

shift の埋め込みについて

東大 理 佐野一洋

I. (sub)shift of finite type

$A = (A_{ij})$ を非負整数係数 $n \times n$ 行列とし, $G \in 1, \dots, n$ を頂点とし, 頂点 i と j とが, 長さ 1 の A_{ij} 個の向き付エッジで結ばれている, 1 次元のグラフとする.

$$\Sigma A \equiv \left\{ \begin{array}{l} g: \mathbb{R} \rightarrow G: \text{continuous maps s.t.} \\ \forall m \in \mathbb{Z}: g(m) \text{ は } G \text{ の 頂点,} \\ g \text{ は 向きと, arc length と } \varepsilon \text{ 保つ} \end{array} \right\}$$

とし, compact open topology を入れておく,

$\sigma: \Sigma A \rightarrow \Sigma A$ (homeo.) を $(\sigma(g))(t) = g(t+1)$ ($t \in \mathbb{R}$) で定義する.

Def ΣA 或るいは, $\sigma: \Sigma A \rightarrow \Sigma A$ 或るいは, $(\Sigma A, \sigma)$ の 2 を subshift of finite type determined by A (或るいは, 簡単に, shift, subshift 等) とする.

$A_{ij} = 0$ or 1 ($\forall i, j$) のとき、次の様に定義することもできる；

$$\Sigma_A \equiv \left\{ x = (\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots) ; \right. \\ \left. x_i \in \{1, \dots, m\} : A_{x_i x_{i+1}} = 1 \quad (\forall i) \right\},$$

$$\sigma : \Sigma_A \longrightarrow \Sigma_A \\ \downarrow \qquad \qquad \downarrow \\ x = (x_i)_{i \in \mathbb{Z}} \longmapsto y = (y_i)_{i \in \mathbb{Z}} \quad \text{但. } y_i = x_{i+1}. \quad //$$

このとき、とくに、 $(\Sigma_A, \sigma) \in \mathcal{M}$ 個の symbol 上の sub-shift という。

連続関数 $\varphi : \Sigma_A \longrightarrow \mathbb{R}^+ \equiv \{t \in \mathbb{R} ; t > 0\}$ に対して、

$$\text{sus}(\Sigma_A, \varphi) \equiv \Sigma_A \times \mathbb{R} / (x, \varphi(x)) \sim (\sigma(x), 0)$$

と置き、 $\text{sus}(\Sigma_A, \varphi)$ 上の flow $\text{sus}_t(\sigma, \varphi) \in \Sigma_A \times \mathbb{R}$ 上の flow $\varphi_A : (x, t) \mapsto (x, t+A)$ から $[\text{sus}(\Sigma_A, \varphi)]$ 上の $\sim$ から induce される flow とする。

Def $(\text{sus}(\Sigma_A, \varphi), \text{sus}_t(\sigma, \varphi)) \in \mathcal{E}$, $\varphi \in \text{ceiling function}$ とする (Σ_A, σ) の suspension (flow) とする。

II. diffeo, flow $\rightsquigarrow$ shift, suspension

$M \in \text{compact smooth mfd}$, $f : M \rightarrow M \in \text{Axiom A diffeo}$.

とすると、 f の non-wandering set $\Omega(f)$ は次の様に分割される；

$$\Omega(f) = \Lambda_1 \sqcup \dots \sqcup \Lambda_k.$$

ここで、 $\sqcup$ は disjoint union を意味するものとし、各 Λ_i は f -不変な閉集合； $f|_{\Lambda_i}$ は (topologically) transitive. このとき、上の各 Λ_i は basic set of f という。

① [R. Bowen] [4]

各 basic set Λ_i に対して、非負整数行列 A_i と連続関数

$h_i: \Sigma A_i \rightarrow \Lambda_i$ とが存在し、次をみたす；

- h_i は finite-to-one な onto map で、かつ全と全とのところで one-to-one.
- 次の図式は commute する；

$$\begin{array}{ccc} \Sigma A_i & \xrightarrow{\sigma} & \Sigma A_i \\ h_i \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow h_i \\ \Lambda_i & \xrightarrow{f|_{\Lambda_i}} & \Lambda_i \end{array}$$

