

# A-measure について

阪大 教養 阪井 章

$G$  を  $\mathbb{C}^n$  の有界領域とし,  $\bar{G}$  で連続で  $G$  で正則な関数全体のつくる関数環を  $A(G)$ ,  $A(G)$  の Silov 境界を  $\Gamma$  とする ( $\mathbb{C}^n$  にある  $G$  の位相的境界は  $\partial G$  であらわす).  $\Gamma$  上の測度  $\mu$  が次の条件をみたすとき,  $\mu$  は A-measure と呼ばれる:

$$f_n \in A(G), \|f_n\| \leq 1, \quad \forall z \in G \quad f_n(z) \rightarrow 0$$

$$\Rightarrow \lim \int f_n d\mu = 0.$$

この概念は,  $G$  が  $\mathbb{C}^n$  の超球  $B_n$  である場合に,  $A(B_n)$  と  $A(D^m)$  ( $D^m$  は  $\mathbb{C}^m$  の多重円板) が Banach 空間として同型でないことを示すために導入された. (Henkin [4]) この場合の基本的な結果は次の定理である.

定理 H.  $\mu$  が A-measure,  $\nu \ll \mu \Rightarrow \nu$  は A-measure.

この定理は後に  $G$  が  $\mathbb{C}^n$  の強擬凸領域の場合に証明された.

([5]). 更に Cole-Range は [2] において  $G$  が複素多様体の強

凝凸領域である場合に, Henkin のとは少し異なる方法で定理 H を証明した. こゝでは後の方法で述べる.

また最近, Khanh [8] は Hilbert 空間の contraction の話に  
 関係して,  $\partial D^2$  上の Torus  $T^2$  の上の A-measure を扱っている.

# 1. $A(B_n)$ と $A(D^m)$ ( $m \geq 2$ ).

$A(B_n)$  の Silov 境界は超球面  $\Sigma = \partial B_n$  である.  $C(\Sigma)^*$  の閉部分空間  $L_1$  が structurally complete であるとは

$$\mu \in L_1, \nu \ll \mu \Rightarrow \nu \in L_1$$

をみたすことをいう. この時,  $L_1$  のすべての測度に対して特異である測度全体を  $M_1$  とすれば,

$$C(\Sigma)^* = L_1 \oplus M_1.$$

自然な埋蔵  $I: A(B_n) \rightarrow C(\Sigma)$  を考え,  $I A(B_n)$  に直交する  $\Sigma$  上の測度全体を  $H$  であらわす. もし  $H \subset L$  が成立するなら

$$C(\Sigma)^*/H = L_1/H \oplus M_1.$$

$H = \ker I^*$  であるから,  $L = I^* L_1$ ,  $M = I^* M_1$  とすれば

$$A(B_n)^* = L \oplus M.$$

となる.

一般にコンパクト集合  $X$ , Banach 空間  $B$ ,  $B$  から  $C(X)$  の中への同型写像  $I$  が与えられたとき,  $B^*$  の任意の閉部分空間  $M$  に対して, 線形作用素  $S: M \rightarrow C(X)^*$  で  $I^* S: M \rightarrow M$

が恒等写像であるようなすべての  $S$  についての  $\|S\|$  の下限を  $\chi_I(M)$  であらわす.  $I: B \rightarrow C(X_1)$ ,  $J: B \rightarrow C(X_2)$  がともに isometric であるときには  $\chi_I(M) = \chi_J(M)$  が成り立つ ([3] 参照) ので, しばしば単に  $\chi(M)$  とかく.

上の場合  $I: A(B_n) \rightarrow C(\Sigma)$  については  $\chi(M) = 1$  である.

さて  $n = 1$  (このときは  $B_1 = D$ ) の場合は,  $C(T)^*$  の structurally complete な部分空間  $L_1$  として,  $T$  上の Lebesgue 測度  $m$  に対して絶対連続な測度全体をとれば, F. M. Riesz の定理によって  $H \subset L_1$  であるから, 上の分解が可能である. この場合  $L_1$ , 従って  $L$  は可分で,  $\chi(L) = \infty$  であり, このことを用いて  $A(D)$  と  $A(D^m)$  が同型でないことが証明されるのである ([3]).

