

絡み目の Jones 多項式の計算

原 正雄 (Masao HARA)

東海大学情報数理学科

谷 聖一 (Sei'ichi TANI)

日本大学応用数学科

山本 慎 (Makoto YAMAMOTO) 中央大学数学科

1 はじめに

絡み目の Jones 多項式は代表的な絡み目型の不変量のひとつであり, Jones 多項式を求める問題は #P-完全であることが知られている. 本稿では, 絡み目の Jones 多項式を次数の高い項から順に計算するアルゴリズムを考察し, これを改良することにより Jones 多項式の次数を計算する発見的アルゴリズムを提示する. さらにこの次数を計算するアルゴリズムがプレッツェル絡み目などの有名な絡み目のクラスに対して有効に働くことを例をもって示す.

2 絡み目に関する準備

まず, 絡み目に関する用語の定義を簡単に与える. 詳しくは, [S] などを参照されたい.

絡み目の定義: 3次元ユークリッド空間内に埋め込まれた, 互いに素な n 個の閉曲線 (円周 S^1) を n 成分の絡み目または単に絡み目 (*link*) という. 特に, 1 成分の絡み目を結び目 (*knot*) という.

絡み目のダイアグラム: 絡み目を平面に射影した図で, 多重点が横断的に交わっている 2 重点のみのものをその絡み目の正則射影という. さらに, 各 2 重点にもとの絡み目における交叉の上下の情報を加えたものを, その絡み目のダイアグラムといい, 2 重点を交点という.

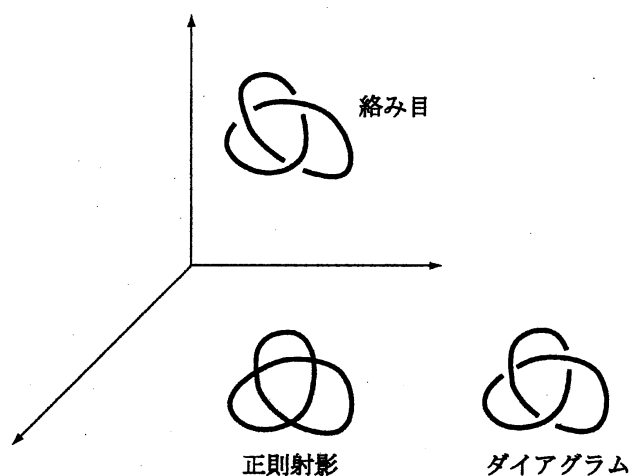


図 1

絡み目のグラフ：絡み目のダイアグラムにより分けられる平面の領域をチェッカーボードのように白黒2色に塗り分ける。このうち一方の色、たとえば非有界な領域を含まない色の、各領域に1つずつ点を取る。それらの点を図2のように線で結び、各線には、図3のように $+$ 、 $-$ をつける。このようにして得られるグラフを、その絡み目またはダイアグラムのグラフという。

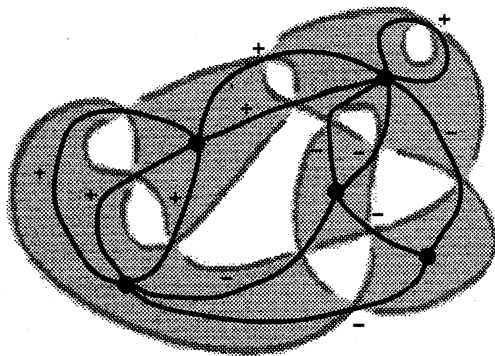


図2

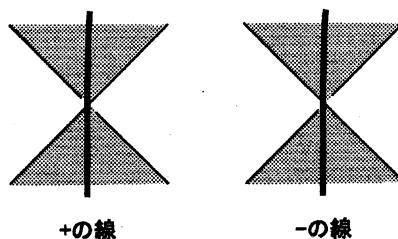


図3

3 Kauffman ブラケット多項式

次に、Kauffman ブラケット多項式を定義する (cf. [K]).

