できないため、矢印は描かれていない。図から、音響流が点 $(x, r) \cong (2\pi, 2\pi R)$ に中心を持つ、波長程度の大きさの、渦状の流れをともなうことがわかる (三次元空間では渦輪状である)。音響流の最大流速は $M = 0.3, R = 2$ の場合、0.14 であり、 $M = 0.3$ の場合の強非線形平面波[4]の音響流の流速 0.018 より 7 倍以上も速い。また、 M を小さくすると音響流の流速は減少する。

音響流によって、ピストン近傍の領域の気体は徐々に遠方へと運ばれていき、この領域の密度は時間が経つにつれて減少していく。実際、無次元化密度の時間平均

$$\bar{\rho} \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{t-2\pi}^t (\rho - 1) \, dt \quad (17)$$

の分布を等高線で示すと、確かに、 $x = 0$ 近傍の平均の密度は初期状態 ($\bar{\rho} = 0$) より低下している (図 6)。この結果、強非線形平面波[4]の場合と同様に、音源近傍の領域の気体は時間とともに希薄になっていく。ただし、図 5 に示されている音響流の流れ場は、 $t = 12\pi$ (ピストンが振動を開始してから 6 周期) のものであるから、さらに時間が経過すると渦の中心部の移動や音響流の流速分布の変化が生じる可能性はある。

5. おわりに

今回の数値計算の結果、円形ピストンから放射される強非線形波の近傍場における、ピストンが振動を開始してから数周期の間の伝播過程のいくつかの特徴が見いだされた。以下に要約すると、

- (i) $R = 1$ のときは、 x 軸上に強非線形平面波の場合と同様な鋸歯状波型の波形が形成

される。 $R = 3$ のときは衝撃波の干渉によってピストン前方の流れ場はさらに複雑になる。

- (ii) ピストン正面に渦輪状の音響流が生じる。その流速の最大値は強非線形平面波のそれよりも数倍大きい。
- (iii) 音響流によって気体が遠方へ運ばれるために、ピストン近傍の気体の平均密度は時間とともに低下する。

この現象に対する理解をさらに深めるため、より広い空間にわたるより長い時間の波の伝播過程を調べる必要があると考えている。

参考文献

- [1] J. C. Lockwood, T. G. Muir, and D. T. Blackstock, "Directive harmonic generation in the radiation field of a circular piston," *J. Acoust. Soc. Am.*, **53**, 1148–1153 (1973).
- [2] O. V. Rudenko and S. I. Soluyan, *Theoretical foundations of nonlinear acoustics*, (Consultant Bureau, New York, 1977), Chap. 9.
- [3] S. I. Aanonsen, T. Barkve, J. N. Tjøtta, and S. Tjøtta, "Distortion and harmonic generation in the nearfield of a finite amplitude sound beam," *J. Acoust. Soc. Am.*, **75**, 749–768 (1984).
- [4] Y. Inoue and T. Yano, "Propagation of acoustic shock waves of large amplitude," In *Frontiers of Nonlinear Acoustics-12th ISNA* edited by M. F. Hamilton and D. T. Blackstock, (Elsevier, London, 1990), pp. 141–146.
- [5] S. Osher and F. Solomon, "Upwind difference schemes for hyperbolic systems of conservation laws," *Math. Comp.*, **38**, 339–374 (1982).
- [6] S. R. Chakravarthy and S. Osher, "Computing with high-resolution upwind schemes for hyperbolic equations," in *Large-Scale Computations in Fluid Mechanics*, part 1, edited by B. Engquist, S. Osher, and R. C. J. Somerville (American Mathematical Society, Rhode Island, 1985), pp. 57–86.
- [7] J. Zemanek, "Beam Behavior within the nearfield of a vibrating piston," *J. Acoust. Soc. Am.*, **49**, 181–191 (1971).
- [8] C. Eckart, "Vortices and streams caused by sound waves," *Phys. Rev.*, **73**, 68–76 (1948).

