

鹿威しによる水滴落下系の計測と大偏差統計解析

山田健太¹ 宮崎修次²

¹ 〒604-8254 京都府京都市中京区東堀川通錦小路
上る四坊堀川町 622-2, 京都市立堀川高等学校

² 〒606-8501 京都府京都市左京区吉田本町,
京都大学大学院情報学研究科

syuji@acs.i.kyoto-u.ac.jp

Kenta Yamada

Kyoto-City Horikawa High School
Shibou-Horikawa-Machi 622-2, Nakagyo-ku,

Kyoto, 604-8254, Japan

Syuji Miyazaki

Graduate School of Informatics,
Kyoto University, Yoshida-Honmachi, Sakyo-ku,

Kyoto, 606-8501, Japan

Abstract: *Shishiodoshi* is a device designed for making noise and comprised of a bamboo pipe and running water, called a water spout. It consists of a water-filled bamboo tube which clacks against a stone when emptied, and the clack scares beasts and birds from gardens. For a fluctuating flow rate, intervals between the clacks distribute. The flow rate and the distribution function of the clack interval can be respectively identified as a velocity of a random walker and a first passage time distribution. The rate function of the flow rate is derived not according to its definition but by use of the distribution function of a first passage time. This idea is illustrated by coin-tossing large-deviation statistics.

Keywords: *Shishiodoshi*, Large Deviation, Rate Function, First Passage Time

この論文では、鹿威しに注ぐ単位時間当たりの流量（流量率）が一定ではなく、時間変動しているものとして、その振動間隔の分布や大偏差統計を考察する。

鹿威しの水受けの容積を V とし、時刻 t に依存する流量率を $f(t)$ とすると、 $t = t_0$ から空の鹿威しに注水を始め、 $t = t_0 + n$ で満水になったとすると、 $\int_{t_0}^{t_0+n} f(t)dt = V$ を満たす n が振動間隔である。満水になっ

たら、瞬時に排水するような理想的な鹿威しを今後考えることにする。

流量率が一定であれば、 n も一定となるが、流量率が変動すれば、 n は分布する。上の式で f をランダムウォーカーの速度、 V を正の値をとるゴール位置とみなすと、 n は原点から出発したランダムウォーカーがゴールに到着するまでの初通過時間に対応する。鹿威しの振動間隔を測定することで、このような初通過時間分布を得ることができる。

時間幅 n で粗視化した流量率の局所平均を z とすると

$$z = \frac{\int_{t_0}^{t_0+n} f(t)dt}{n} = \frac{V}{n}$$

を満たす。粗視量 z の分布 $P(n, z)$ から流量率の大偏差統計が得られる。 n が流量率 $f(t)$ の時間相関が十分に減衰する時間幅よりも十分大きいとき、 $P(n, z) \sim \exp[-n\psi(z)]$ となり、 $\psi(z)$ は流量率のレート関数である。流量率の長時間平均を $\bar{z}$ とおく。レート関数は $\psi(z)|_{z=\bar{z}} = \frac{d\psi(z)}{dz}|_{z=\bar{z}} = 0$ を満たす下に凸な関数である。また、中心極限定理の帰結として、レート関数は長時間平均の近傍で二次関数となる。

粗視量の分布 $P(n, z) \sim \exp[-n\psi(z)]$ に $z = V/n$ の関係を代入した $P(n, V/n) \sim \exp[-n\psi(V/n)]$ は水受けが満水になるまでに要する時間の分布、すなわち、初通過時間分布とみなすことができる。この分布を用いて、 $-\frac{1}{n} \log P(n, V/n)$ を V/n に対してプロットすると、近似的に流量率のレート関数が得られ、 $V \rightarrow \infty$ の極限で厳密なレート関数に一致すると予想する。

この予想を水滴落下が以下のような特別な場合に確かめる。単位時間間隔で単位体積の水滴が落ちるか落ちないかが等確率で起こるとする。公平なコイン投げの表と裏が「落ちる」と「落ちない」に対応する。実際の dripping faucet では、水滴の容積

