

Expansive Homeomorphisms について

広島大学総合科学部 加藤 久男

考える space はすべて compact metric spaces とし、
 Continuum とは、compact connected nondegenerate space
 とする。homeomorphism $f: X \rightarrow X$ が次の性質をもつとき、
 f は expansive homeomorphism と呼ばれる：ある正数 $c > 0$
 が存在して次を満たす：if $x, y \in X$ and $x \neq y$, then
 $d(f^n(x), f^n(y)) > c$ for some integer $n \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$.
 逆に homeomorphism $f: X \rightarrow X$ が expansive でないとは、
 $\forall \varepsilon > 0, \exists x, y \in X$ s.t. $x \neq y, d(f^n(x), f^n(y)) < \varepsilon$ for
 $\forall n \in \mathbb{Z}$. つまり微小な変化でいつまでも微小であり続ける
 ものがある。これらの homeomorphism は力学系、および
 Ergodic Theory などにも重要な応用があり研究が続けられて
 いる。例えば、「力学系とエントロピー：青木統夫、白岩謙一
 共立出版」、「An Introduction to Ergodic Theory, Walters,
 G T M」など参。ここでは次のような基本的な問題を考えよ
 う。

問題: What kinds of compacta admit expansive homeomorphisms?

§1. 0次元の場合.

k を任意の自然数 ($k \in \mathbb{N}$) とする. $S(k) = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$,
 $\Sigma(k) = \prod_{i=-\infty}^{\infty} S(k)$ とする. Shift homeomorphism $\sigma: \Sigma(k) \rightarrow \Sigma(k)$
を $\sigma((x_i)_i) = (x_{i-1})_i$ で定義する. 今, $\Sigma(k)$ の σ -invariant
closed set D (i.e., $\sigma(D) = D$) に対し $\sigma|_D: D \rightarrow D$ は expansive
homeomorphism である. このとき次はよく知られている.

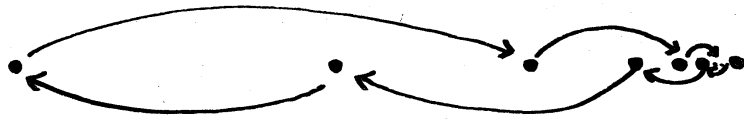
(1.1) $\dim X = 0$ とする. このとき homeomorphism $f: X \rightarrow X$
に對し, f が expansive homeomorphism $\iff \exists k \in \mathbb{N}$.
 $\exists \sigma$ -invariant set $D \subset \Sigma(k)$ and $\exists g: X \rightarrow D$ homeomor-
phism で次をみたす.

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{f} & X \\
 g \downarrow \approx & \curvearrowright & g \downarrow \approx \\
 D & \xrightarrow{\sigma|_D} & D
 \end{array}$$

一般にすべての 0次元 compactum 上には expansive
homeomorphism は存在しないが (例えは X が rigid, つまり
 1_X が唯一の homeomorphism となる無限個数の 0次元 compactum
など), 次の図の 0次元 compactum 上には expansive

homeomorphism が存在する.

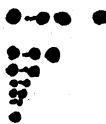
$$X = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\}$$



そこで上の図の次に単純であると思われる次のような図を考えると、筆者にはこの図形上に expansive homeomorphism が存在するかわかりません。



$$(X \times X) / \{x \times \{0\}\}$$



問題: Expansive homeomorphism をもつ 0次元 compactum
の topological characterization を与えよ。

§ 2. 一次元 Continuum の場合

connected な compactum (= continuum) 上の expansive homeomorphism を認める例としては、R.F. Williams により 2-adic solenoid が発見されたのが始めであると思われる。一般に homeomorphism $f: X \rightarrow X$ が与えられた時、これが expansive かどうか決定することは非常にむずかしいのです。

が、そこでもしあるとすると、次の場合のような homeomorphism であると比較的決定しやすいと考えられる。つまり、

$g: X \rightarrow X$ を map (= continuous function) とし、 g より作られる inverse system;

$$X \xleftarrow{g} X \xleftarrow{g} X \xleftarrow{\quad} \dots$$

を考える。また、この inverse limit

$$(X, g) = \left\{ (x_i)_{i=1}^{\infty} \in \prod_{i=1}^{\infty} X_i \mid g(x_{i+1}) = x_i \quad \forall i \right\}$$

