

定常時系列における推定の高次の漸近有効性

竹内 浩

定常時系列データ $X_1, X_2, \dots, X_T$ を与えられたとき、その分布に属する母数の推定については、 T が大きくなるときの推定量の漸近正規性、および漸近有効性の論せられることが多い。

しかし漸近的に有効にないものもあり、いなかの BAN 推定量は一義的ではなく、いくつか考えられる。いま $X_1, X_2, \dots, X_T$ がガウス過程に従い、かつ自己回帰過程であるとして、自己回帰係数の推定量として、最小 2 推定量、Yule-Walker 推定量、最尤推定量等を考えられ、これらはいずれも BAN 推定量であることが証明される。

次に $\sqrt{T}(\hat{\theta} - \theta)$ の漸近分布を $T^{-1/2}$ の order まで展開したときの分布の限界を計算すると、BAN 推定量を k 次 k 回の漸近中央値不偏性(あるいは漸近不偏性)を持つように補正したものは、すべてこの限界を達成すること、 T が k 次 k 回の漸近有効性を持つことがわかる (Akaike 1975)。

ここで異なる BAN 推定量の間で優劣を考えるには、3 次の漸近効率を考慮しなければならない。このためには推定量のクラスを限定して、何らかの意味で正則 regular と考えられるもの

のの中に居てわけがたい。しかしこの自然なクラスを定義する上で困難がある。

一つは ARMA 過程などの場合には、十分統計量が存在しないから、指数型分布からの独立標本の場合のように、十分統計量の正則関数のクラスとして、正則推定量と定義することではできないことである。しかしこのときより抽象的な形で議論を進めようとするとき、推定量の分布の形式的な漸近展開について、その正当性を証明するのに困難が生ずる。

もっと簡単な自己回帰ガウス過程の場合でも、十分統計量は存在し、かつその次元は一定であるが、その漸近分布は退化してしまうので、十分統計量の正則関数として表される推定量を扱うとしても、その漸近分布を論ずるのに困難がある。

(例えば平均は既知として 1 階の自己回帰過程を考えると、十分統計量は $\sum_{t=1}^{T-1} x_t^2$, $\sum_{t=2}^T x_t$, $\sum_{t=2}^T x_t x_{t-1}$ の 3 つで与えられるが、漸近的に最初の 2 つは相関 1 になる。)

ここでは、定常ガウス過程における推定の高度な漸近有効性を扱うための理論的接近の方法を提案したい。この場合、問題の対象を時系列と考えるに、むしろ分散共分散行列が未知の母数とくくって表現されるような、多次元正規変量の系列として扱う。そうしてこのような形のモデルに対する推定の漸近理論を考える。

$Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ を多変量正規分布に従う確率変数の系とする。その平均ベクトルはゼロ, 分散共分散行列を $\Sigma_n(\theta)$, θ は実数とする。

このとき密度関数は

$$f(\underline{y}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\Sigma_n|^{-\frac{1}{2}} \exp -\frac{1}{2} \underline{y}' \Sigma_n^{-1} \underline{y}$$

とたると 尤度関数を L とすると

$$\log L = \text{const} - \frac{1}{2} \log |\Sigma_n| - \frac{1}{2} \underline{y}' \Sigma_n^{-1} \underline{y}$$

とたると,

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log L = \frac{1}{2} \underline{y}' \Sigma_n^{-1} \dot{\Sigma}_n \Sigma_n^{-1} \underline{y} - \frac{1}{2} \text{trace } \Sigma_n^{-1} \dot{\Sigma}_n$$

$$\text{ただし } \dot{\Sigma}_n = \frac{\partial}{\partial \theta} \Sigma_n$$

とたると、 Σ_n の行列方程式

$$|\dot{\Sigma}_n - \lambda \Sigma_n| = 0$$

の根を $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ とすると

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log L = \frac{1}{2} \sum \lambda_i (Z_i^2 - 1)$$

と表すことができる。ただし $Z_1, \dots, Z_n$ は互いに独立に標準正規分布に従う。

$$\text{よって } \frac{\max_{1 \leq i \leq n} \lambda_i^2}{\sum \lambda_i^2} \rightarrow 0$$