この定理は、diffeo の basic set が shif で、“全と完全に”記述されることを示す。

次に flow について考える；

M 上と同じ、 $\phi_t: M \rightarrow M$ を M 上の flow とする。このとき、次をみたす $X \subset M$ は $\{\phi_t\}$ の basic set という；

- (0) X は ϕ_t -不変 (for $\forall t$) な閉集合
- (1) X は stationary point (i.e. $\forall \phi_t$ で fix される点) である。
- (2) X は hyperbolic
- (3) X 内の周期点全体は, X 内で稠密。
- (4) $\phi_t|_X$ は transitive.
- (5) $U \supset X$ なる開集合 U が存在して, $X = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} \phi_t U$

[2] [R. Bowen] [3]

$X \in \text{flow } \phi_t: M \rightarrow M$ の 1 次元 basic set とする。このとき (transitive) subshift Σ_A と ceiling function φ , 並びに homeo. $h: X \rightarrow \text{sus}(\Sigma_A, \varphi)$ とが存在して, 次の可換になる;

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{\phi_t|_X} & X \\
 \downarrow h & \circlearrowleft & \downarrow h \\
 \text{sus}(\Sigma_A, \varphi) & \xrightarrow[\text{sus}_t(\sigma, \varphi)]{} & \text{sus}(\Sigma_A, \varphi)
 \end{array}$$

この定理では "parameter もこめて conjugate" と主張している。

この定理は, flow の 1 次元 basic set が suspension で "完全に" 記述されることを示している。

III shift, suspension diffco, flow

前節に述べた様に, flow や diffco. の basic set から, shift (や, その suspension) への対応が与えられる。必然的に, その逆はどうか? という問題が考えられる。即ち;

[問題] { shift の suspension を与えたとき, それを diffco
| flow の hyperbolic set として実現できるか? }

これについて, 一般的に, 次の定理が成立する。

③ [R.F. Williams] [7]

非負整数係数の irreducible matrix (即ち, 対応する shift が, top. transitive) の直和となる任意の行列 A について,
 $f: S^3 \rightarrow S^3$: Small diffco が存在して, 次のみたす;

- (1) f は identity に isotopic
- (2) f の index 0 の non-wandering set は, 1つの sink.
 f の index 3 の non-wandering set は, 1つの source.
- (3) f は index 1 の non-wandering set に制限したものの, 及び index 2 のそれに制限したものは, 各々 (Γ_A, σ) と conjugate である。(即ち, ④の h_i の様な homeo. が存在する。)

ここで, index = unstable 次元. とおく。

但, Axiom A と strong transversality をみたし, non-wandering set が 0 次元となる diffeo $\in$ Smale diffeo. という

一方, flow については;

④ [R. Bowen] [3]

$A \in$ transitive な, $m \times m$ -行列で, 成分は 0 あるいは 1 とし, $\varphi: \Sigma_A \rightarrow \mathbb{R}^+$ を連続写像とする. このとき $\forall x; 1 \leq x < \infty$ について, $(2m+1)$ 次元 (C^x) 多様体 M (n は十分大) と, flow $\phi_t: M \rightarrow M$ $\mathbb{R}$ 上, ϕ_t の basic set X が存在して, $(X, \phi_t|_X)$ と $(\text{sus}(\Sigma_A, \varphi), \text{sus}_x(\sigma, \varphi))$ とは isomorphic (即ち, 同様の homeo がある)。

[注] 上の定理で, φ を定数関数とすると $n=1, x=\infty$ となる。故に, 上の帰結 “isomorphic” と “conjugate” にゆめければ, $M \in (2m+1)$ 次元 C^∞ 多様体, flow ϕ_t も C^∞ なる様にできる。(上の③を使えば, M が 4 次元にとれることもわかる。)

IV Smale diffeo の basic set とその subshift.