をとり、shift homeomorphism $\hat{g}: (X, g) \rightarrow (X, g)$ を $\hat{g}((x_i)_i) = (g(x_i))_i = (x_{i-1})_i$ で定義する。ここで g をい

うる変化させた時 $\hat{g}$ が expansive homeomorphism になる

かを考えよう。a map $g: X \rightarrow X$ が positively expansive map とは、 $\exists c > 0$ s.t. if $x, y \in X, x \neq y$, then

$d(g^n(x), g^n(y)) > c$ for some natural number $n \geq 0$

と定義する。代表的な例として、 $S = \{x \in \mathbb{C} \mid \|x\| = 1\}$: circle

とし、 $g: S \rightarrow S$ を $g(e^{i\theta}) = e^{i2\theta}$ とおくと、 g は positively expansive map である。この時次が知られている。

(2.1) $g: X \rightarrow X$ を positively expansive map とすると、 $\hat{g}: (X, g) \rightarrow (X, g)$ は expansive homeomorphism.

Williams の問題として、次が知られている。

問題 (Williams): X を tree-like continuum とする。この

時、 X 上に expansive homeomorphism は存在するか？ 特に平面内の一次元 continuum X で平面を separate しないものは expansive homeomorphism をもつか？ (注) M. Barge により expansive homeomorphism をもつ平面内の continuum の存在がごく最近得られた。この continuum は一次元 indecomposable で平面を separate するものである。また J. Kennedy により arc-like continua 上にカオス的 homeomorphisms が構成された。

そこで expansive homeomorphism について知られている結果をあげると、

(1) (Mañé). If $f: X \rightarrow X$ is expansive homeomorphism, then $\dim X < \infty$ and any minimal set of f is 0-dimensional.

(2) n 次元トーラス: $T^n = \underbrace{S \times \cdots \times S}_n$ ($n \geq 2$), orientable 2-manifolds with positive genus は expansive homeomorphism をもつ。

(3) arc $= I = [0, 1]$, circle S^1 , および 2-sphere S^2 (平出) 上には expansive homeomorphism をみとめない。また、 $\forall g: I \rightarrow I$ に対し、 $\hat{g}: (I, g) \rightarrow (I, g)$ は expansive homeomorphism でないことが知られている。

次に今回得られた結果をあげてみる。

定理 1. There are no expansive homeomorphisms on Suslinian continua. つまり $\dim X > 0$ かつ X が expansive homeomorphism をもつならば、 X は uncountable collection of mutually disjoint, nondegenerate subcontinua of X をもつ。特に X が rational continuum (つまり、 $\forall \varepsilon > 0$ $\forall x \in X$ に対して $\exists$ n.b.d U of x in X s.t. $| \{ \partial U \}^{\#} | \leq \chi_0$) 上には存在しない。
($\text{diam } U < \varepsilon$)

定理 2. There are no expansive homeomorphisms on hereditarily decomposable tree-like (circle-like) continua. (2-adic solenoid は indecomposable)

定理 3. X を 1次元 ANR, $g: X \rightarrow X$ を null-homotopic な map ($g \simeq 0$) とすると、 $\hat{g}: (X, g) \rightarrow (X, g)$ は expansive homeomorphism でない。特に tree 上の任意の map g から作られる shift homeomorphism $\hat{g}: (X, g) \rightarrow (X, g)$ は expansive でない。但し、 (X, g) は nondegenerate とする。

定理 4. X を Peano continuum と仮定する (= locally connected continuum)。もし X が平面内に含まれるならば、 X は expansive homeomorphism をもたない。また、 X が 1次元 AR な neighborhood をもつならば、 X は expansive homeomorphism と認めない。

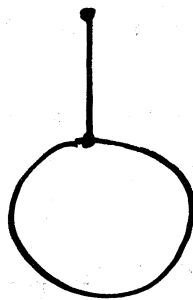
定理3 に関係して次のことがわかる。 X を 1次元 compact ANR とし、 $f: X \rightarrow X$ を map とする。このとき、もし $\hat{f}: (X, f) \rightarrow (X, f)$ が expansive であると、(2.1) の逆に近い性質が得られる。つまり、 $\exists$ a sequence $\{A_i\}_0^\infty$ of arcs in X s.t.

