

一般化 van der Monde 行列の行列式について

北本卓也

TAKUYA KITAMOTO

山口大・教育学部

YAMAGUCHI UNIVERSITY

山口哲

TETSU YAMAGUCHI

サイバネットシステム

CYBERNET SYSTEMS Co., LTD.

1 問題設定

$f_i(x)$ ($i = 1, \dots, n$) を x の多項式とすると、次の行列を考える。

$$M = \begin{bmatrix} f_1(x_1) & f_2(x_1) & \cdots & f_n(x_1) \\ f_1(x_2) & f_2(x_2) & \cdots & f_n(x_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_1(x_n) & f_2(x_n) & \cdots & f_n(x_n) \end{bmatrix} \quad (1)$$

この行列は $f_i(x) = x^{i-1}$ とした時に、van der Monde 行列となるので、van der Monde 行列の一般化と考えることが出来る。行列の形より、次の補題を容易に見て取れる。

補題 1 (1) で行列 M を定義するとき、 $\text{Det}(M)$ は x_i ($i = 1, \dots, n$) の交代式である。

補題 1 より、 $\text{Det}(M)$ は

$$\text{Det}(M) = g(x_1, \dots, x_n) \prod_{i>j} (x_i - x_j) \quad (2)$$

(ただし、 $g(x_1, \dots, x_n)$ は x_i ($i = 1, \dots, n$) の対称式) と書くことが出来る。 $g(x_1, \dots, x_n)$ は $x_1, \dots, x_n$ の対称式なので、基本対称式 $s_1 = x_1 + \dots + x_n, \dots, s_n = x_1 \cdots x_n$ の多項式 $h(s_1, \dots, s_n)$ で

$$h(s_1, \dots, s_n) = g(x_1, \dots, x_n) \quad (3)$$

を満たすものが存在する。(2),(3) より、

$$h(s_1, \dots, s_n) = \frac{\text{Det}(M)}{\prod_{i>j} (x_i - x_j)} \quad (4)$$

を満たす $h(s_1, \dots, s_n)$ が存在し、また、このような $h(s_1, \dots, s_n)$ が求まれば、(2) より $\text{Det}(M)$ も計算できる。よって以下では (4) の $h(s_1, \dots, s_n)$ を求める。

2 $h(s_1, \dots, s_n)$ の計算

$h(s_1, \dots, s_n)$ は $s_1, \dots, s_n$ の多項式であるが、その係数に関して次の定理が成り立つ。

定理 1 $h(s_1, \dots, s_n)$ を

$$h(s_1, \dots, s_n) = \sum \mu(e_1, \dots, e_n) s_1^{e_1} \dots s_n^{e_n} \quad (5)$$

の形で書き表す時、 $\mu(e_1, \dots, e_n)$ は

$$\mu(e_1, \dots, e_n) = \sum_{(i_1, \dots, i_n) \in \Psi(e_1, \dots, e_n)} \alpha_{i_1, \dots, i_n}^{(e_1, \dots, e_n)} \phi(i_1, \dots, i_n) \quad (\alpha_{i_1, \dots, i_n}^{(e_1, \dots, e_n)} \in \mathbf{R}) \quad (6)$$

と書ける。ただし、 $\Psi(e_1, \dots, e_n)$ は

$$\Psi(e_1, \dots, e_n) \stackrel{\text{def}}{=} \{ (j_1, \dots, j_n) \mid j_1, \dots, j_n \in \mathbf{Z}, j_1 + \dots + j_n = \sum_{i=1}^n e_i + \frac{n(n-1)}{2}, 0 \leq j_1 < \dots < j_n, \} \quad (7)$$

で定義される集合であり、 $\phi(i_1, \dots, i_n)$ は

$$\phi(i_1, \dots, i_n) \stackrel{\text{def}}{=} \text{Det} \left(\begin{bmatrix} w_{1,i_1} & w_{2,i_1} & \dots & w_{n,i_1} \\ w_{1,i_2} & w_{2,i_2} & \dots & w_{n,i_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_{1,i_n} & w_{2,i_n} & \dots & w_{n,i_n} \end{bmatrix} \right) \quad (8)$$

で定義される $w_{l,m}$ ($l, m \in \mathbf{Z}$) の多項式である。

上の定理の $\alpha_{i_1, \dots, i_n}^{(e_1, \dots, e_n)} (\in \mathbf{R})$ は $w_{i,j}$ に無関係な定数なので、 $f_i(x)$ が与えられる前に計算しておくことが可能である。よって $h(s_1, \dots, s_n)$ を計算するための次のアルゴリズムを得る（以下では $\alpha_{i_1, \dots, i_n}^{(e_1, \dots, e_n)}$ はあらかじめ計算されていると仮定する）。

- (1) 式 (5) の和に現れる可能性のある全ての指数 $(e_1, \dots, e_n)$ に対して以下の操作を行う。
 - (1.1) $\Psi(e_1, \dots, e_n)$ を (7) より求める。
 - (1.2) $\Psi(e_1, \dots, e_n)$ の各要素 $(j_1, \dots, j_n)$ に対し、 $\phi(i_1, \dots, i_n)$ を (8) より求める。
 - (1.3) $\mu(e_1, \dots, e_n)$ を (6) より求める。
- (2) $h(s_1, \dots, s_n)$ を (5) より求める。

3 結論

van der Monde 行列を一般化した行列の行列式アルゴリズムを示した。提案したアルゴリズムは、記号を含む行列の行列式の計算を必要としないため、直接的な方法よりも計算効率が良い。参考文献 [1],[2] では本稿で示した形で一般化された van der Monde 行列が現れ、その行列式が代数的 Riccati 方程式の求解に必要なになっている ([1],[2] では状態フィードバックで実現可能な最適 H_∞ , H_2 ノルムの計算法が述べられている)。よってこれらの問題の求解に本稿のアルゴリズムは有用である。

参 考 文 献

- [1] T. Kitamoto and T. Yamaguchi, "The optimal H_∞ norm of a parametric system achievable using a static feedback controller," *The IEICE Trans. Funda.*, Vol. E90-A, No. 11, pp. 2496–2509, 2007.
- [2] 北本、山口 "パラメータを含むシステムの LQ 制御問題について," 電子情報通信学会論文誌, 掲載予定.