

電気回路の力学系

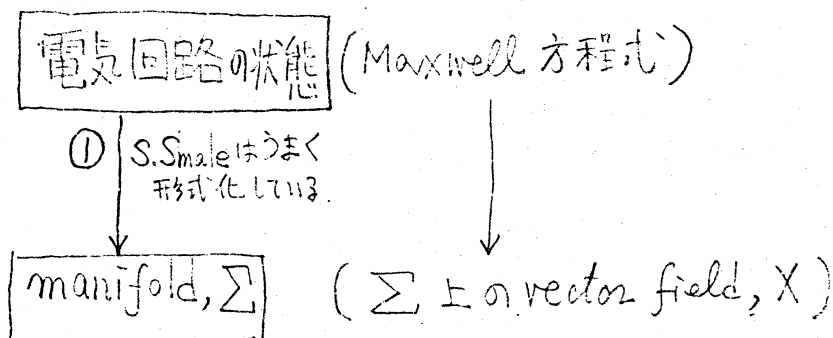
名大 理 大学院 伊藤敏和

§ 1 まえがき

我々はこの話題にするのは, S. Smale の論文 [4] の紹介です。そして, 我々は S. Smale がなぜ電気回路を数学的に形式化しようとしたのか, さるにその結果としてどういうことに目を向ければよいのか, とりうことを具体的な例を通して述べる。

もしこのような方面に興味をも, ていいる方は, ぜひ [4] を読まれることをおすすめします。特に Example 6 及び Problem 1 を。

S. Smale の idea を図式化してみる。



② Σ 上に自然な indefinite metric I を入れ, X を Σ 上に自然に作られる closed 1-form ω の I に関する dual (i.e. $I(X, \cdot) = \omega$) とみた。

(注) ω の構成に関する萌芽は [1] の中にある。

S. Smale は上記の具体的な例をもとにして, 次のような問題を作している。

(問題) M を smooth compact manifold とせよ。 I を M 上の indefinite metric とし, f を M 上の smooth 函数としたとき, df の I に対する dual vector field $\text{grad} f$ の性質をしるべし。又 ω を M 上の closed 1-form にした時に ω の I に対する dual vector field $\text{grad} \omega$ の性質をしるべし。

(注) g を M 上の Riemannian metric とした時の考察は [6] [7] にあるから, それと類似のことがいえるか考察せよ。

もうし遅れましたが, 松本隆さんが S. Smale の形式化の拡張と [4] 中の問題の一部を [2] であつかっていますので松本さんの講演を参考にしてください。

§ 2. S. Smale の formulation.

我々は具体例をもって S. Smale の formulation をみて、
そして、松本さんの formulation への萌芽をもみよう。

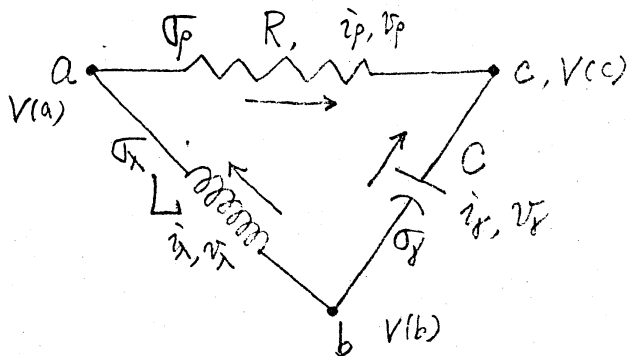
例 1

右図のような回路を
考えよ。

R ; resistor

L ; coil

C ; condenser.



電流を i , 電位差を v であらわす。

まず, Kirchhoff laws と Ohm law を記述する。

$$KCL; \quad i_p = i_\lambda = -i_\gamma$$

$$KVL; \quad v_p + v_\lambda + v_\gamma = 0$$

$$\text{Ohm law}; \quad v_p = f(i_p)$$

(我々は non-linear resistor を考える。)

次に Maxwell equation (運動方程式) をかく。

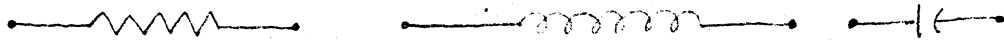
$$(A) \begin{cases} L(i_\lambda) \cdot \frac{di_\lambda}{dt} = v_\lambda & \text{ここで } L(i_\lambda) \text{ は inductance,} \\ C(v_\gamma) \cdot \frac{dv_\gamma}{dt} = i_\gamma & C(v_\gamma) \text{ は capacitance である。} \end{cases}$$