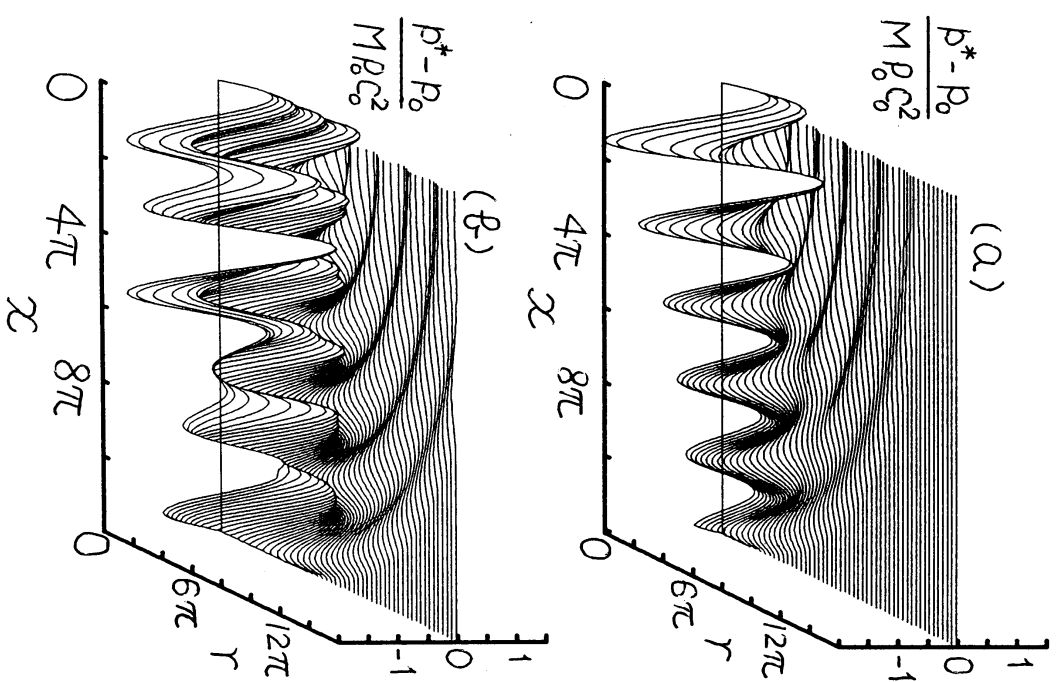


図2. 線形音波の圧力波形

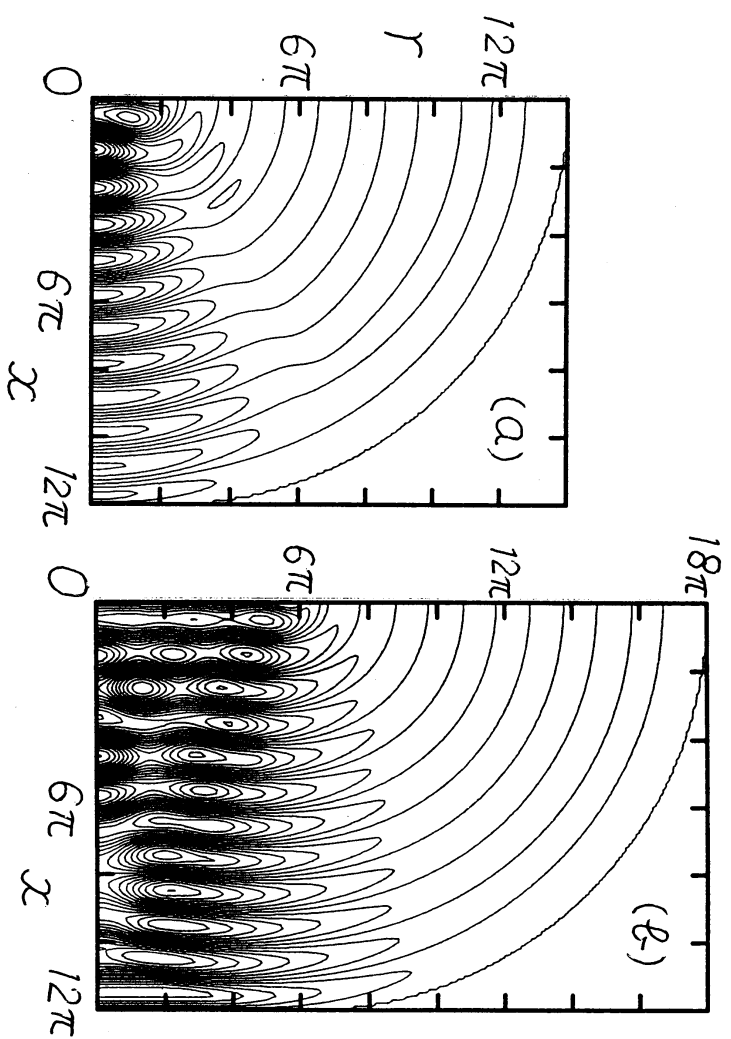