$n > 1$  の場合は上のことは成立しない. 例えは  $\Sigma$  の部分集合  $E = \{z \in \Sigma; |z_1| = 1, z_2 = \dots = z_n = 0\}$  上に台をもつ測度として  $\frac{1}{2\pi} e^{i\theta_1} d\theta_1$  によって導かれる測度  $\mu$  をとれば,  $\mu \in H$  であるが,  $m$  に対して  $\mu$  は絶対連続でない. そこで  $\Sigma$  上の測度  $\mu$  で,

$$f_n \in A(B_n), \|f_n\| \leq 1, \quad \Rightarrow \quad \lim \int f_n d\mu = 0$$

$$\forall k = (k_1, \dots, k_n), \quad \frac{\partial^{k_1} f_n}{\partial z_1^{k_1} \dots \partial z_n^{k_n}}(0) \rightarrow 0$$

をみたすものの全体を  $L_1$  ( $B_n$  に対する積分表示によって, これは  $\Sigma$  上の  $A$ -measure 全体と一致することがわかる) とすると,

定理Hによって,  $L_1$  は structurally complete で, 明らかに  $H \subset L_1$  であるから, 上の分解が可能である. この場合,  $L$  は analytic functional の空間 ( $B_n$  の各点を point evaluation と同一視することによって,  $B_n$  を  $A(B_n)^*$  に埋め込んだときの  $B_n$  の  $A(B_n)^*$  における norm closure ) であって, 可分である. このことから  $A(B_n)$  と  $A(D^m)$  とが同型でないことが証明されるのである ([4]).

## 2. 定理Hの証明.

$\mathbb{C}^n$  の開集合  $U$  で定義された  $C^\infty$  級実関数  $\rho(z)$  で Hermite 行列  $(\frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \bar{z}_k}(z))$  が  $U$  の各点  $z$  で正値であるとき,  $\rho$  を 強多重共調和関数と呼ぶ.  $\mathbb{C}^n$  の有界領域  $G$  が,  $G$  の近傍  $U$  で 強多重共調和である  $\rho$  によって  $G = \{z \in U; \rho(z) < 0\}$  とあらわされており,  $\partial G$  上の各点で  $d\rho \neq 0$  であるとき,  $G$  は 強擬凸領域と呼ばれる.  $B_n$  はその特別の場合である.  $A(G)$  の Silov 境界は  $\partial G$  と一致する.

$G$  上の関数  $u$  について,  $L^p$ -norm ( $1 \leq p \leq \infty$ ) および  $u$  の Hölder-norm をそれぞれ  $\|u\|_{L^p(G)}$  および  $\|u\|_{H^\alpha(G)}$  とし,  $G$  上の  $(0,1)$  形式  $\omega = \sum_{k=1}^n f_k d\bar{z}_k$  については  $L^p$ -norm を  $\sum_{k=1}^n \|f_k\|_{L^p_{(0,1)}(G)} = \|\omega\|_{L^p_{(0,1)}(G)}$  で定義する.  $K_{(0,1)}^\infty(G) = \{\omega \in L_{(0,1)}^\infty(G); \bar{\partial}\omega = 0\}$  とおく.

次の定理は Kerzman [7] による.

定理 K.  $G$  を強擬凸領域とする. コンパクト線形作用素

$T: K_{(0,1)}^\infty(G) \rightarrow C(\bar{G})$  で次の性質を満たすものがある:

$$(i) \quad u = T(\omega) \Rightarrow \bar{\omega}u = \omega.$$

$$(ii) \quad \omega \in C_{(0,1)}^\infty(G) \Rightarrow T(\omega) \in C^\infty(\bar{G}).$$

これから直に次のことが出る.

$$(iii) \quad \omega_n \rightarrow 0 \quad (\text{weak}^* \text{ in } K_{(0,1)}^\infty(G)) \Rightarrow T(\omega_n) \rightarrow 0 \quad (\text{in } C(\bar{G})).$$

次の定理は定理 H と同等である.

定理 H'.  $G$  は強擬凸領域,  $\mu$  は  $\partial G$  上の  $A$ -measure とする.

$$f_n \in A(G), \quad \|f_n\| \leq 1, \quad f_n(z) \rightarrow 0 \quad (\forall z \in \bar{G})$$

$$\Rightarrow f_n \rightarrow 0 \quad (\text{weak}^* \text{ in } L^\infty(\mu)).$$

(証明). 任意の  $\varphi \in C^\infty(\bar{G})$  に対して  $\omega_n = f_n \bar{\omega}\varphi$  とおくと

$\omega_n \in K_{(0,1)}^\infty(G)$  で,  $z \in G$  なら  $f_n(z) \rightarrow 0$  だから  $\omega_n(z) \rightarrow 0$ .