この方程式 (A) を上記の関係式をもちいて書きなおすと、

$$\begin{cases} L(i_\lambda) \cdot \frac{di_\lambda}{dt} = v_\gamma - f(i_\lambda) \\ C(v_\gamma) \cdot \frac{dv_\gamma}{dt} = -i_\lambda \end{cases}$$

が得られる。

以上がこれまでよく知られている事実である。S. Smale はこのよく知られた事実を次のようにみた。即ち、



回路の各 branch は電流と電位差とによって状態が記述されるから、各 branch に対して (i, v) を変数にする空間を対応させた。例えば  i_p, v_p に対して $(i_p, v_p) \in \mathbb{R}^2$

例1の回路に対して、空間 $\mathcal{S}$ を対応させた。

$$\mathcal{S} = \mathcal{R} \times \mathcal{L} \times \mathcal{C} \times \mathcal{R}' \times \mathcal{L}' \times \mathcal{C}' = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$$

$$(i_p, i_\lambda, i_r, v_p, v_\lambda, v_r)$$

そこで Kirchhoff の電流法則 (KCL) は各 node において電流の代数的総和は0, ということである。

このことは 1-cycle のことばをもちいて、次のように言い変えられる。

$$\text{i.e. } C_1 \ni \sigma = i_p \sigma_p + i_\lambda \sigma_\lambda + i_r \sigma_r$$

$\partial; C_1 \longrightarrow C_0$ boundary operator
を具体的に書く。

$$\begin{aligned} \partial \sigma &= i_p (c-a) + i_\lambda (a-b) + i_r (c-b) \\ &= (i_\lambda - i_p) a - (i_\lambda + i_r) b + (i_p + i_r) c \end{aligned}$$

$$\text{だから } KCL \iff \text{Ker } \partial \ni \sigma$$

次に KVL は $v_p = -(V(c) - V(a))$, $v_x = -(V(a) - V(b))$, $v_y = -(V(c) - V(b))$ とかけていることに着目すれば, 1-cocycle のことは“いいかえることができる”。これは電流とは dual な関係になっているとみる。

$$\begin{aligned} \text{これは } \sigma' &= v_p \cdot \sigma_p' + v_x \cdot \sigma_x' + v_y \cdot \sigma_y' \\ &= -(V(c) - V(a))\sigma_p' - (V(a) - V(b))\sigma_x' - (V(c) - V(b))\sigma_y' \\ &= -\partial^*(V(a)a' + V(b)b' + V(c)c') \end{aligned}$$

と書かれている。ここで $\sigma_p', \sigma_x', \sigma_y'$ は $\sigma_p, \sigma_x, \sigma_y$ の dual, a', b', c' は a, b, c の dual, $V(a), V(b), V(c)$ は各 node a, b, c における電位を表わす。

$$\partial^*; C^0 \longrightarrow C^1 \quad \text{boundary operator}$$

$$\text{よって } KVL \iff \text{Im } \partial^* \ni \sigma'$$

我々は $K = \text{Ker } \partial \times \text{Im } \partial^* \subset \mathcal{S} = \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ を考え、電気回路の状態の KCL, KVL をみたした空間が得られたことになる。さらに Ohm law をみたしたものを考えればよい。このことを S. Smale は次のように考えた。

$$\Lambda_p \subset \mathcal{R} \times \mathcal{R}' = \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2 \quad \text{closed 1-dim. submanifold}$$

$$\mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{R} \times \mathcal{R}' \quad \text{canonical projection の}$$

K への制限を π' とすると,

(仮定) $\pi'; K \longrightarrow \mathcal{R} \times \mathcal{R}'$ が $\Lambda_p \equiv R.Thom$ の意味で T -regular

なる仮定のせいに $(\pi')^{-1}(\Lambda_p) = \Sigma$ とおけば Σ は submanifold になる。

この Σ が回路の状態に対応する manifold である。

[注意]

(i) S.Smale が Λ_p を考えたのは current controlled と voltage controlled とを一度に考えたか、たかろであるう。