絡み目 L のダイアグラムを $\tilde{L}$ 、グラフを $G(V, E, \text{sgn})$ とする。 G の辺集合 E から集合 $\{+, -\}$ への写像 $s: E \rightarrow \{+, -\}$ を状態 (state) という。状態 s に対して、 E_s を $E_s = \{e \in E | \text{sgn}(e) = s(e)\}$ とし、 sG を $sG = (V, E_s)$ とする。グラフの状態全体の集合を S で表す。

Kauffman ブラケット多項式 $\langle G \rangle$ を次の式で定義する。

$$\langle G \rangle = \sum_{s \in S} A^{\mu(s)} (-A^2 - A^{-2\beta(s)-1}).$$

ただし、 $\mu(s) = \sum_{e \in E} s(e)$ とし、 $\beta(s)$ は sG の0次元と1次元の Betti 数の和とする。Kauffman ブラケット多項式は $2^{|E|}$ 個の多項式の和をとる計算になる。

Kauffman ブラケット多項式は絡み目型の不変量ではない。つまり、同じ絡み目でもダイアグラムによってそのグラフの Kauffman ブラケット多項式が異なる場合がある。

FACT：同じ絡み目の2つのグラフ G_1, G_2 に対して、ある整数 w が存在し、

$$\langle G_1 \rangle = (-A^{-3})^w \langle G_2 \rangle$$

が成り立つ。

絡み目 L の各成分に向きがついているとき L を有効絡み目という。有効絡み目の (有効) ダイアグラム $\tilde{L}$ に対して、 $V_L(A) = (-A^{-3})^{w(\tilde{L})} \langle G_{\tilde{L}} \rangle$ とおくと V_L は $\tilde{L}$ の選び方によらないことが知られている。ただし、ここで $w(\tilde{L})$ はライズ (writhe) とよばれる整数であり、 $G_{\tilde{L}}$ は $\tilde{L}$ のグラフである。Jones 多項式とはこの V_L で $A = t^{\frac{1}{4}}$ と変数変換したものである。詳しくは [K] を参照。

4 アルゴリズム

単純に $\langle G \rangle$ を計算するアルゴリズムは次のようになる.

完全に計算するアルゴリズム :

入力 絡み目のグラフ G

出力 ブラケット多項式 $\langle G \rangle$

$s :=$ (すべて +1 の state)

put(s) (* que に s を入れる *)

while (que $\neq \emptyset$)

begin

$s :=$ get (* que から state を取り出す *)

$\langle G \rangle := \langle G \rangle + P(s)$

for $i :=$ (s の最後の -1 位置の) + 1 to N do

begin

$s' :=$ (s の i 番目の辺を +1 から -1 に変えた state)

put(s')

end

end

上のアルゴリズムを改良してブラケット多項式の最高次数を高速に計算するアルゴリズムを作ることができる. このアルゴリズムには現在予想される最高次数を計算するための que と, その次数の係数が 0 のとき, さらに計算を続けるための que の 2 つの que を使用する.

最高次数を求めるアルゴリズム :

入力 絡み目のグラフ G

出力 ブラケット多項式 $\langle G \rangle$

$s :=$ (すべて +1 の state)

put1(s) (* que1 に s を入れる *)

deg := deg $P(s)$ (* 予想される最高次数 *)

repeat

procedure(deg) (* 最高次数が deg の state の和を計算する *)

que1 := que2

deg := deg - 4

until (deg $\langle G \rangle \geq$ deg) or (que 1 = $\emptyset$)

end

```

procedure(deg: integer)
begin
  while (que1  $\neq \emptyset$ )
  begin
     $s := \text{get1}$   (* que1 から state を取り出す *)
     $\langle G \rangle := \langle G \rangle + P(s)$ 
    for  $i := (s \text{ の最後の } -1 \text{ 位置の}) + 1$  to  $N$  do
    begin
       $s' := (s \text{ の } i \text{ 番目の辺を } +1 \text{ から } -1 \text{ に変えた state})$ 
      if  $\text{deg} = \text{deg } P(s')$ 
      then  $\text{put1}(s')$ 
      else  $\text{put2}(s')$ 
    end
  end
end

```

5 プレッツェル絡み目

3以上の整数 m と 0でない整数 $p_1, p_2, \dots, p_m$ に対して, プレッツェル絡み目 (pretzel link) $P(p_1, p_2, \dots, p_m)$ とは, 図4のような絡み目のことである. ただし, 交点の符号はダイアグラムのグラフで対応する線の符号と一致するものとする. たとえば, $P(-3, 5, 7)$ は図5のようになる.