ならば

$$\sqrt{\frac{2}{\sum \lambda_i}} \frac{\partial}{\partial \theta} \log L = \frac{1}{\sqrt{2 \sum \lambda_i}} \sum \lambda_i (z_i^2 - 1)$$

は漸近的に平均 0, 分散 1 の正規分布に従う。

更により強く

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i^k = O(n) \quad k = 1, 2, \dots$$

とすると, $\frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\partial}{\partial \theta} \log L$ の分布の Edgeworth 展開が可能になる。

とすると, ぶつこの意味で漸近的に有効な推定量 $\hat{\theta}_n$ は, $\sqrt{B_n}(\hat{\theta}_n - \theta)$ が漸近的に正規分布 $N(0, 1)$ に従うようになるのである。ただし

$$B_n = \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 / 2$$

である。

次に

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log L &= - \tilde{y}' \tilde{\Sigma}_n^{-1} \dot{\tilde{\Sigma}}_n \tilde{\Sigma}_n^{-1} \dot{\tilde{\Sigma}}_n \tilde{\Sigma}_n^{-1} \tilde{y} + \frac{1}{2} \tilde{y}' \tilde{\Sigma}_n^{-1} \ddot{\tilde{\Sigma}}_n \tilde{\Sigma}_n^{-1} \tilde{y} \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{trace} \{ \tilde{\Sigma}_n^{-1} \ddot{\tilde{\Sigma}}_n - (\tilde{\Sigma}_n^{-1} \dot{\tilde{\Sigma}}_n)^2 \} \end{aligned}$$

とすると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{n}} \left(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log L + B_n \right) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left(- \tilde{y}' \tilde{\Sigma}_n^{-1} \dot{\tilde{\Sigma}}_n \tilde{\Sigma}_n^{-1} \dot{\tilde{\Sigma}}_n \tilde{\Sigma}_n^{-1} \tilde{y} + 2 B_n \right) \\ &\quad + \frac{1}{2\sqrt{n}} \left(\tilde{y}' \tilde{\Sigma}_n^{-1} \ddot{\tilde{\Sigma}}_n \tilde{\Sigma}_n^{-1} \tilde{y} - \text{trace} \tilde{\Sigma}_n^{-1} \ddot{\tilde{\Sigma}}_n \right) \end{aligned}$$

において, $\sum_{i=1}^n \lambda_i^k = O(n)$ のとき, 第1項は漸近正規分布に従い, その分散は $\sum \lambda_i^4 / n$ となることがわかる. また第2項について, 方程式

$$|\ddot{\Sigma}_n - \mu \Sigma_n| = 0$$

の根 $\mu_1, \dots, \mu_n$ について $\max \mu_i = O(1)$, $\sum \mu_i^2 = O(n)$ ならば正規分布に従うことがわかる.

また更に $\ddot{\Sigma}_n \Sigma_n^{-1} \ddot{\Sigma}_n \Sigma_n^{-1} = \ddot{\Sigma}_n \Sigma_n^{-1} \ddot{\Sigma}_n \Sigma_n^{-1}$ が成り立てば $\Sigma_n^{-\frac{1}{2}} \ddot{\Sigma}_n \Sigma_n^{-\frac{1}{2}}$ と $\Sigma_n^{-\frac{1}{2}} \ddot{\Sigma}_n \Sigma_n^{-\frac{1}{2}}$ とが同時に直交化されるから, 第1項と第2項の同時正規性が証明され, 従って全体としての漸近正規性が示される.