図3. 線形音波の等圧線図

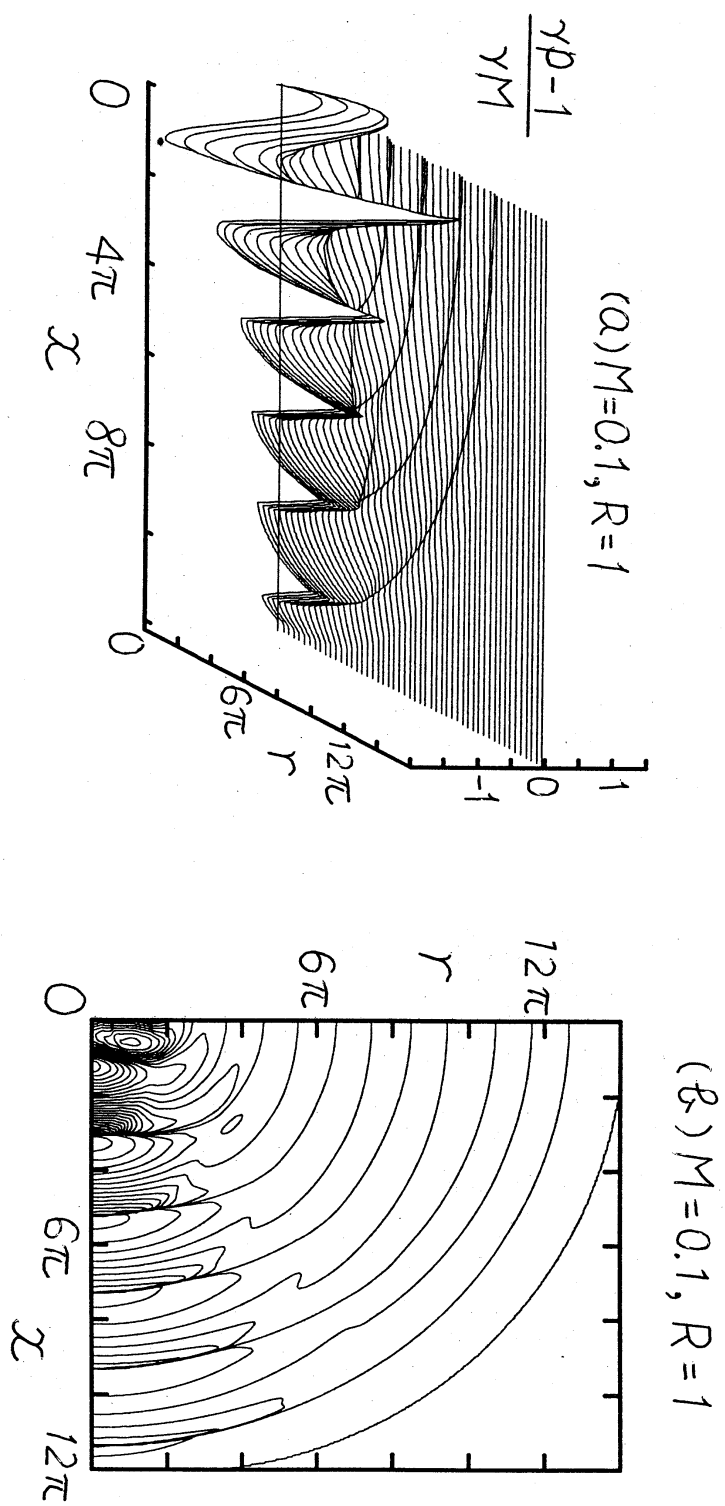


図4. 強非線形波の圧力波形と等圧線図