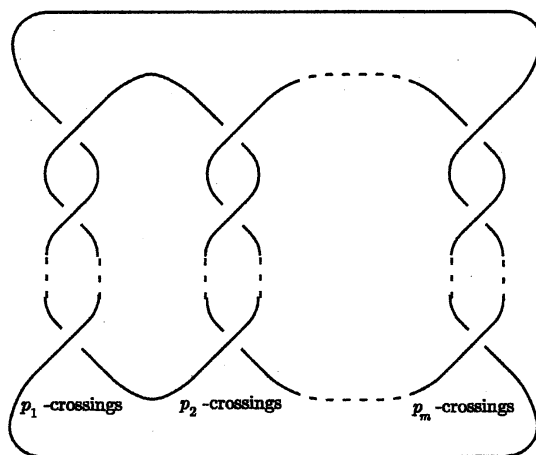
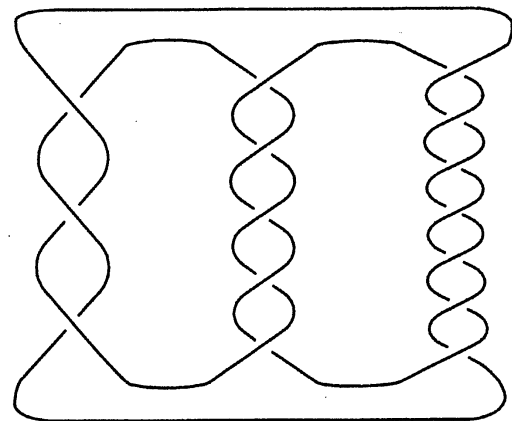


図 4



P(-3,5,7)

図 5

簡単のため, $|p_i| \leq 2$ ($i = 1, 2, \dots, m$) のみの場合を考える.

$p_1, p_2, \dots, p_m$ の符号がすべて一致しているか, または, それらの中に正の数が2個以上含まれているプ

レッツェル絡み目 $P(p_1, p_2, \dots, p_m)$ に対しては, すべての符号が $+$ の状態のみが, Kauffmann ブラケット多項式の最高次数を与えることが知られている (cf. [LT]). したがって, これらの場合はこの状態のみを調べることでこのアルゴリズムは終了する, 以下, それ以外のレッツェル絡み目に対して計算機実験の結果を述べる.

このアルゴリズムでは 状態 に対応する多項式の次数が高いものから計算していくが, その過程で実際に多項式の和をとる状態 (que1 に蓄えられる状態) を計算状態, 定義式の β を計算するが多項式の和は計算しない状態 (que1 または que2 に蓄えられる状態) を検査状態とよぶ.

交点数が 10, 15, ..., 50 のレッツェル絡み目のうち計算状態が交点数の 2 割以下で次数が求まる絡み目の割合を調べた結果が次の表とグラフである. 多項式の和や β の計算は交点数の線形時間でできるので, 全体として $O(|E|^3)$ 時間で Kauffman ブラケット多項式が求まるものの割合の目安となる.

交点数	個数	検査状態	%	計算状態	%
10	14	9	64.3%	14	100.0%
15	88	56	63.6%	80	90.9%
20	367	206	56.1%	322	87.7%
25	1,232	625	50.7%	1,071	86.9%
30	3,690	2,139	58.0%	3,083	83.6%
35	10,110	5,574	55.1%	8,559	84.7%
40	25,977	13,701	52.7%	21,441	82.5%
45	63,218	32,072	50.7%	50,942	80.6%
50	147,225	72,094	49.0%	121,248	82.4%

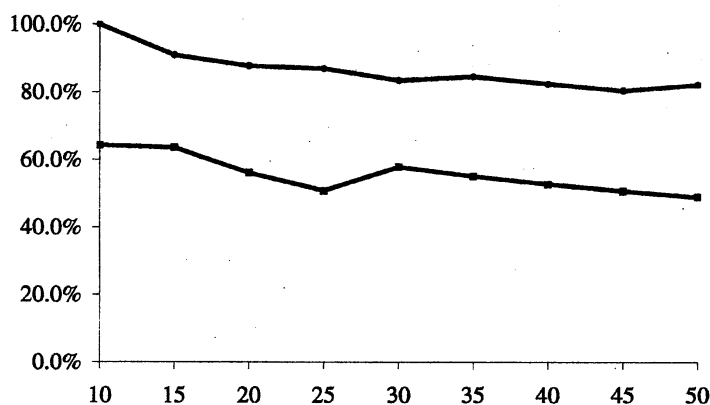


図 6

参考文献

- [K] L.H.Kauffman, State Models and the Jones Polynomial, *em Topology*, **26**(1987), 395–407.
- [LT] W.B.R.Lickorish and M.B.Thistlethwaite, Some links with non-trivial polynomials and their crossing-numbers, *Comment. Math. Helv.*, **63**(1988), 527–539.
- [S] 鈴木晋一, 結び目理論入門, サイエンス社, 1991.