

QUASI-SIMILARITY OF OPERATORS

富山大 理 北野孝一

線形作用素についての quasi-similarity の概念は Sz-Nagy と Foias [18] により導入されて以来、不変部分空間の問題と関連が深いこともあり、近年多くの研究が発表されている。

1. Quasi-similarity と Hyperinvariant Subspaces

[定義] H, K は Hilbert 空間とし、 $A \in B(H)$, $B \in B(K)$ に対して、 A が B の quasi-affine transform である (記号 $A \prec B$) というのは、 H から K への 1 対 1 かつ dense range をもつ作用素 S が存在して $SA = BS$ が成り立つことである。 A と B が quasi-similar である (記号 $A \sim B$) というのは、 A が B の、かつ B が A の quasi-affine transform になっているときである。

Quasi-similarity と hyperinvariant subspace の関係については、

[定理] ([18, 8.16.20]) $A \in B(H)$, $B \in B(K)$ に対して、 $A \sim B$ で、 B が hyperinvariant subspace をもつ (即ち B の hyper-

invariant subspaces の全体を $\text{Lat}_h B$ で表わすとき, $\text{Lat}_h B \neq \{0, K\}$

$\Rightarrow A$ も hyperinvariant subspace をもつ (即ち, $\text{Lat}_h A \neq \{0, H\}$).

この定理に関連して Sz-Nagy, Foias [18] は unitary operator と, Hoover [16] は normal operator と quasi-similar な作用素に対して,

[定理] $A \in B(H)$, $B \in B(K)$, B は unitary 又は normal とき,

$A \cong B$

$\Rightarrow B$ の hyperinvariant subspaces の lattice $\text{Lat}_h B$ と $\text{Lat}_h A$ の sublattice との間には lattice isomorphism が存在する.

Fialkow [7] は non-normal operator まで拡張することを試みている. まず $T \in B(H)$ に対して, $(T)'$: T の commutant, $(T)''$: T の second commutant, $\mathcal{P}(H)$: H の closed subspaces の全体, $\gamma(T) = \{m \in \mathcal{P}(H); m = \overline{Q_m H} \text{ for some operator } Q_m \in (T)''\}$ とするとき,

[定理] (I) $T \in B(H) \Rightarrow \gamma(T) \subset \text{Lat}_h T$.

(II) $S, T \in B(H)$, $S \cong T \Rightarrow \exists$ function $g: \gamma(T) \rightarrow \mathcal{P}(H)$ s.t.

(1) $g(m) \in \text{Lat}_h S$ for $\forall m \in \gamma(T)$.

(2) g injective.

(3) $g(\{0\}) = \{0\}$, $g(H) = H$.

(4) $m, n \in \gamma(T)$, $m \subset n \Rightarrow g(m) \subset g(n)$.

(5) $\{m_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \gamma(T)$, $\bigcap_\alpha m_\alpha = \{0\} \Rightarrow \bigcap_\alpha g(m_\alpha) = \{0\}$.

$$(6) \quad \{m_\alpha\}_{\alpha \in I} \subset \delta(T), \quad \forall m_\alpha \in \delta(T) \Rightarrow g(\bigvee m_\alpha) = \bigvee g(m_\alpha).$$

$$(7) \quad S|g(m) < T|m \quad \text{for } \forall m \in \delta(T).$$

(8) R が non-zero part of $S|g(m) \Rightarrow \forall$ nonempty closed-and-open subset of $\sigma(R)$ は $\sigma(T|m)$ と交わる.

(9) V が non-zero part of $T|m \Rightarrow \forall$ nonempty closed-and-open subset of $\sigma(V)$ は $\sigma(S|g(m))$ と交わる.

[例] E を spectral operator $T \in B(H)$ の spectral measure とする. T の spectral subspaces は次のようになる

$$\text{Lat}_{sp} T = \{ E(\sigma)H; \sigma \text{ は Borel set} \}$$

ところで $E(\sigma)$ は $(T)''$ の元で, idempotent であるから $\text{Lat}_{sp} T \subset \delta(T)$ が成り立つ.

[系] $T \in B(H)$ spectral operator, $S \stackrel{g}{\sim} T$

$\Rightarrow \text{Lat}_h S$ には T の spectral subspaces の lattice $\text{Lat}_{sp} T$ と lattice isomorphic な sublattice が存在する.