(2) 松本さんの形式化 は S.Smale よりも複雑なものを考えようとするのであるから Λ_p にかわりうるものを作ることに、それから ∂, ∂^* を matrix で表わし、それをもとめる (これは R.Brayton & J.Moser [1] の中であつかわれている) のをつくらせり立てる。

以上で §1 の図式の①ができたので以下では②を記述する。そのために Σ をもう一度みなおしてみると、

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} \times \mathcal{C}' & \longrightarrow & \sum_{\omega} \subset \mathcal{S} \\ (\bar{i}_\lambda, v_\lambda) & \rightsquigarrow & (\bar{i}_\lambda, \bar{i}_\lambda, -\bar{i}_\lambda, f(\bar{i}_\lambda), v_\lambda - f(\bar{i}_\lambda), v_\lambda) \\ & & \downarrow \pi \\ & & \mathcal{L} \times \mathcal{C}' \ni (\bar{i}_\lambda, v_\lambda) \end{array}$$

即ち $\dim \Sigma = \dim(\mathcal{L} \times \mathcal{C}')$ になり、713。そして

$$(A) \begin{cases} L(i_\lambda) \cdot \frac{d i_\lambda}{dt} = v_f - f(i_\lambda) \\ C(v_f) \cdot \frac{d v_f}{dt} = -i_\lambda \end{cases}$$

が Σ 上の vector field X の座標系による成分表示である。

そこで S. Smale は R. Brayton & J. Moser [1] の中で

$$(A) \text{ の右辺を } L(i_\lambda) \cdot \frac{d i_\lambda}{dt} = \frac{\partial P(i_\lambda, v_f)}{\partial i_\lambda}, \quad C(v_f) \cdot \frac{d v_f}{dt} = \frac{\partial P(i_\lambda, v_f)}{\partial v_f}$$

とする $P(i_\lambda, v_f)$ の構成の時にもちいられている式に着目して Σ 上に自然な(と思われる) closed 1-form ω と, indefinite metric I を構成する。

$$\pi; \Sigma \longrightarrow \mathcal{L} \times \mathcal{C}' \quad \text{canonical projection}$$

$$\mathcal{L} \times \mathcal{C}' \text{ 上の indefinite metric } J = -L(i_\lambda) di_\lambda^2 + C(v_f) dv_f^2$$

(ただし $L(i_\lambda) > 0, C(v_f) > 0$ なる smooth function)

を Σ 上に引きもどしたものを $I = \pi^* J$ とおく。明らかに

これは Σ 上の indefinite metric である。次に $\mathcal{R} \times \mathcal{R}'$

上の 1-form $\eta_1 = v_f di_\lambda$ を Σ 上に引きもどした form

を又我々は η_2 とかくと η_2 は Σ 上の closed 1-form を

define する。一方 $\pi'; \mathcal{J} \xrightarrow{\text{canonical projection}} \mathcal{C} \times \mathcal{C}' \xrightarrow{\text{dual pairing}} \mathbb{R}^1$ とし,

$$\pi'|_\Sigma = \eta \text{ とおく。 (i.e. } \eta(i, v) = i_f v_f \text{)}$$

そして $\omega = \eta_2 + d\eta$ とおく。この時, X を上記した

Σ 上の vector field とすると, 次の Main theorem が

成立する。

Main theorem

$$I(X, \cdot) = \omega \quad \text{on } \Sigma$$

Remark

$H^1(\Sigma; \mathbb{R}) = 0$ なる $dP = \omega$ なる Σ 上の函数 P が存在する。

次に我々は Σ 上で vector field X の orbit を考察するため
に以下のことを準備しておく。

$W; \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ を次のように定義する。

$$W(i, v) = \int_0^i L(i_\lambda) i_\lambda d\lambda + \int_0^v C(v_\lambda) v_\lambda dv_\lambda$$

$P_R; \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ を次のように定義する。

$$P_R(i, v) = i_p v_p$$

(注) W は energy, P_R は power である。

このとき, 次の定理が成立する。

Theorem

$$\Sigma \text{ 上で } X \cdot W = -P_R$$

§ 3. 具体例による (Σ, X) の考察.