更にもう一度微分すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \log L &= 3 \tilde{y}' \ddot{\Sigma}_n^{-1} \dot{\Sigma}_n \ddot{\Sigma}_n^{-1} \dot{\Sigma}_n \ddot{\Sigma}_n^{-1} \dot{\Sigma}_n \ddot{\Sigma}_n^{-1} \tilde{y} \\ &\quad + \frac{3}{2} \tilde{y}' \ddot{\Sigma}_n^{-1} \ddot{\Sigma}_n \ddot{\Sigma}_n^{-1} \dot{\Sigma}_n \ddot{\Sigma}_n^{-1} \tilde{y} + \frac{3}{2} \tilde{y}' \ddot{\Sigma}_n^{-1} \dot{\Sigma}_n \ddot{\Sigma}_n^{-1} \ddot{\Sigma}_n \ddot{\Sigma}_n^{-1} \tilde{y} \\ &\quad + \frac{1}{2} \tilde{y}' \ddot{\Sigma}_n^{-1} \ddot{\Sigma}_n \ddot{\Sigma}_n^{-1} \tilde{y} \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{trace} (\ddot{\Sigma}_n^{-1} \ddot{\Sigma}_n - 3 \ddot{\Sigma}_n^{-1} \dot{\Sigma}_n \ddot{\Sigma}_n^{-1} \ddot{\Sigma}_n + 2 (\ddot{\Sigma}_n^{-1} \dot{\Sigma}_n)^2) \end{aligned}$$

となる. 上記と同様の条件を付け加えることによって

その漸近正規性を証明することができ.

したがって θ の最大推定量 $\hat{\theta}$ は

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \log L \Big|_{\theta=\hat{\theta}} = 0$$

の解として与えられるので

$$0 = \frac{\partial}{\partial \theta} \log L + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \log L \cdot (\hat{\theta} - \theta) + \frac{\partial^3}{2 \partial \theta^3} \log L \cdot (\hat{\theta} - \theta)^2 + \dots$$

となり、これから最尤推定の stochastic expansion と分布の漸近展開が得られる、

一般に $\hat{\theta}$ と BAN 推定量とすると

$$\sqrt{B_n}(\hat{\theta} - \theta) \sim \frac{1}{\sqrt{B_n}} \frac{\partial}{\partial \theta} \log L = U_\theta$$

となる、よって

$$\sqrt{B_n}(\hat{\theta} - \theta) = U_\theta + \frac{1}{\sqrt{n}} Q_\theta + o_p\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

と展開する、 Q_θ の漸近分布が Edgeworth 展開可能であるという推定量のクラスを考へると、このような推定量のクラスについて、漸近エータに關して独立同一分布に依る標本の場合と同様な関係式が成り立つことが補助定理

$$E_\theta(U_\theta T_\theta) = \frac{1}{\sqrt{B_n}} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} E_\theta(T_\theta) - E\left(\frac{\partial}{\partial \theta} T_\theta\right) \right]$$

を用いることにより証明される

このことから、 $\hat{\theta}_n^*$ と最尤推定量と補正した 3 次漸近中央値不偏推定量 (或いは漸近不偏推定量) $\hat{\theta}_n^0$ を上記の條件を満たす任意の 3 次漸近中央値不偏推定量とすると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n [P_\theta(|\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^* - \theta)| < a) - P_\theta(|\sqrt{n}(\hat{\theta}_n^0 - \theta)| < a)] \geq 0$$

がすべての θ, a について成り立つことが証明される。すなわち $\hat{\theta}_n^*$ は 3 次の漸近有効性を持つ。

母数が多次元ベクトルである場合には、行列 $\Sigma_n(\frac{\partial}{\partial \theta_0} \Sigma_n)$, $\Sigma_n(\frac{\partial^2}{\partial \theta_0 \partial \theta_0} \Sigma_n)$ 等が積について交換可能であれば、上記の議論がそのまま適用できて、最大推定量の漸近有効性の証明となる。

定常時系列の場合にもどると、 $\Sigma_n, \dot{\Sigma}_n, \ddot{\Sigma}_n$ 等がすべて Toeplitz 型 行列の要素 c_{ij} について

$$c_{ij} = c_{i-j}$$

となつてゐることが特徴である。従つて Toeplitz Form に關する理論 (Grenander & Szegő) によつて、漸近的にはそれらと同じ直交行列によつて対角化されること、またより詳しくは

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikx} f(x) dx$$

とおくこと、作るの連続関数 F について

$$\lim \frac{1}{n} \sum_k F(\lambda_k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(f(x)) dx$$

になることが示されるから、推定量の漸近有効性の評価が可能になる。

具体的にこのことについての計算は別稿で行いたい。