Smale diffeo の basic set について, 結果をまとめておく:

5 [J. Franks] [5]

$\{A_j\}_{j=0}^m \in$, 非負整数係数行列 A_j の族で, 各 A_j は irreducible な行列の直和, A_0 と A_m は permutation matrix なるものとし, $M \in 2(\geq 3)$ 次元 compact mfd とする.

さらに, M 上は Morse function $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して,

$\#\{\varphi \text{ の index } j \text{ の critical pt}\} = \text{reduced degree of } A_j$ とみたすとする. このとき,

(*) $\left\{ \begin{array}{l} f: M \rightarrow M: \text{identity と isotopic to Smale diffeo が存在して, ある } k \geq 1 \text{ に対して} \\ f|(\text{index } j \text{ の basic set}) \cong_{\text{conjugate}} (\Sigma_{A_j^k}, \sigma) \end{array} \right.$

ここで, A の reduced degree とは, 多項式 $\det(I - tA)$ の係数 $\in \text{mod } 2$ で reduce して得られる多項式の次数.

6 [J. Franks] [5]

$\{A_j\}_{j=0}^m$, $M^2 \in 5$ と同じとする. さらに, M 上の Morse fn $\varphi: M \rightarrow \mathbb{R}$ で $\#\{\text{index } j \text{ の crit pt of } \varphi\} = \text{mod } 2 \text{ Betti number of } M$ とみたすものがあるとする. このとき,

$$(*) \Leftrightarrow \begin{array}{l} d_g - d_{g-1} + \cdots \pm d_0 \geq \beta_g - \beta_{g-1} + \cdots \pm \beta_0 \quad (\forall g) \\ \sum (-1)^j \cdot d_j = \chi(M) \end{array}$$

ここで, $d_j \equiv A_j$ の reduced degree, $\beta_j \equiv M$ の mod 2 Betti number.

[7] [S. Batterson] [1]

$M \in \text{compact surface}$, $A_0, A_1, A_2 \in \text{[5] の様に行る}$ とする。
 このとき,

$$(*) \Leftrightarrow d_2 - d_1 + d_0 = \chi(M)$$

[8] [J. Franks] [5]

任意の compact surface M に対して, 或る A が存在して,
 Σ_A は, いくつかの Smale diffeo $f: M \rightarrow M$ の いくつかの basic set と conjugate である。

[9] [J. Franks] [6]

$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ とするとき, いくつかの S^m 上にも,

$\Omega(f) \cong \Sigma_A \cup \{\text{有限個の周期点}\}$ なる Smale diffeo $f: S^m \rightarrow S^m$ は存在しない。

[10] $A \in \text{ODCM-type}$ とする。このとき S^2 上の Smale diffeo $f: S^2 \rightarrow S^2$ で, $\Sigma_A \cup \{\text{有限個の周期点}\} \cong \Omega(f)$ なるものが存在する。

但, ODCM-type とは次の様に def される;

Def 連続写像 $\varphi: [0,1] \rightarrow [0,1]$ 或るいは、写像度 1 の
連続写像 $\varphi: S^1 \rightarrow S^1$ を Markov map

$\Leftrightarrow \exists I_1, I_2, \dots, I_k$: closed intervals 2"文を満たす
ものがある ;

$$\left\{ \begin{array}{l} \cdot \text{int } I_i \cap \text{int } I_j = \emptyset \quad (\forall i \neq j) \\ \cdot \bigcup I_i = [0,1] \text{ or } S^1 \\ \cdot \varphi|_{I_i} \text{ is monotone } (\forall i) \\ \cdot \forall i \text{ に対して } \exists J_i \subset \{1, 2, \dots, k\} \text{ s.t. } \varphi(I_i) = \bigcup_{j \in J_i} I_j \end{array} \right.$$

Def 非負整数係数行列 A を ODCM-Type (one-dimensional continuous Markov-type)