(1) $f|_{A_0}: A_0 \rightarrow X$ は positively expansive map and $f^n(A_0)$ contains simple closed curve for $\forall n \geq 1$,

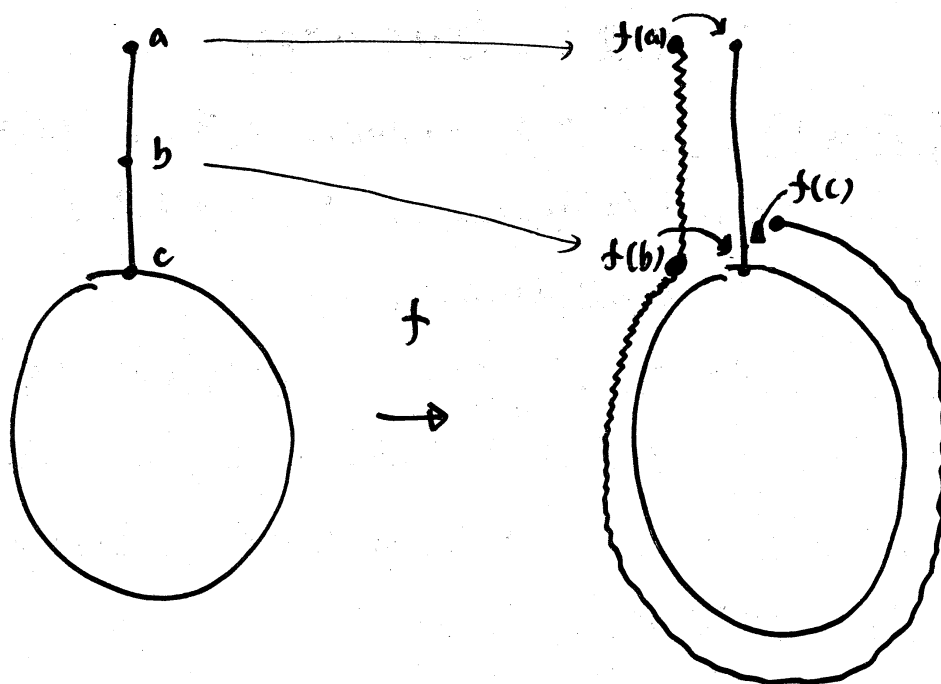
(2) $f(A_{i+1}) = A_i$, $f|_{A_{i+1}}$ ($i \geq 0$) is injective

(3) $\lim_{i \rightarrow \infty} \text{diam } A_i = 0$.

Example. X が 1次元 ANR の場合でも (2.1) の逆は不成立である。 X を 図のような graph とする (= circle + arc)



map $f: X \rightarrow X$ を circle 上では 2回りで、arc 上では次の図のようとする。



この時 $\hat{f}: (X, f) \rightarrow (X, f)$ は expansive homeomorphism であるが、 f は positively expansive map ではない。つまり、 ϵ が十分小さな正数をとっても f は 1:1 でない。したがって、(2.1) の逆は不成立である。

次の section で定理 1 と 2 の証明のアイデアを与えよう。

§ 3. 定理1と定理2の略証.

定理1 について: X を continuum とする. $C(X) = \{A \mid A \text{ は } X \text{ の subcontinua} \} (= \text{hyperspace of } X)$ を考え、 $C(X)$ 上に metric $d_H (= \text{Hausdorff metric})$;

$d_H(A, B) = \inf \{ \varepsilon > 0 \mid U_\varepsilon(A) \supset B, U_\varepsilon(B) \supset A \}$ を考える. $\therefore U_\varepsilon(A)$ は A の ε -n.b.d. $C(X)$ は compact metric space である. $M \subset C(X)$ を任意の subset とするとき、次の集合 $M^\dagger$ を考える.

