

代数的 K 群 に関する

Wasserstein の仕事

著者 青本和彦

難解な Quillen の K 群の定義から、より直観的な Bolodine のそれと同型であることを証明した Wasserstein の論文を紹介する。

A を結合環とする. $M_n A$ を大きさ n の A を元とする matrix 環とおく. $MA = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n A$ とおき, GMA は MA の中の逆元を持つ元全体とおく. $\Theta A = \{ a = (a_{ij}) \in MA \mid a_{ij} = 0, i \geq j \}$, $\tilde{\Omega} A = \{ a = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in A, i, j \in \mathbb{N} \}$

且つ、各行、各列に高々有限個の non-zero 元 }
 $\Omega A = \tilde{\Omega} A / MA$ とおく. 又 $e: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ を単射として $e: \tilde{\Omega} A \rightarrow \tilde{\Omega} A$ を

$$(ea)_{ij} = \begin{cases} a_{kl} & i=ek, j=el \\ 0 & i \notin eN \text{ or } j \notin eN \end{cases}$$

により定義する.

[定義1] SA simplicial set with basept 0:
GMA の任意の有限集合に対して,

$\exists e: N \rightarrow N$ (単射), $(1+a)(1+b)^1 \in e \otimes A$
が任意の $a, b \in X$ で満たされる時 X を“単体”
と呼ぶ. これにより GMA に導入される単体構造
を SA と記す (Bolodine [2]).

[定義2] Bolodine の K_n を $K_n A = \pi_n SA$
 $1 \leq n < \infty$ により定義する.

[定義3] 群 G が与えられているとする.
 $f: S \rightarrow S^+$ (morphisms between simplicial
objects) が次の性質を満たすとする:

- i) S は $K(\mathbb{Z}, 1)$ で $\pi_1(S) \cong G$
- ii) $\text{Ker}(\pi_1 f)$ は G の極大完全部分群
- iii) $H_n(\omega' f) \cong 0 \quad n > 0$, ここに $\omega' f$ は
ホモトピー・ファイバー.

この時 Quillen の $K_n G$ ($1 \leq n < \infty$) を
 $\pi_n S^+$ とおく ([3]).

以上のものに

[定理] $K_n A \cong \pi_{n-1} GMA \quad 1 \leq n < \infty$
(Wasserstein [1]).

文献

[1] Л. Н. Васерштейн, Основы
Алгебраической K-Теории, Успехи Мат.
Наук 31 (1976), 87-148

[2] И. А. Володин, Алгебраическая
K-теория как экстраординарная теория
гомологий на категориях ассоциативных
колец с единицей, Изв. АН. 35 (1971),
123-138

[3] D. Quillen, Higher algebraic K-theory
I, Lec. Notes Math. 341 (1973), 77-139.