

Duhamel の原理及び多

重散乱過程への応用

舞鶴高専 松本雅道

§ 1. 輸達方程式

非均質な等方散乱をする平板状の無線源大気中における単色輻射の輸達を考える。光学的深さ τ において平板の上向き法線と $\cos^{-1}\mu$ なる角度をなす方向の輻射強度は輸達方程式

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} I(\tau, \mu) = I(\tau, \mu) - \lambda(\tau) J(\tau) \quad (1)$$

をみたす。ここで $J(\tau)$ は線源関数

$$J(\tau) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) d\mu \quad (2)$$

であり $\lambda(\tau)$ は体積散乱係数の体積吸収係数に対する比で

$$0 \leq \lambda(\tau) \leq \lambda_1 \leq 1 \quad (3)$$

をみたす。もし大気の厚さが半無限であれば $\lambda_1 < 1$ とする。

大気の上表面 ($\tau = \tau_0$) に向かう輻射強度を $I(\tau, +\mu)$ ($0 < \mu \leq 1$) , 下表面 ($\tau = \tau_1$) に向かうそれを $I(\tau, -\mu)$ ($0 < \mu \leq 1$) で表す。

今大気の上表面に強度 $I_{inc}(\mu)$, 下表面に $I_{inc}^*(\mu)$ の輻射が入射すると τ における強度は (1) 式と境界条件

$$I(\tau_0, -\mu) = I_{inc}(\mu), \quad I(\tau_1, +\mu) = I_{inc}^*(\mu) \quad (4)$$

のもとで解いて得られる。 $J(\tau)$ を既知とすると (1) の解は

$$I(\tau, +\mu) = I_{inc}^*(\mu) e^{-(\tau_1-\tau)/\mu} + \int_{\tau}^{\tau_1} \lambda(t) J(t) e^{-(t-\tau)/\mu} \frac{dt}{\mu}, \quad (5)$$

$$I(\tau, -\mu) = I_{inc}(\mu) e^{-(\tau-\tau_0)/\mu} + \int_{\tau_0}^{\tau} \lambda(t) J(t) e^{-(\tau-t)/\mu} \frac{dt}{\mu}, \quad (6)$$

となる。(5), (6) と (2) に用いると Milne の方程式

$$(1 - L)_{\tau} \{J(t)\} = B(\tau) \quad (7)$$

を得る。ここで演算子 L_{τ} 及び $B(\tau)$ はそれぞれ

$$L_{\tau} \{f(t)\} = \frac{1}{2} \int_{\tau_0}^{\tau_1} \lambda(t) f(t) E_1(|t-\tau|) dt, \quad (8)$$

$$B(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^1 I_{inc}(\mu) e^{-(\tau-\tau_0)/\mu} d\mu + \frac{1}{2} \int_0^1 I_{inc}^*(\mu) e^{-(\tau_1-\tau)/\mu} d\mu, \quad (9)$$

であって $E_n(\tau)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) は n 次積分指数関数

$$E_n(\tau) = \int_1^{\infty} t^{-n} e^{-t\tau} dt \quad (10)$$

で (7) 式左辺の 1 は恒等演算子である。

積分方程式 (7) が唯一の解を有することは以下の様に表示される。(8) から演算子 L_{τ} を定数 1 に作用させると

$$0 \leq L_{\tau} \{1\} \leq (\lambda_1/2) [2 - E_2(\tau-\tau_0) - E_2(\tau_1-\tau)]$$

であり $E_2(\tau)$ の性質から $\rho = [2 - \lambda E_2\{(\tau_1-\tau_0)/2\}]/2$ とおくこ

$$0 \leq L_{\tau+1} \leq \rho < 1 \quad (\tau_1 \text{ 有限}),$$

$$0 \leq L_{\tau+1} \leq \lambda_1 < 1 \quad (\tau_1 = \infty),$$

となつて方程式(7)のNeumann級数による解は $B(\tau)$ が非負・有界ならば一様に収束する。解の一意性は(7)で $B(\tau)=0$ と置くと解が殆んど至る所零になることから知られる。