$M^\dagger = \{ A \in C(X) \mid \forall \varepsilon > 0, \forall k \in \mathbb{N} \text{ に対し, } \exists A_1, A_2, \dots, A_k \in M \subset C(X) \text{ s.t. each } A_i \text{ is nondegenerate, } A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j), d_H(A, A_i) < \varepsilon \text{ for } \forall i \}.$

すると、 $M^\dagger$ は closed in $C(X)$ で $M^\dagger \supset (M^\dagger)^\dagger$ であることがわかる。そこで、任意の ordinal に対し、

$M_1 = M^\dagger, M_{\alpha+1} = (M_\alpha)^\dagger, M_\lambda = \bigcap_{\alpha < \lambda} M_\alpha (\lambda: \text{limit})$ で定義する。

次にこれから $M = C(X)$ とする。

Claim 1. X : a continuum. このとき

X : Suslinian $\iff M_\alpha = \emptyset$ for some countable ordinal α .

$\therefore \Rightarrow$ のみ示す。今 $M_\alpha \neq \emptyset$ for any countable ordinal α と

仮定する。このとき

$$\left. \begin{array}{l} M_\alpha: \text{closed in } C(X) \\ C(X): \text{separable (Lindelöf)} \end{array} \right\} \Rightarrow M_\alpha = M_{\alpha+1} \text{ とある countable ordinal } \alpha \text{ がある。}$$

仮定より、 $M_\alpha = M_{\alpha+1} (= (M_\alpha)^+) \neq \emptyset$ 。帰納的に次の性質をみたす subcontinua $A_{i_1 i_2 \dots i_n}$ ($i_j = 0 \text{ or } 1$) of X と n.b.d $U_{i_1 i_2 \dots i_n}$ of $A_{i_1 i_2 \dots i_n}$ in X がとれる。

- (1) $U_{i_1 i_2 \dots i_n} \subset U_{i_2 i_2 \dots i_{n-1}}$
- (2) $\text{cl } U_{i_1 \dots i_{n-1} 0} \cap \text{cl } U_{i_1 i_2 \dots i_{n-1} 1} = \emptyset$
- (3) $\exists r > 0$ s.t. $\text{diam } A_{i_1 i_2 \dots i_n} > r$
- (4) $\text{cl } U_{i_1 i_2 \dots i_n} \subset U_{1/2^n}(A_{i_1 i_2 \dots i_n})$.

このとき

$A_{i_1 i_2 \dots} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{cl } U_{i_1 i_2 \dots i_n}$ とおき、collection $\mathcal{A} = \{ A_{i_1 i_2 \dots} \mid i_j = 0 \text{ or } 1 \}$ を考え、これは uncountable, mutually disjoint subcontinua より成る collection であり、 X は non Suslinean となる。

Claim 2. $f: X \rightarrow X$ が expansive homeomorphism として $\dim X > 0$ とする。このとき、 $M_\alpha \neq \emptyset$ for any ordinal α 。

$\therefore$ まず次の Lemma を必要とする。

Lemma. $\exists \delta > 0$ s.t. if $A \in C(X)$, A is non degenerate,

then $\exists$ a natural number $n_0 = n(A)$ で次のいずれかが満たす。

(*) $\text{diam } f^n(A) \geq \delta$ for $\forall n \geq n_0$.

(**) $\text{diam } f^{-n}(A) \geq \delta$ for $\forall n \geq n_0$.

この Lemma を使って Claim 2 を示そう。

まず $\varepsilon_1 > \varepsilon_2 > \dots$ で $\lim \varepsilon_i = 0$ とする正数列 $\{\varepsilon_k\}$ をとる。この ε_k に対し、 $\exists n_k \geq k$ で次を満たすものをとる；

if $B_1, B_2, \dots, B_{n_k} \in C(X)$, then $\exists B \in C(X)$ s.t.
 $d_H(B, B_{i_j}) < \varepsilon_k$ for some $j = 1, 2, \dots, k$.