例 1

§ 2 における例 1 でしるべき。

Σ_1 の変数 (i_λ, v_λ) を (x, y) とおく。 $L(i_\lambda) \equiv C(v_\lambda) \equiv 1$ とする。このとき、 $\omega = f(x)dx + d(-xy)$, $P(x, y) = -xy + \int_0^x f(t)dt$ (P は constant をのぞいて well-defined) となり、 $\omega = dP$ 。又 $I = -dx^2 + dy^2$ 。

$$X = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y - f(x) \\ -x \end{pmatrix}.$$

$$-P_R(x, y) = -xf(x)$$

$$W(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

ここで、次の仮定をする。

(仮定)

$\exists C, R > 0$ constant

$\Rightarrow$ (a) $xf(x) > C|x|$ for $|x| > R$
(natural assumption)

(b) $f'(0) < 0$

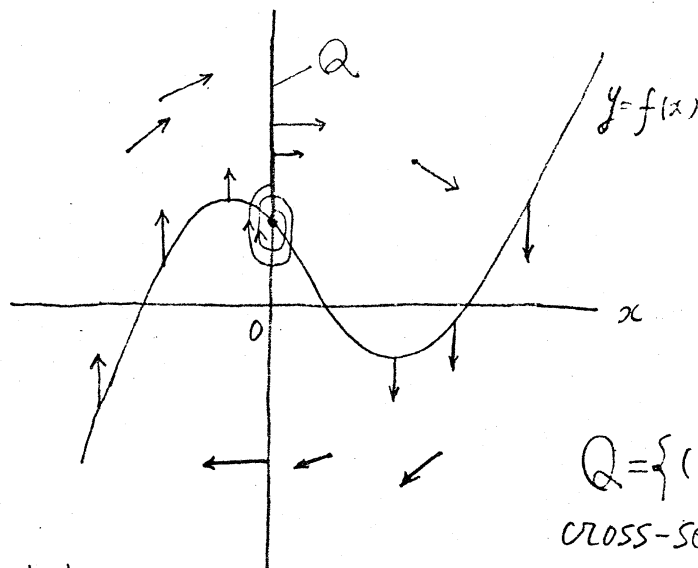
(nonlinearity assumption)

この仮定のもとに次の命題が成立する。

Proposition

上記の仮定のもとに, 大きい energy の点から出る orbit はただ1つの periodic orbit にまきつき, ただ1つの fixed point は source であり, X に対して強い意味での cross-section がある。

この命題の feeling は次の図である。

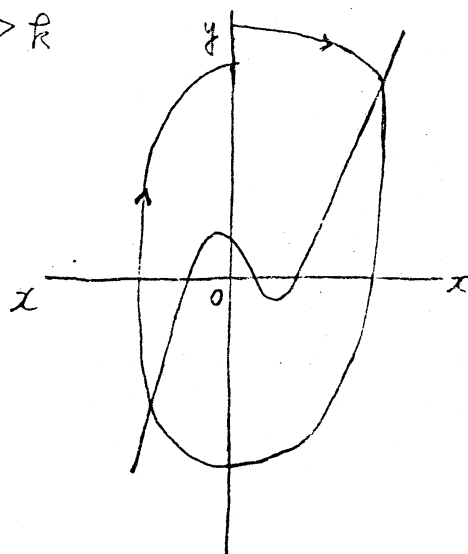
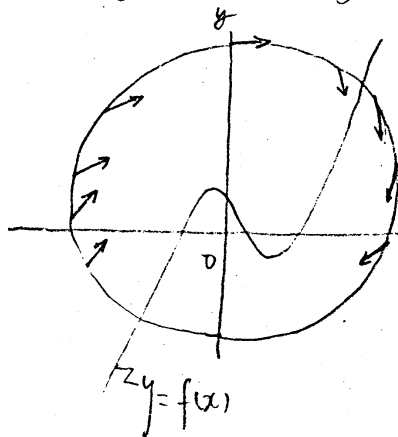