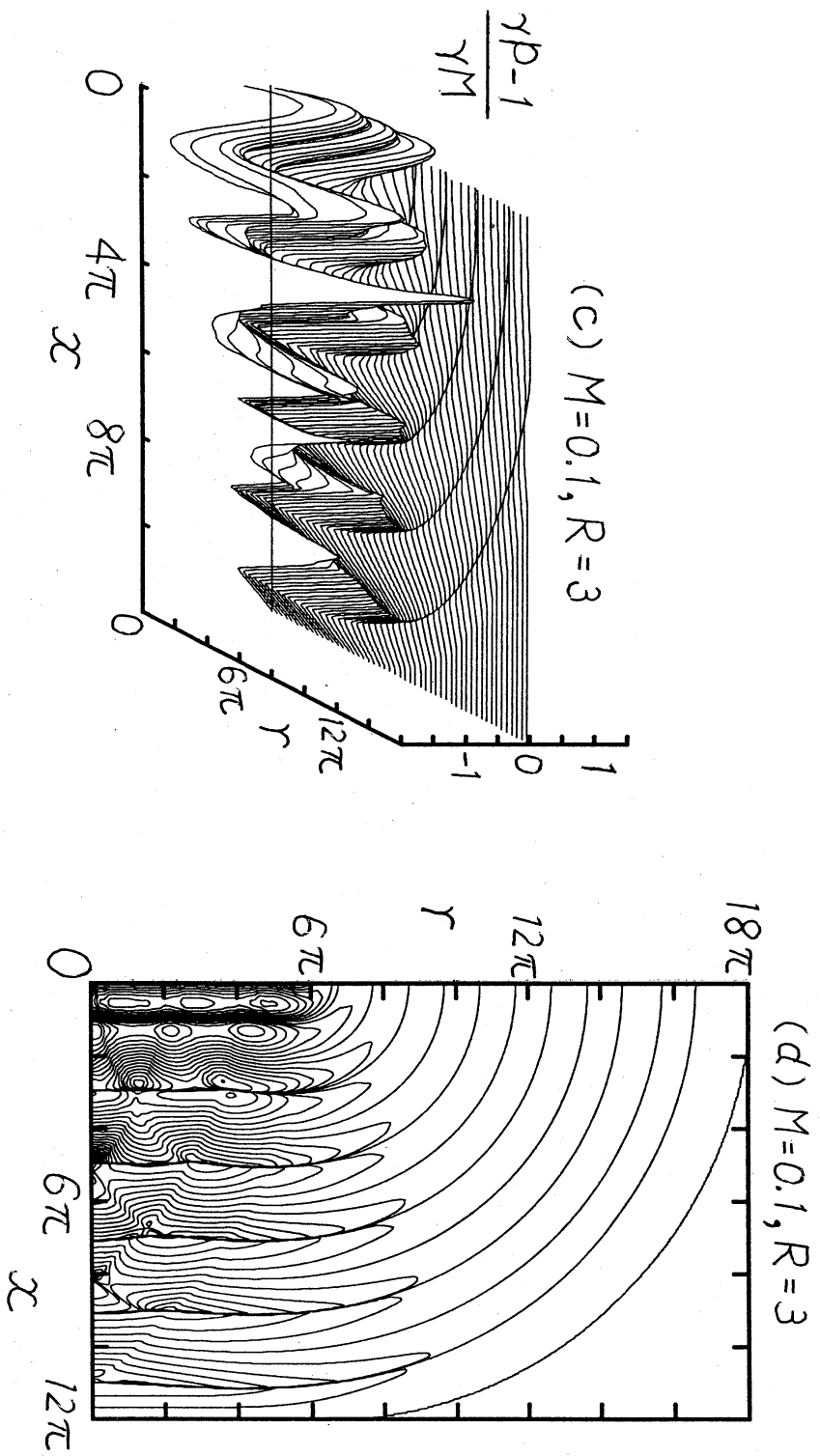


図4. 強非線形波の圧力波形と等圧線図

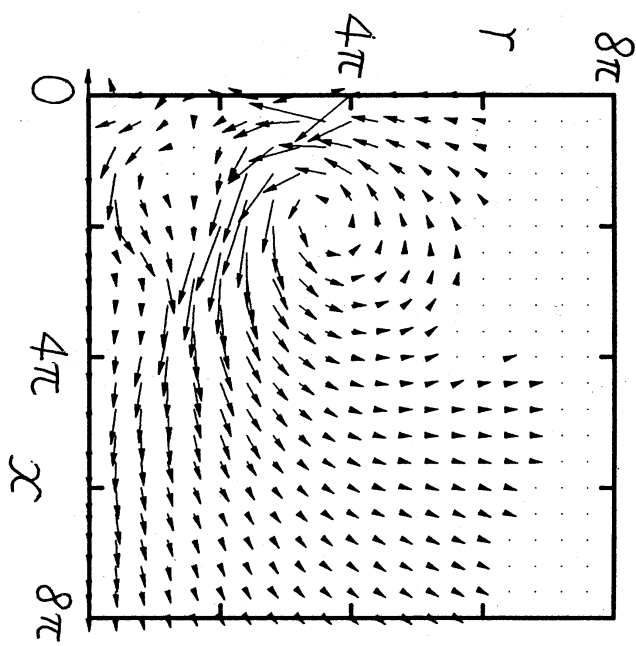


图5. 音響流