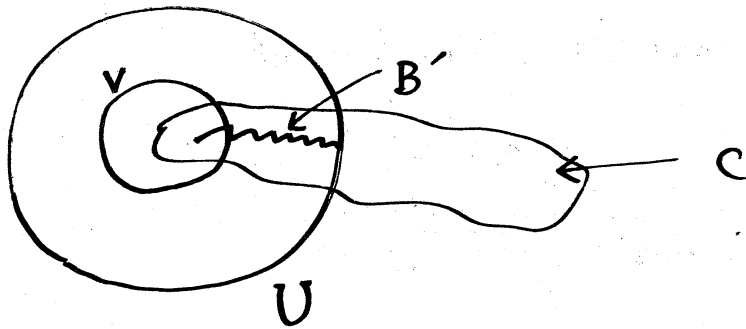
A を任意の nondegenerate な subcontinuum とする。ここで $B_1, B_2, \dots, B_{2n_k} \in C(A)$ で $B_i \cap B_j = \emptyset$ ($i \neq j$)、 B_i は nondegenerate for $\forall i$ なものをとる。Lemma より、

$\text{diam } f^n(B_i) \geq \delta$ ($i = 1, 2, \dots, n_k$) for some integer $n \in \mathbb{Z}$ としてよい。 n_k のとり方より、 $\exists B^k \in C(X)$ で $d_H(B^k, f^n(B_{i_j})) < \varepsilon_k$ ($j = 1, 2, \dots, k$) とするものがある。ここで $B^k \rightarrow B$ としてよい。明らかに、

$B \in M_1$ and B is nondegenerate. また M_1 は次の性質 $\mathcal{N}_1$ を満たす。

($\mathcal{N}_1$) If $C \in M_1$ and C is nondegenerate, for any

U, V : open sets s.t. $\emptyset \neq V \subset U$, $C \cap V \neq \emptyset \neq C - \bar{U}$,
 $\exists B' \in M_1$ s.t. $B' \subset C \cap U \cap C$,
 $B' \cap V \neq \emptyset \neq B' \cap \partial U$.

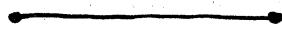


この(4)と...性質を利用して, transfinite induction により, 任意の ordinal α に対し, M_α は nondegenerate element を含み (4) をみたすことが示される。特に, $M_\alpha \neq \emptyset$ for any ordinal α .

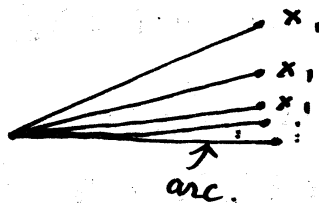
Claim 1, 2 を使うと 定理1 がでてくる。

M_α について次の例を与えよう。各 ordinal $\alpha \leq \omega_1$ に対し X_α を図のように決める。

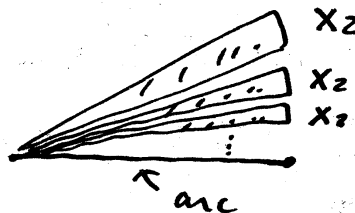
(1) X_1 : arc



(2) X_2 :

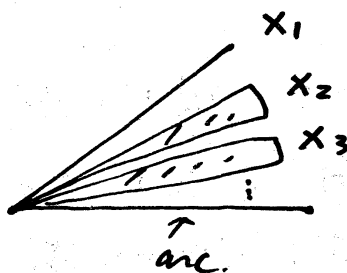


(3) X_3 :

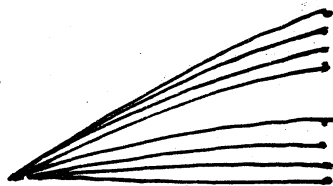


(ω) X_ω :

$\vdots$



(ω_1) X_{ω_1} = the cone of a Cantor set.



このとき、(a) $\alpha < \omega_1 \Rightarrow M_\alpha \neq \emptyset$, $M_{\alpha+1} = \emptyset$ ($M = C(X_\alpha)$).

(b) $M_{\omega_1} \neq \emptyset$ ($M = C(X_{\omega_1})$)

定理 2 について: X : a continuum とする. X の subsets の finite sequence $[A_1, A_2, \dots, A_n]$ が chain であるとは、

$A_i \cap A_j \neq \emptyset \Leftrightarrow |i - j| \leq 1$ とする. $U_1, U_2 \in X$ の subsets とし、 $[V_1, V_2, \dots, V_m]$ を chain とする. このとき $[V_1, \dots, V_m]$ が U_1 と U_2 に関して crooked であるとは、
 $\exists 1 \leq i(1) < i(2) < i(3) < i(4) \leq m$ s.t.