$$Q = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq f(0)\}$$

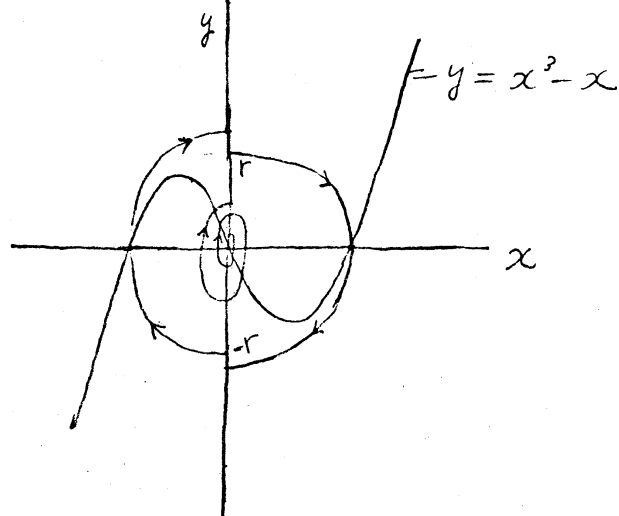
cross-section to X

仮定(a)より

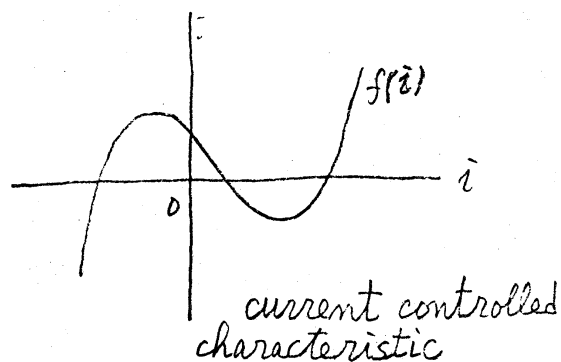
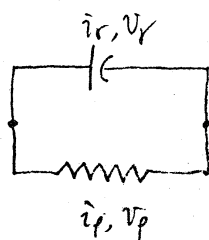
$$X \cdot W = -x f(x) < 0 \quad \text{for } |x| > R$$



特に $f(x) = x^3 - x$ の時を图示する。



例2



上記の回路を考える。

$$\begin{aligned}
 \mathcal{R} &\longrightarrow \sum_2 \mathcal{C} \mathcal{S} = \mathcal{R} \times \mathcal{L} \times \mathcal{R}' \times \mathcal{L}' = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \\
 \downarrow \psi \\
 i_p &\longmapsto (i_p, -i_p, f(i_p), f(i_p)) \\
 &\quad \downarrow \pi \quad \quad \quad \downarrow \{ \\
 &\quad \mathcal{L} \times \mathcal{L}' \ni (0, f(i_p))
 \end{aligned}$$

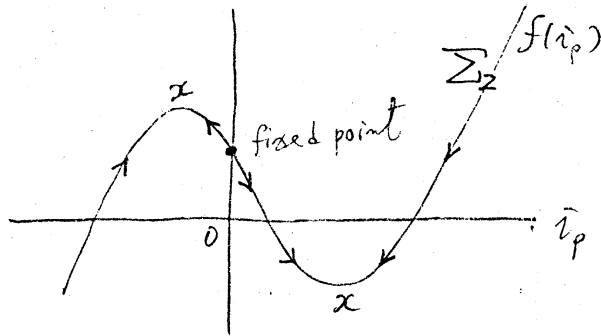
だから π は $f'(i_p) = 0$ なる点において singular である。

$$I = C(df(i_p))^2, \quad \omega = -d(i_p f(i_p)) + f(i_p) di_p$$

ここで C は coil の capacitance である。

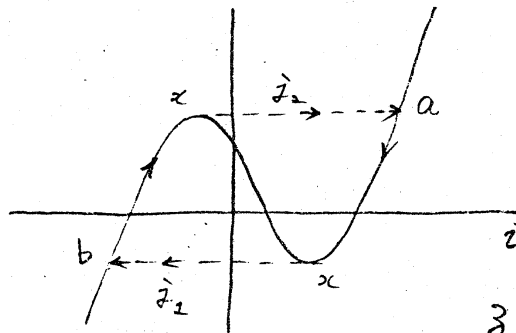
$$(A) X = \frac{d\hat{i}_p}{dt} = - \frac{\hat{i}_p}{cf(\hat{i}_p)}$$