[注1] A と B が similar 即ち invertible な J が存在して $AJ = JB$ が成り立つならば (i) $m \in \text{Lat } B \Leftrightarrow Jm \in \text{Lat } A$
(ii) $\forall m \in \text{Lat } B$ に対して $B|m$ と $A|Jm$ は similar になる.
これらは quasi-similar の場合には拡張できない. (ii) については Fialkow [7] は $A \stackrel{g}{\sim} B$ であるが, $m \in \text{Lat } A$ に対して $A|m$ は B のどんな part と $\forall$ quasi-similar にならないような作用素が存在することを示している.

[注2] lattice isomorphic に関して、Herrero [14] は、2つの quasi-similar な order 3 の nilpotent operators T hyperinvariant な subspaces の lattices L isomorphic にならないものが存在することを示している。

2. Quasi-similarity と Jordan Operator.

Apostol [1] は normal operator と quasi-similar になる条件を求めている。

[定理] X を complex Banach space とし、 $T \in B(X)$ が Hilbert space 上の normal operator と quasi-similar である。
 $\Leftrightarrow X_n \in \text{Lat } T$ ($n=1, 2, \dots, m$), $T|_{X_n}$ は normal operator と similar かつ $\bigcap_{i=1}^m \left(\bigvee_{n=i}^m X_n \right) = \{0\}$ if $m=\infty$ となるような basic sequence $\{X_n\}_{n=1}^m$ が存在する。

ここで countable sequence $\{X_n\}_{n=1}^m \subset \mathcal{P}(X)$ が basic であるとは、for any n , X_n と $\bigvee_{k \neq n}^m X_k$ が complementary である。
 $\bigcap_{i=1}^m \left(\bigvee_{n=i}^m X_n \right) = \{0\}$ if $m=\infty$ が成り立っていることである。

Fialkow [7] は上の定理を spectral operator に拡張を試みている。

[定理] $T \in B(H)$ が spectral operator と quasi-similar である。

$\Leftarrow M_n \in \text{Lat } T$ ($n=1, 2, \dots, m$), $T|_{M_n}$ spectral operator

かつ $\bigcap_{i=1}^m (\bigvee_{n=i}^m m_n) = \{0\}$ かつ $m=\infty$ をみたすような basic sequence $\{m_n\}_{n=1}^m$ が存在する.

[注] $\Rightarrow$ が成り立つかどうかは未解決である.

次に有限次元の空間の operator が Jordan canonical form と similar になることの無限次元の空間の場合への拡張を考えてみよう.

[定義] $\tilde{H} = \overbrace{H \oplus \cdots \oplus H}^n$ に act している (H は Hilbert space)

$n \times n$ 行列 $[A_{ij}]$ で定義される nilpotent operator

$$A_{i,i+1} = 1_H \quad \text{for } i=1, 2, \dots, n-1$$

$$A_{i,j} = 0 \quad \text{for other entries}$$

を order n の Jordan block operator という (H 上の zero operator は order 1 の Jordan block operator である). 次に, $H_1, H_2, \dots, H_m$ を Hilbert spaces とし, $n_1, \dots, n_m$ を自然数とする. $\tilde{H}_k = \overbrace{H_k \oplus \cdots \oplus H_k}^{n_k}$ ($k=1, 2, \dots, m$) とし, $\tilde{H}_k$ に act する order n_k の Jordan block operator を J_k とするとき, $\tilde{H}_1 \oplus \cdots \oplus \tilde{H}_m$ に act している operator $J_1 \oplus \cdots \oplus J_m$ を Jordan operator という.

Apostol, Douglas, Foias [2] (Williams [21] で別証) は nilpotent operator に対して.

[定理] 任意の nilpotent operator は Jordan operator と quasi-similar である.

これを Williams [23] は algebraic operator まで拡張した.