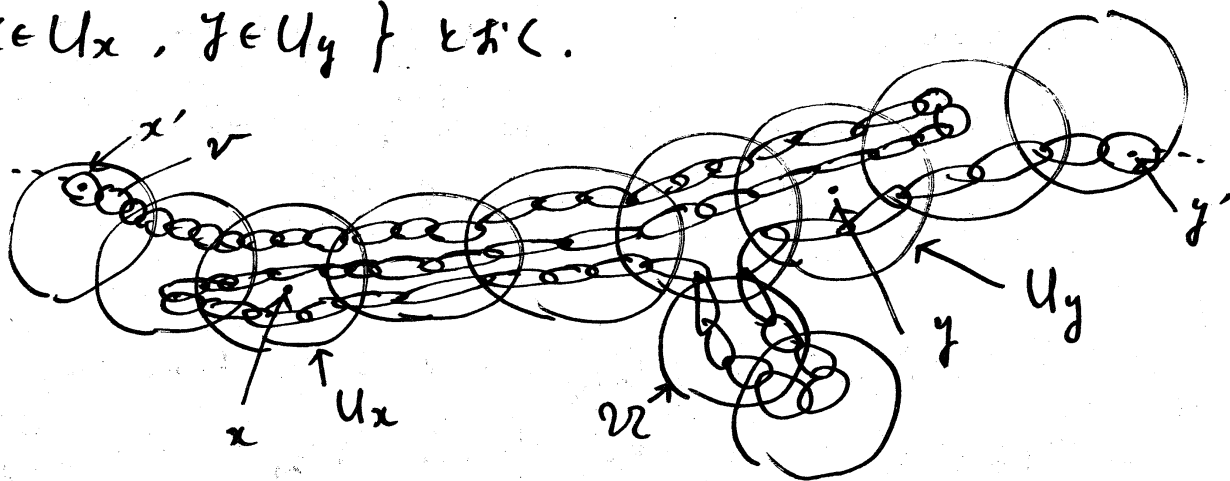
$V_{i(1)}, V_{i(3)} \subset U_1$ and $V_{i(2)}, V_{i(4)} \subset U_2$,
 を満たすときとする. この時、次の Lemma が本質的である.

Lemma. $f: X \rightarrow X$ は expansive homeomorphism of a continuum X とする. このとき $\exists \delta_1$ s.t. if $x, y \in X$, $x \neq y$ and $\mathcal{U}$ is any open cover of X , then

$\exists N \in \mathbb{Z}$ and $\exists \eta > 0$ s.t. if $[V_1, V_2, \dots, V_m]$ is any η -chain from x to y (i.e., $\text{diam } V_i < \eta$ and $x \in V_1, y \in V_m$), then $[f^N(V_1), f^N(V_2), \dots, f^N(V_m)]$ is a refinement of $\mathcal{V}$ and crooked between U_s and U_t , where $U_s, U_t \in \mathcal{V}$, $d(U_s, U_t) \geq \delta_1 - 2 \text{mesh } \mathcal{V}$.

以下、 X を tree-like continuum と仮定する。 $M \subseteq X \times X$ の $\forall$ set とする。 また、この M に対し

$M^\sharp = \{(x, y) \in X \times X \mid \forall r > 0, \forall \text{ open cover } \mathcal{V} \text{ of } X \text{ s.t. the nerve } N(\mathcal{V}) \text{ is a tree, } \exists (x', y') \in M \text{ s.t. } x' \neq y' \text{ and } \exists \text{ open cover } \mathcal{V}' \text{ of } X \text{ with } \text{mesh } \mathcal{V}' < r \text{ s.t. } \mathcal{V}' \text{ is a refinement of } \mathcal{V}, N(\mathcal{V}') \text{ is a tree and a chain } [V_1, V_2, \dots, V_m] \text{ from } x' \text{ to } y' \text{ is crooked between } U_x \text{ and } U_y, \text{ where } U_x, U_y \in \mathcal{V} \text{ s.t. } x \in U_x, y \in U_y\}$ とおく。



各 ordinal α に対し.