Σ_2 上の vector field X の feeling は次の通り。



点 x で X はどうなっているかわからない。

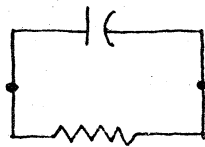
そこで、我々は circuit theory の立場から singular point をみりと次のようにならしている。



点 x において左図のように jump する。

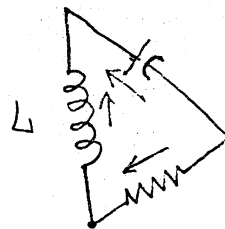
i_p 我々は $b \rightarrow a \rightarrow b$ なる cycle α を考える。

次に例 2 の回路に inductance L の coil を加えた回路を考える。



coil を加える。

(ただし、 L は十分小さな定数)



すると例1より

$$(B) \begin{cases} L \cdot \frac{d\bar{i}_p}{dt} = \bar{v}_g - f(\bar{i}_p) \\ C \cdot \frac{d\bar{v}_g}{dt} = -\bar{i}_p \end{cases} \quad \text{がえられる。}$$

(C は inductance, 定数)

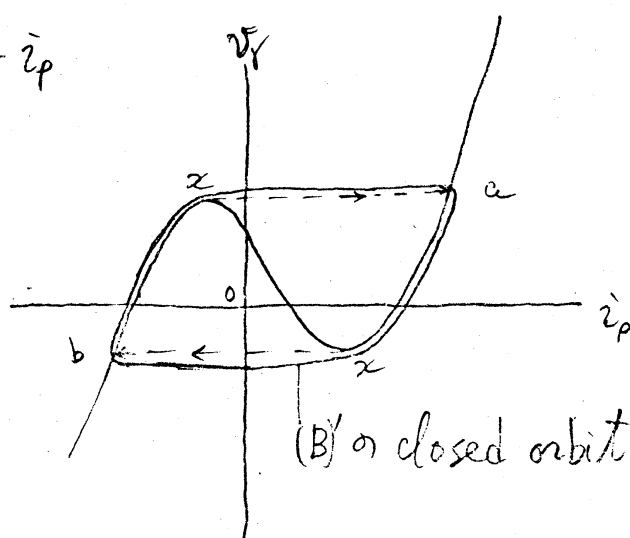
もし, ここで $L=0$ とすれば $C \cdot \frac{d\bar{i}_p}{dt} = -\frac{\bar{i}_p}{f'(\bar{i}_p)}$ がえられ (A) が得る。さらに Σ_2 は Σ_1 に次のようにしてうめこまれる。

$$\Sigma_2 \hookrightarrow \Sigma_1$$

$$\bar{i}_p \longmapsto (\bar{i}_p, \bar{v}_g = f(\bar{i}_p))$$

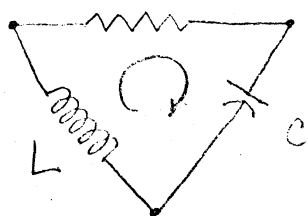
ここで $C=1$ で L が十分小的时候の (B) の closed orbit は α の近くにある。このことから, α を $L \rightarrow 0$ の時の (B) の closed orbit の極限としてみる。

$$(B)' \begin{cases} \frac{d\bar{i}_p}{dt} = \frac{\bar{v}_g - f(\bar{i}_p)}{L} \\ \frac{d\bar{v}_g}{dt} = -\bar{i}_p \end{cases}$$

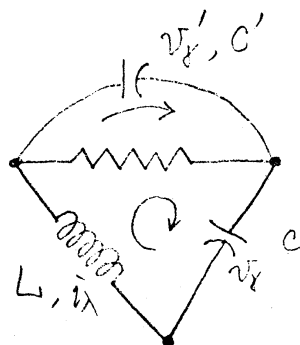


例 3.