§ 2. Duhamelの原理

大気の上表面に定方向 μ_0 から単位強度の平行光線が入射し下表面からの入射が無い場合の輻射場を $I_0(\tau, \mu; \mu_0)$, 上表面と下表面との役割りを交換したときのそれを $I_1(\tau, \mu; \mu_0)$ と書くと境界条件はそれぞれ

$$I_0(\tau_0, -\mu; \mu_0) = \delta(\mu - \mu_0), \quad I_0(\tau_1, +\mu; \mu_0) = 0, \quad (11)$$

$$I_1(\tau_1, +\mu; \mu_0) = \delta(\mu - \mu_0), \quad I_1(\tau_0, -\mu; \mu_0) = 0 \quad (12)$$

で与えられる。ここに δ はDirac δ 関数である。これらの輻射場の線源関数を $J_0(\tau, \mu_0)$, $J_1(\tau, \mu_0)$ とすると(11), (12)と(9)を用いて

$$(1 - L)_{\tau} \{ J_0(t, \mu_0) \} = \frac{1}{2} e^{-(\tau - \tau_0)/\mu_0}, \quad (13)$$

$$(1 - L)_{\tau} \{ J_1(t, \mu_0) \} = \frac{1}{2} e^{-(\tau_1 - \tau)/\mu_0}, \quad (14)$$

が得られる。(13)に $I_{inc}(\mu_0)$, (14)に $I_{inc}^*(\mu_0)$ を乗じて μ_0 について $(0, 1)$ で積分して得られる方程式と(7)とを比較す

るとこれらは何れも唯一の解を有することから直ちに

$$J(\tau) = \int_0^1 J_0(\tau, \mu') I_{inc}(\mu') d\mu' + \int_0^1 J_1(\tau, \mu') I_{inc}^*(\mu') d\mu', \quad (15)$$

を得る。(15)を(5),(6)に用いることにより

$$I(\tau, \mu) = \int_0^1 I_0(\tau, \mu; \mu') I_{inc}(\mu') d\mu' + \int_0^1 I_1(\tau, \mu; \mu') I_{inc}^*(\mu') d\mu', \quad (16)$$

なることがわかる。(16)は Duhamel の原理の数学的表示であつて輻射場の重ね合わせの原理を示すものである。

§3. 内部輻射場の変動

有限非均質な大気の上表面に定方向 μ_0 から平行光線がその方向に垂直な単位面積当りの真流量 Q_0 で入射してゐる場合を考える。Duhamel の原理の一つの応用として今大気の上表面に小さな変動が加えられた場合の平板内部における輻射場の変化を評価してみる。変動を加える以前の輻射強度を $I(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0)$ とするとこれは(1)を境界条件

$$I(\tau_0, -\mu; \tau_0, \mu_0) = 2\delta(\mu - \mu_0), \quad I(\tau_1, +\mu; \tau_0, \mu_0) = 0, \quad (17)$$

のもとで解つて得られる。

今上表面に光学的厚さ Δ の層を附加すると先の輻射強度は $I(\tau, \mu; \tau_0 - \Delta, \mu_0)$ となる。新表面で $\tau = \tau_0 - \Delta$ に入射した平行光

線は厚さ Δ の層内で多重散乱を受けた後ある強度でもとの表面に入射する。この強度を $I_{inc}(\mu)$ とすると $I(\tau, \mu; \tau_0 - \Delta, \mu_0)$ は $\tau = \tau_0$ に $I_{inc}(\mu)$ の入射のあるときの τ における強度であるから Duhamel の原理 (16) によって

$$I(\tau, \mu; \tau_0 - \Delta, \mu_0) = \frac{1}{2} \int_0^1 I(\tau, \mu; \tau_0, \mu') I_{inc}(\mu') d\mu', \quad (18)$$