$\Leftrightarrow \exists \varphi: [0,1] \hookrightarrow \text{ or } S^1 \hookrightarrow$: Markov map s.t.
 $A_{ij} = \text{"} \varphi(I_i) \text{ が } I_j \text{ に cover する回数" } (\forall i, j)$

[10] の証明は、全て自明であろう。即ち、こゝでは、
省略することにする。

V Concluding Remarks

前節で見た様に、一般の A について、 $\Sigma_A \in \text{mfd}$ とくは、2次元 surface に Smale diffeo の basic set として埋め込むことは、難しい。故に、もう少し弱く、diffeo の hyperbolic な invariant set として埋め込むことはできるか？と考える。このとき、[3] により、mfd は2次元の時のみ、意味がある。

また、当然求められる条件として、埋め込まれた Σ_A が isolated であることが要求されるだろう。

diffeo. であることにこだわらなければ、次の定理が知られている；

[11] [R. Bowen] [2]

周期点 が稠密である様な 任意の Σ_A に対して、

Axiom A を満たす imbedding $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ (U は $\mathbb{R}^2$ の open subset) が存在して、 $\Omega(f) \cong \Sigma_A$.

然し、[11] に於いては、必然的に、 $\Omega(f) \subseteq \bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^i U$ となり、余り意味のある定理とは思えない。そこで、次の様なものを考える；

これまで知られている basic set は、いずれも、 mfd 内の、有限個の rectangles K_i の union $K = \bigcup K_i$ について、 $\bigcap_{i \in \mathbb{Z}} f^i(K)$ なる形で得られるもののみである。そこで、それを延ばして次の様な定義をする； $M \in \text{cpt surface}$ とする。

① $\mathbb{R}^2$ 上の rectangle $R = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2; |u| \leq 1, |v| \leq 1\}$ の

M 内への embedding φ_i による imbedded image $K_i \subset M$ とおく； $K_i = \varphi_i(R)$ 。このとき、 u -軸と平行な lines の image $E \subset K_i$ の " u -方向" ということにする。

② $f: M \rightarrow M$: diffeo について、 f -invariant closed ^(hyp.) subset $X \subset M$ が、次を満たすとき、 $X \in \text{horseshoe type}$ といふ；

(1) $\exists K_1, \dots, K_l$; as above s.t.

(a) $f(K_i) \cap K_j \neq \emptyset$ のとき、 K_i の u -方向は、 K_j の u -方向に、 f によって、うつる

(b) $\forall i, j$; $\forall n$ について、

$$f^n(K_i) \cap K_j = \bigcup_{\substack{1 \leq x_0, x_1, \dots, x_n \leq l \\ A_{x_p x_{p+1}} = 1 (\forall p)}} \left(\bigcap_{\alpha=0,1,\dots,n} f^\alpha(K_{x_\alpha}) \right)$$

ここで、 A は、 $l \times l$ 行列で、成分は 0 or 1.

(2) X の mbd U が存在して、 $\Delta(f) \cup U = X$.

Conj. $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ に対応する shift ΣA は S^2 上の

いかなる diffeo に対しても、その horse shoe type invariant set とは conjugate にならないのである。

残念ながら、(7月以来、可成時間を経過したにもかかわ
らず、) 証明は、まだ できていない。

//

REFERENCES

- [1] Batterson, S., Constructing Smale diffeomorphisms on compact surfaces, Trans.A.M.S. 257 (1980), 237-245.
- [2] Bowen, R., Topological entropy and Axiom A, Proc. Pure Math. 14 (1970), 23-41.
- [3] _____, One-dimensional hyperbolic sets for flows, J. Diff. Eq. 12 (1972), 173-179.
- [4] _____, Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms, Springer Lecture Notes in Math. 470.
- [5] Franks, J., Constructing structurally stable diffeomorphisms, Ann. Math. 105 (1977), 343-359.
- [6] _____, A reduced zeta function for diffeomorphisms, Amer. J. Math. 100 (1978), 217-243.
- [7] Williams, R.F., Classification of subshifts of finite type, Ann. Math. 98 (1973), 120-153; Errata *ibid.* 99 (1974), 380-381.