(イ)



(ロ)



(イ), (ロ) 共に voltage controlled i.e. $i_p = f(v_p)$ とする。

(イ) の場合.

$$\mathcal{R}' \times \mathcal{C}' \longrightarrow \sum_{(i)} \mathcal{C} \mathcal{F}$$

$$(v_p, v_r) \longmapsto (f(v_p), f(v_p), f(v_p), v_p, -v_p - v_r, v_r)$$

$$\begin{cases} L(f(v_p)) \cdot f'(v_p)^2 \cdot \frac{dv_p}{dt} = -(v_p + v_r) \\ C(v_r) \cdot \frac{dv_r}{dt} = f(v_p) \end{cases}$$

今 $L \equiv C \equiv 1$ のときを考える。

$$(A) \begin{cases} f'(v_p)^2 \cdot \frac{dv_p}{dt} = -(v_p + v_r) \\ \frac{dv_r}{dt} = f(v_p) \end{cases}$$

$$\text{energy } W = \frac{1}{2} (f(v_p)^2 + v_r^2)$$

$$\text{power } P_R = v_p \cdot f(v_p)$$

(ロ) の場合.

C' は small capacitance をとった condenser.

$$\mathcal{L} \times \mathcal{C}' \longrightarrow \sum_{(i)} \mathcal{C} \mathcal{F}$$

$$(i_\lambda, v_r, v_{r'}) \longmapsto (f(v_{r'}), i_\lambda, i_\lambda, i_\lambda - f(v_{r'}), v_{r'}, -v_r - v_{r'}, v_r, v_{r'})$$

$$\sum_{(p)} \xrightarrow{\pi} \mathcal{L} \times \mathcal{C}'$$

$$(f(v'_y), i_\lambda, i_\lambda, i_\lambda - f(v'_y), v'_y, -v_y - v'_y, v_y, v'_y) \rightsquigarrow (i_\lambda, v_y, v'_y)$$

$$(A') \begin{cases} \frac{di_\lambda}{dt} = -(v_y + v'_y) \\ \frac{dv_y}{dt} = i_\lambda \\ C' \cdot \frac{dv'_y}{dt} = i_\lambda - f(v'_y) \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} L \equiv C \equiv 1 \text{ のときを} \\ \text{考えている。} \end{array} \right)$$

(C' は定数 capacitance)

$C'=0$ のとき (A') から (A) がでる。

(注意) $v_y = v'_y$ である。

$$\sum_{(q)} \hookrightarrow \sum_{(p)}$$

$$(v'_y, v_y) \rightsquigarrow (f(v'_y), v_y, v'_y)$$

以下変数を取りなおす。

$$(x, y, z) = (v'_y, v_y, i_\lambda) \text{ とおく。}$$

$$\sum_{(p)} = \mathbb{R}^3 \text{ と同一視する。}$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{z - f(x)}{C'} \\ z \\ -(x+y) \end{pmatrix}$$

$$\text{energy } W = \frac{1}{2} (C'x^2 + y^2 + z^2)$$

$$\text{power } P_R = xf(x)$$

$$\sum_{(q)} = \mathcal{S} = \{(x, y, f(x)) \in \mathbb{R}^3\} \subset \mathbb{R}^3 = \sum_{(p)}$$

$X|_{\mathcal{S}}$ は (1) の場合である。

この場合も例1で考察したように $X \cdot W = -P_R$ であって orbit の状態の例1と同様のことがわかる。そして、
 $Q = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y > 0, z = f(x)\}$ が X に対する cross-section であり、 X は Q の diffeomorphism T を引きおこす。 $T: Q \rightarrow Q$ 。この T に関することについて以下 S. Smale のいうていることを原文のままかまますから勉強に役立ててください。

I would think that this should be a relevant, interesting and challenging problem, to study the qualitative properties of this transformation T , say for f of the type we have been considering. It might be useful to impose other conditions such as f , say of a generic type. Can one use $X \cdot W = -P_R$ to obtain further information? In the fact that this system is of gradient type for an indefinite metric of some use?

Reference

- [1] R. Brayton & J. Moser ; A theory of non-linear networks I, II , Quart. Appl. Math. 22 (1964) 1-33 , 81-104 .
- [2] T. Matsumoto ; On the Dynamics of Electrical Networks, (to appear)
- [3] S. Smale ; Differentiable dynamical systems, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967) 747-817
- [4] S. Smale ; On the mathematical foundations of electric circuit theory , J. Diff. Geometry 7 (1972) 193-210 .
- [5] M. Hirsch & S. Smale ; Differential equations, Dynamical systems, and Linear algebra, Academic Press.
- [6] S. Smale ; On gradient dynamical systems, Ann. of Math. (2) 74 (1961) 197-206
- [7] S. Smale ; Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) 17 (1963), 97-116.