$\|\omega_n\|_{L_{(0,1)}^\infty(G)} \leq M$  だから  $\omega_n \rightarrow 0$  (weak\* in  $K_{(0,1)}^\infty(G)$ ).

(iii) から,  $u_n = T(\omega_n) \rightarrow 0$  (in  $C(\bar{G})$ ).

$F_n = f_n \varphi - u_n$  とおくと,  $F_n \in A(G)$ ,  $\|F_n\| \leq M'$  で  $z \in G$  に対し  $F_n(z) \rightarrow 0$ .  $\{f_n\}$  の  $L^\infty(\mu)$  の weak\*-limit の 1 つを  $f$

とすれば,  $\mu$  が  $A$ -measure であることから

$$\int f \varphi d\mu = \lim \int f_n \varphi d\mu = \lim \int F_n d\mu = 0 \quad //$$

註.) Henkin は定理 H を最初  $G$  が超球  $B_n$  の場合に証明した ([4]) その方法は  $B_n$  の積分表示を用いるものである。後に [5] では  $\mathbb{C}^n$  の強擬凸領域  $G$  について積分表示式を証明し、それを用いて定理 H を証明した。上の証明はそれとは異なり、 $\bar{\partial}$ -問題の解の評価を用いている。 $G \subset \mathbb{C}^n$  の場合には、Henkin の積分表示から  $\bar{\partial}$ -問題の解の同様な評価が得られる ([6]) から証明の内容は同等といえるだろう。しかし Kerzman による  $\bar{\partial}$ -問題の解は、まず局所的に積分表示式を証明して、そこで  $\bar{\partial}$ -問題を解き、それから大域的な解とその評価を得る方法によるので、 $G$  が多折体の強擬凸領域の場合にも通用する。したがって上の定理 H' は多折体の場合にも成立する。

### 3. 多重円板の場合.

簡単のため、 $n=2$  とする。 $T^2 = T \times T$  上の Lebesgue 測度を  $m$ 、 $T$  上の Lebesgue 測度を  $\mu$  とする。 $\mu$  を  $T^2$  上の測度とするとき、 $T$  上の Borel 集合  $e$  に対して

$$\mu_1(e) = |\mu|(e \times T), \quad \mu_2(e) = |\mu|(T \times e)$$

によって定まる  $T$  上の測度  $\mu_1, \mu_2$  を  $\mu$  の成分という。以下、 $T^2$  の結果は Khanh [8] によるが、証明の主な idea は [1] にあるようである。

補題 1.  $T$  上の測度  $\mu$  について絶対連続なものは  $A$ -measure である.

補題 2.  $\mu$  は  $T^2$  の測度で  $f_n \in A(D^2)$ ,  $\|f_n\| \leq 1$  とする. 任意の  $(z_0, w_0) \in D^2$  に対して  $\lim \int f_n(z, w) (z - z_0)^{-1} (w - w_0)^{-1} d\mu(z, w) = 0$  ならば,  $T^2$  の任意の Borel 集合  $E$  に対し,  $\lim \int_E f_n d|\mu| = 0$ .

これは  $\{g(z, w) (z - z_0)^{-1} (w - w_0)^{-1}, g \in A(D^2), (z_0, w_0) \in D^2\}$  の一次結合が  $C(T^2)$  において dense なことから出る.

Lemma 1, 2 により

定理 3.  $\mu$  は  $T^2$  上の  $A$ -measure で, その成分は  $\mu$  について絶対連続とする.  $f_n \in A(D^2)$ ,  $\|f_n\| \leq 1$ ,  $f_n(z) \rightarrow 0$  ( $\forall z \in D^2$ ) ならば,  $T^2$  上の任意の Borel 集合  $E$  に対して,

$\lim \int_E f_n d|\mu| = 0$ , 故にとくに,  $|\mu|$  は  $A$ -measure である.

#### 4. 正の $A$ -measure.

補題 4.  $G$  は  $\mathbb{C}^n$  の有界領域,  $\mu$  は  $T$  上の正の  $A$ -measure とする.  $G$  のある点  $z_0$  に対して,  $\mu$  が  $z_0$  のすべての表現測度について特異であれば,  $\mu = 0$ .