($M=0.3, R=2, t=12\pi$)

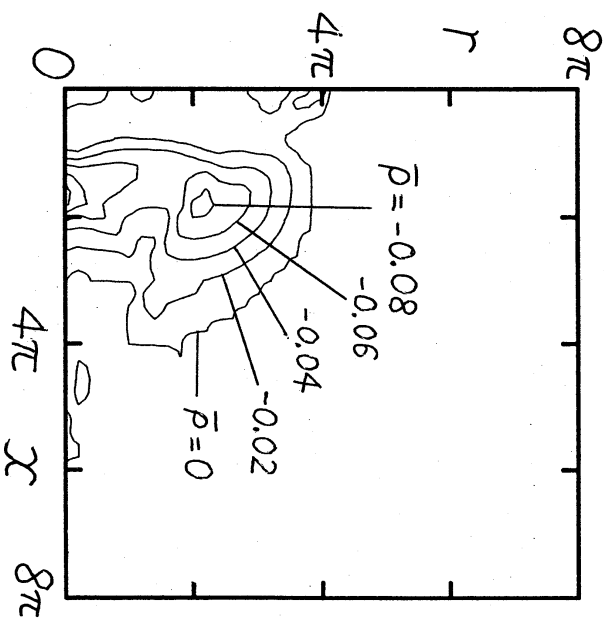


图6. 平均密度分布
($M=0.3, R=2, t=12\pi$)