と落下間隔には相関があることに注意しておく． n ステップで nz 滴落下する確率は $P(n, z) = \frac{n C_{nz}}{2^n} = \frac{n!}{(nz)!(n-nz)!2^n}$ で与えられる．スターリングの式 $\log N! \sim N \log N - N$ が $n!$, $(nz)!$, $(n-nz)!$ に適用できるとすると， $-\frac{1}{n} \log P(n, z) = \psi(z) = z \log z + (1-z) \log(1-z) + \log 2$ のようにレート関数が得られる．長時間平均は $\bar{z} = 1/2$ で， $\psi(z)|_{z=\bar{z}} = \frac{d\psi(z)}{dz} \Big|_{z=\bar{z}} = 0$ を満たし， $z = \bar{z}$ の近傍で， $\psi(z) = 2 \left(z - \frac{1}{2} \right)^2$ となる．

水受けの体積 V が nz 滴の水で満水になるとすると，それに要する初通過時間が n であり， z は n という時間幅で平均した流量率の局所平均 z である．粗視量 z の $P(n, z)$ に $z = V/n$ を代入した $P(n, V/n)$ を初通過時間（水受けを満水にするまでの時間）の分布とみなす．上記の水滴落下の場合は， $P(n, V/n) = \frac{n!}{(V)!(n-V)!2^n}$ となる． $V = 2, 3, 5$ の場合に，初通過時間分布を図 1 にプロットした． $P(n, V/n) = P(n, V/n)|_{n=2V} \exp[-n\psi(V/n)]$ とおく． $n = 2V$ は満水になるまでの平均時間である．そこで，縦軸 $-\frac{1}{n} \log \frac{P(n, V/n)}{P(2V, 1/2)}$ を横軸 V/n に対して図 2 にプロットした．厳密なレート関数と中心極限定理を表す放物線も描いた．但し，後者は本来成立する範囲を越えて表示してある．スターリングの式を利用していないにも関わらず，長時間平均より小さい領域では，厳密なレート関数によく一致している．大きい領域では，ずれがある．

流量率のレート関数を定義通りに求めようとする，瞬間値 $f(t)$ を計測し，時間幅 n で局所平均 z を求め，その粗視量の分布関数 $P(n, z)$ の対数を取り， $-n$ で割ることで求めることになる． n を無限大にする極限で，厳密なレート関数に一致すると考えられる．ここで提案する鹿威しを用いたレ-

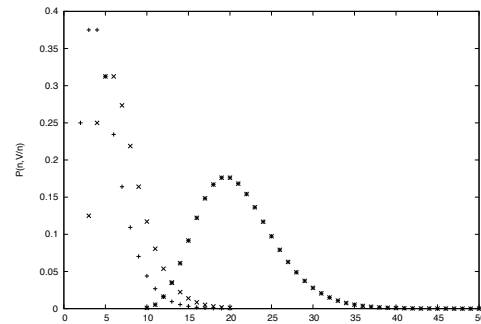


図 1: 初通過時間分布 $P(n, V/n)$ の n 依存性 ($V = 2 (+), 3 (x), 10 (*)$).

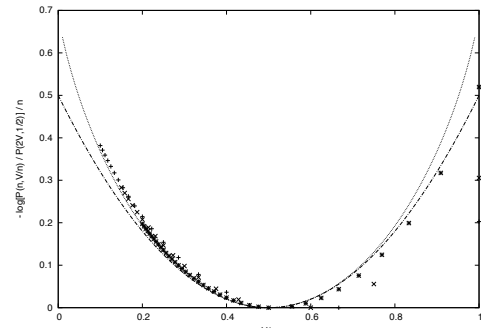


図 2: 初通過時間分布から近似的に得られた流量率のレート関数 $-\frac{1}{n} \log \frac{P(n, V/n)}{P(2V, 1/2)}$ の流量率 V/n 依存性 ($V = 2 (+), 3 (x), 10 (*)$). 厳密なレート関数は実線，中心極限定理を表す放物線は破線で表示している．後者については，見やすくするために，本来，中心極限定理が成り立つ範囲を越えた広い範囲で表示している．

ート関数導出法は，瞬間値 $f(t)$ を計測することなく，初通過時間（体積 V の水受けを満水にするまでの時間） n の分布 $P(n, V/n)$ を求め， $-\frac{1}{n} \log \frac{P(n, V/n)}{P(V/\bar{z}, \bar{z})}$ を V/n に対してプロットすることで得られる．実際の水の落下に対して，鹿威しを用いて初通過時間分布を求め，流量率のレート関数を計測することが次の課題である．

謝辞 本研究は，グローバルサイエンスキャンパス京都大学実施分 (ELCAS) <http://elcas.kyoto-u.ac.jp/> の経済的支援に負っている．