証明は abstract F. M. Riesz の定理による.

補題 5.  $\mu$  が  $T^2$  上の正の  $A$ -measure であれば, その成分は  $\sigma$  について絶対連続である. したがって,  $f_n \in A(D^2)$ ,  $\|f_n\| \leq 1$ ,  $\lim f_n(z) = 0$  ( $\forall z \in D^2$ ) であれば,  $T^2$  の任意の Borel 集合  $E$  に対して  $\lim \int_E f_n d\mu = 0$ .

これは  $T$  上の  $\sigma(F) = 0$  なる閉集合が,  $A(D)$  の peak interpolation set であることからわかる. これに関連して,  $T^2$  上で  $K = \{(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) \in T^2; \theta + \varphi = 1\}$  を考え,  $K$  上の Lebesgue 測度から導かれる  $T^2$  上の測度を  $\mu$  とすると,  $\mu$  は正の測度でその成分は  $\sigma$  について絶対連続. しかし  $K$  が peak interpolation set であるから,  $\mu$  は  $A$ -measure ではない.

定理 6.  $\mu$  が  $T^2$  上の正の  $A$ -measure,  $\nu \ll \mu \Rightarrow \nu$  は  $A$ -measure.

5.  $A$ -measure の特徴づけ.

定理 7.  $G$  は  $\mathbb{C}^n$  の強擬凸領域とする.  $\partial G$  上の測度  $\mu$  が  $A$ -measure であるための必要十分条件は,  $G$  の任意の 1 点  $z_0$  に対し,  $\mu$  が  $z_0$  のある表現測度に絶対連続なことである.

定理 8.  $T^2$  上の正の測度が  $A$ -measure なるための必要十分条件は,  $z_0 \in D^2$  に対し,  $\mu$  が  $z_0$  のある表現測度に絶対連続なこと.

何れの場合も、 $Z_0$ のある表現測度について絶対連続である測度の全体を  $L$ 、 $L$ のすべての測度に特異な測度全体を  $M$  とするとき、 $\mu = \mu_a + \mu_s$ 、 $\mu_a \in L$ 、 $\mu_s \in M$  と書ける。しかも、 $\mu$  が  $A(G)$  (又は  $A(D^2)$ ) と直交するなら、 $\mu_a, \mu_s$  もそうである。必要性を示すには、 $\mu$  が  $A$ -measure  $\Rightarrow \mu_s = 0$  を示せばよいが、 $G$  のときは定理 H から、 $D^2$  のときは定理 3 から、いつでも  $|\mu|$  が  $A$ -measure となり証明は補題 4 に帰着する。十分性は、いつでもの場合も  $Z_0$  の表現測度が正の  $A$ -measure であること。定理 H 又は定理 6 とから出る。

その他、 $A$ -measure の応用等については省略する。

### 引用文献

- 1 E.Briem, A.M.Davie and B.K.Oksendal; A Functional calculus for pairs of commuting contractions, J.London Math.Soc. (2), 7 (1973), 709-718.
- 2 B.Cole and R.M.Range: A-Measures on Complex Manifolds and Some Applications, J.Functional Analysis 11 (1972) 393-400.
- 3 G.M.Henkin: Nonisomorphism of certain spaces of functions of different numbers of variables, Funkcional. Anal. i Prilozen 1 (1967) 57-68.

- 4 G.M.Henkin: The Banach spaces of analytic functions in a sphere and in a bicylinder are not isomorphic, Funkcional. Anal. i Prilozen 2 (1968) 82-91.
- 5 G.M.Henkin: Integral representations of functions holomorphic in strictly pseudoconvex domains and some applications, Amer. Math. Soc. Transl.: Math. USSR-Sb. 7 (1969) 597-616.
- 6 G.M.Henkin: Integral representations of functions in strictly pseudoconvex domains and applications to the  $\bar{\partial}$ -problem, Amer. Math. Soc. Transl.: Math. USSR-Sb.11 (1970) 273-281.
- 7 N.Kerzman: Holder and  $L^p$  estimates for solutions of  $\bar{\partial}u = f$  in strongly pseudoconvex domains, Comm.Pure Appl. Math. 24 (1971), 301-307.
- 8 B.D.Khanh: Les A-mesures sur le Tore de deux Dimensions et le Calcul Symbolique de deux Contractions Permutables J. Functional analysis 15 (1974) 33 - 44.