[定理] A を H 上の algebraic operator とし、 $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$ ($i \neq j$ ならば $\lambda_i \neq \lambda_j$) とあるとする。

$\Rightarrow$ Hilbert spaces $H_1, \dots, H_n$ 上に A を H 上で act している Jordan operators $J_1, \dots, J_n$ が存在して $A \sim B = \sum_{k=1}^n \oplus (\lambda_k 1_{H_k} + J_k)$ が成り立つ。

Sz-Nagy, Foias [19] は Jordan model の generalization に対応する概念を用いて、 C_0 operator の性質を quasi-similarity との関連で調べている。

3. Quasi-similarity と Spectrum の関係

quasi-similarity と spectrum の関係については、normal operator の場合には、Douglas [5] によれば、

[定理] quasi-similar normal operators は unitary 同値である。従って quasi-similar normal operators は equal spectra をもつ。

[注] unitary equivalent の手法では hyponormal operator に拡張できない。

[例] Sarason [Halmos 13, p309] : similar にもかかわらず unitary equivalent でない 2 つの hyponormal operators が存在する。

Clary [4] は別の手法により、hyponormal operator ま

で拡張した.

[定理] quasi-similar な hyponormal operators は equal spectra をもつ.

それから, Hoover [17] によれば,

[定理] quasi-similar isometries は unitary equivalent. 従って equal spectra をもつ.

ところが一般には quasi-similarity は spectrum を保存しない (Sz-Nagy, Foias [18, p250]). Hoover [17] は更に, compact 性も保存されないことを示している.

[例] $A \sim B$ であって, $\sigma(A) = \{z : |z| \leq 1\}$, $\sigma(B) = \{0\}$ しかも B は compact operator であるようなものが存在することを示している. 勿論 A は compact にならない.

[注] [18] では spectrum は保存されないが spectrum の boundary についてはどうか? . これに対する否定的解答にもなっている.

ところが point spectrum については, Rosenthal [Duke Math. J. 41(1974)] によれば,

[定理] $A \sim B \Rightarrow \sigma_p(A) = \sigma_p(B)$.

direct sum に関連して, Herrero [15] は,

[定理] $T = \sum \oplus T_n$ (direct sum)

$\Rightarrow \sigma(S) = \overline{\bigcup_n \sigma(T_n)}$ であり, かつ $T \sim S$ となる S が存在する.

この定理の証明には、Gilfeather [12] の結果を用いている。次に Roseblum の定理に関連するものとして、Hoover [17] は、

[定理] $A \approx B \Rightarrow \sigma(A) \cap \sigma(B) \neq \emptyset$.

実際はもっと弱い条件で成り立つのである。

$B \prec A \Rightarrow \sigma(A) \cap \sigma(B) \neq \emptyset$.

quasi-invertible operator X が存在して、 $AX = XB$ が成り立っているとする。今 $D_{A,B}$ を $B(H)$ 上に次のように定義する。 $D_{A,B}(T) = AT - TB$ for $T \in B(H)$. この $D_{A,B}(\cdot)$ は linear かつ continuous となることは明らか。ここで、 $\sigma(A) \cap \sigma(B) = \emptyset$ であると仮定しておくことにする。そして $D_{A,B}(\cdot) = \mathcal{R} - \mathcal{L}$ とおく、但し $\mathcal{R} = AT$, $\mathcal{L} = TB$ である。このとき $\mathcal{R}\mathcal{L} = \mathcal{L}\mathcal{R}$ である。従って $\sigma(\mathcal{R} - \mathcal{L}) \subset \sigma(\mathcal{R}) - \sigma(\mathcal{L})$ であるから $\sigma(D_{A,B}) \subset \sigma(A) - \sigma(B)$ となり、 $0 \notin \sigma(D_{A,B})$ となる。これより $D_{A,B}$ は invertible となる。しかし今の場合 $D_{A,B} = 0$ 従って $D_{A,B}$ は not invertible である (矛盾)。ゆえに $\sigma(A) \cap \sigma(B) \neq \emptyset$ が成り立つ。

essential spectrum に関しては、Williams [22], Fialkow [6] によれば、

[定理] $A \approx B \Rightarrow \sigma_e(A) \cap \sigma_e(B) \neq \emptyset$.

quasi-similarity と spectrum の関係については、operator

を制限した場合等に関する詳しい研究は Fialkow [6] 等に見られる.

4. Compact と Quasi-nilpotent Operator との関連.

Apostol, Douglas, Foias [2], Foias, Pearcy [9], Williams [21] によれば compact operator との関連では.

[定理] 任意の nilpotent operator は compact operator と quasi-similar である.

quasinilpotent の場合には, Foias, Pearcy [9] によれば.

[定理] T は quasinilpotent operator とする.