$M_1 = M^+$, $M_{\alpha+1} = (M_\alpha)^+$, $M_\lambda = \bigcap_{\alpha < \lambda} M_\alpha$ (λ : limit) とおく. 各 M_α : closed in $X \times X$ で単調に小さくなっていくことがわかる. 以下, $M = X \times X$ とする.

Claim 1. If X is a hereditarily decomposable tree-like continuum, then $M_\alpha = \emptyset$ for some countable ordinal α .

Claim 2. If $f: X \rightarrow X$ is an expansive homeomorphism of a tree-like continuum, then $M_\alpha \neq \emptyset \forall \alpha$.

∴) claim 1 に反して. $M_\alpha = M_{\alpha+1} = (M_\alpha)^+$ となる countable ordinal α をとる. このとき $M_\alpha = \emptyset$ と仮定しよう. 今 $M_\alpha \neq \emptyset$ と仮定する. 帰納的に, $(x_i, y_i) \in M_\alpha = (M_\alpha)^+$ と open cover $\mathcal{U}_i$ of X s.t. $N(\mathcal{U}_i)$ is a tree を次の条件を満たすようにとる.

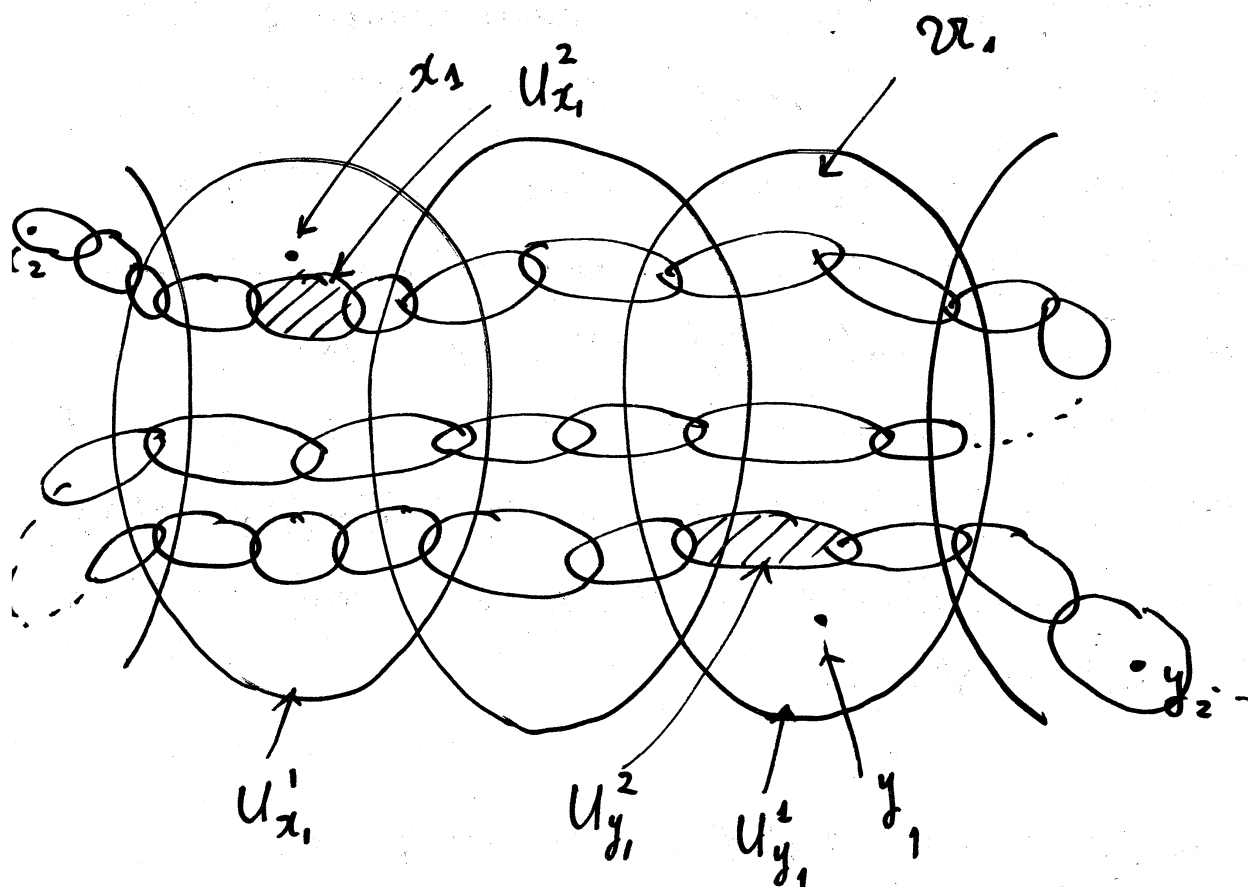
- (1) $\text{mesh } \mathcal{U}_i \rightarrow 0$. $\mathcal{U}_{i+1}$ is a refinement of $\mathcal{U}_i$.
- (2) a chain from x_{i+1} to y_{i+1} of $\mathcal{U}_{i+1}$ is crooked between $U_{x_i}^i$ and $U_{y_i}^i$, where $x_i \in U_{x_i}^i \in \mathcal{U}_i$, $y_i \in U_{y_i}^i \in \mathcal{U}_i$.