$\Rightarrow$ compact operators K_1, K_2 で次の関係をみたすものが存在する. $K_1 < T < K_2$.

しかし, quasi-similar まではもって行けないのである.

[定理] どんな compact operator とは quasi-similar にならない quasinilpotent operator が存在する.

次に Fialkow [6] による quasinilpotent operator と quasi-similar になる operator についての若干の結果をあげておく. まず Q_{qs} を定義しておく.

$$Q_{qs} = \{ T \in B(H) : T \text{ はある quasinilpotent operator と quasi-similar である} \}.$$

[定理] Q_{qs} は nilpotent operators 全体の norm

closure の真の subset である。

Q_{qs} は countable direct sum で closed である。

[定理] $X \subset \mathbb{C}$ が Q_{qs} に属する operator の spectrum になる。

$\Leftrightarrow$ X は compact, connected かつ 0 を含んでいる。

最後に、Apostol, Foias, Pearcy [3] によれば algebraic operator の場合には、

[定理] 任意の algebraic operator は normal + compact なる形の operator と quasi-similar になる。

invariant subspace の存在との関連では、

[定理] T が quasi-nilpotent で、normal + compact なる形の operator に quasi-similar である。

$\Rightarrow$ T は nonzero compact operator と commute する。

REFERENCES

- [1] C. Apostol, Operators quasisimilar to a normal operator, Proc. Amer. Math. Soc., 53(1975), 104-106.
- [2] C. Apostol, R. G. Douglas & C. Foias, Quasisimilar models for nilpotent operators, Trans. Amer. Math. Soc., 224(1976), 407-415.
- [3] C. Apostol, C. Foias & C. Pearcy, Quasiaffine transforms of operators, Notices of Amer. Math. Soc., 25(1978).
- [4] S. Clary, Equality of spectra of quasisimilar hyponormal operators, Proc. Amer. Math. Soc., 53(1975), 88-90.
- [5] R. G. Douglas, On the operator equation $S^*XT = X$ and related topics, Acta Sci. Math. (Szeged), 30(1969), 19-32.

- [6] L. A. Fialkow, A note on quasisimilarity of operators, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 39(1977), 67-85.
- [7] L. A. Fialkow, A note on quasisimilarity II, *Pacific J. Math.*, 70 (1977), 151-162.
- [8] P. A. Fillmore, *Notes on operators Theory*, van Nostrand, 1970.
- [9] C. Foias & C. Pearcy, A model for quasinilpotent operators, *Michigan Math. J.*, 21(1974), 399-404.
- [10] C. K. Fong & M. Radjabalipour, On quasilinear transforms of spectral operators, *Michigan Math. J.*, 23(1976), 147-150.
- [11] C. K. Fong, Quasilinear transforms of subnormal operators, *Pacific J. Math.*, 70(1977), 361-368.
- [12] F. Gilfeather, Norm conditions on resolvents of similarities of Hilbert space operators and applications to direct sums and integrals of operators, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 68(1978), 44-48.
- [13] P. R. Halmos, *Hilbert space problem book*, van Nostrand, 1967.
- [14] D. A. Herrero, Quasisimilarity does not preserve the hyperlattice, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 65(1977), 80-84.
- [15] D. A. Herrero, Quasisimilar operators with different spectra, (Preprint).
- [16] T. B. Hoover, Hyperinvariant subspaces for n -normal operators, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 32(1971), 109-119.
- [17] T. B. Hoover, Quasisimilarity of operators, *Illinois J. Math.*, 16 (1972), 678-686.
- [18] B. Sz.-Nagy & C. Foias, *Harmonic analysis of operators on Hilbert space*, 1967. [English Transl. 1970].
- [19] B. Sz.-Nagy & C. Foias, On injections, intertwining operators of class C_0 , *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 40(1978), 163-167.
- [20] C. Pearcy & A. Shields, A survey of the Lomonosov technique in the theory of invariant subspaces, *Mathematical Surveys*, 13(1974), Amer. Math. Soc.
- [21] L. R. Williams, Similarity invariant for a class of nilpotent operators, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 38(1976), 423-428.
- [22] L. R. Williams, Quasisimilar operators have overlapping essential spectra, (to appear *Acta Sci. Math.*)
- [23] L. R. Williams, A quasisimilarity model for algebraic operators, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, 40(1978), 185-188.