また $[U_{x_i}^i, U_{y_i}^i, \dots, U_{x_{i+1}}^i]$ を a chain from x_i to y_i of $\mathcal{U}_i$ とすると, この subchain $[U_{x_i}^i, \dots, U_{y_i}^i]$

$\tau: x_1 \in U_{x_1}^1 \supset U_{x_1}^2 \supset \dots$

$y_1 \in U_{y_1}^1 \supset U_{y_1}^2 \supset \dots$ かつ

$[U_{x_1}^{i+1}, \dots, U_{y_1}^{i+1}] \rightarrow$ crooked between $U_{x_1}^i$ and $U_{y_1}^i$ となるものを示さす。



$\tau: \{U_{x_1}^i\} \rightarrow x$

$\{U_{y_1}^i\} \rightarrow y$ としてよい。また $x \neq y$ とできる。

H : the irreducible continuum between x and y in X とする。 H は indecomposable, つまり H は proper subcontinua の 2 つの union でかけない。これは矛盾。

∴ Claim 2 について. まず $(x_0, y_0) \in X \times X$ ($x_0 \neq y_0$) なるものをか, ε にとる. また $\mathcal{U}_i$: open covers of X s.t. $\mathcal{U}_1 > \mathcal{U}_2 > \dots$.

$N(\mathcal{U}_i)$ is a tree and mesh $\mathcal{U}_i \rightarrow 0$ なるものとする.

この時, Lemma を使って, $\exists$ open covers $\mathcal{V}_i$ s.t. $\mathcal{V}_1 > \mathcal{V}_2 > \dots$, かつ $N(i) \in \mathbb{Z}$ に対し $f^{N(i)}(\mathcal{V}_i)$ is a refinement of $\mathcal{U}_i$ and a chain from $f^{N(i)}(x_0)$ to $f^{N(i)}(y_0)$ of $f^{N(i)}(\mathcal{V}_i)$ is crooked between U_1^i and U_2^i , where $d(U_1^i, U_2^i) \geq \delta_i - 2 \text{ mesh } \mathcal{U}_i$.

∴ $\{U_1^i\} \rightarrow x_1, \{U_2^i\} \rightarrow y_1$ としてよい. また $d(x_1, y_1) \geq \delta_1$. 明かかた $(x_1, y_1) \in M_1$. 帰納的に, $M_\alpha \neq \emptyset$ for any countable ordinal α を示せる. Claim 1 と 2 を使えば定理 2 が得られる.

最後に, 次のような問題が興味深いと思われる.

(予想). If a continuum X admits an expansive homeomorphism, is it true that X contains an indecomposable subcontinuum which is invariant for the expansive homeomorphism?

また.

(arc-like)

- (1) Does the pseudo-arc admit expansive homeomorphisms?
- (2) Does the Menger's Universal curve admit expansive homeomorphisms?