となる。ここで $I_{inc}(\mu)$ は定義によって

$$I_{inc}(\mu) = I(\tau_0, -\mu; \tau_0 - \Delta, \mu_0) \quad (19)$$

であるから輸送方程式 (1) により (17) を考慮して

$$\begin{aligned} I_{inc}(\mu) &= I(\tau_0 - \Delta, -\mu; \tau_0 - \Delta, \mu_0) \\ &\quad + \Delta \frac{\partial}{\partial \tau} I(\tau, -\mu; \tau_0 - \Delta, \mu_0) \Big|_{\tau = \tau_0 - \Delta} + o(\Delta) \\ &= 2\delta(\mu - \mu_0)(1 - \Delta/\mu) + (\Delta/\mu) J(\tau_0, \mu_0) \\ &\quad + o(\Delta). \end{aligned} \quad (20)$$

ここに $J(\tau_0; \mu_0)$ は線源関数, $o(\Delta)$ は Δ^2 以上の項をまとめて書いたものである。(20) を (18) に用いて両辺を Δ で割り Δ を 0 に近づけると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau_0} I(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0) &= \frac{1}{\mu_0} I(\tau, \mu; \tau_0, \mu_0) \\ &\quad - \frac{1}{2} J(\tau_0, \mu_0) \int_0^1 I(\tau, \mu; \tau_0, \mu') \frac{d\mu'}{\mu'}. \end{aligned} \quad (21)$$

(21)は上表面の変化による内部輻射場の変動をあらわす。同様な方程式が下表面の変化する場合にも得られ、又下表面からの入射光がある場合にも得られる[1, 2]。

§4. Milneの問題

半無限の均質大氣中に無限に深い所から来る流量一定の輻射の流線があり表面からの入射が無い時に表面から μ 方向に成る輻射強度を求める問題をMilneの問題という。Duhamelの原理の二番目の応用としてMilneの問題の厳密解を求めてみよう。その前に半無限大氣の拡散反射問題を考える。

半無限大氣の上表面に(17)式で表はされる様な平行光線が入射するとき深さ τ における輻射強度を $I(\tau, \mu; \mu_0)$ とすると表面から μ 方向に出る光の強度は散乱関数 S を用いて

$$I(0, \mu; \mu_0) = S(\mu, \mu_0)/\mu \quad (22)$$

で与えられる。Duhamelの原理によって S は

$$\left(\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu_0}\right) S(\mu, \mu_0) = \lambda H(\mu) H(\mu_0) \quad (23)$$

$$H(\mu) = 1 + \frac{\lambda}{2} \int_0^1 S(\mu, \mu') \frac{d\mu'}{\mu'} \quad (24)$$

によって与えられることが示される[3]。ここで H はChandrasekharの H 関数である。

半無限大氣の場合Duhamelの原理は $\lambda < 1$ の時のみ成立す

るのであるが今ここでこの原理が $\lambda = 1$ の時を含めて成立すると仮定する。(23)式で $\lambda = 1$ とおいた場合を考える。

Milneの問題は方程式(1)で $\lambda(\tau) = 1$ としたときに(1)を境界条件

$$I(0, -\mu) = 0, \quad J(\tau) = 0 (e^{-\tau}) \quad (\tau \rightarrow \infty) \quad (25)$$

のもとで解くことに帰着する。今大気の上に光学厚さ Δ の層を附加すると深さ τ における輻射強度 $I(\tau, +\mu)$ は $I(\tau + \Delta, +\mu)$ に変化するがこれはもとの強度に Δ の附加により生じた $\tau = \Delta$ の所での下向き強度 $I_{inc}(\mu)$ による深さ τ での輻射強度を加えたものとなるはずである。 $I_{inc}(\mu)$ による輻射場は Duhamel の原理によって

$$\frac{1}{2} \int_0^1 I_{inc}(\mu') I(\tau, +\mu; \mu') d\mu'$$

で与えられるから

$$I(\tau + \Delta, +\mu) = I(\tau, +\mu) + \frac{1}{2} \int_0^1 I_{inc}(\mu') I(\tau, +\mu; \mu') d\mu', \quad (26)$$

を得る。ここで $I_{inc}(\mu)$ は定義から

$$I_{inc}(\mu) = \frac{\Delta}{\mu} J(0) + o(\Delta) \quad (27)$$

であるから前節同様に(1)と(25)から

$$I_{inc}(\mu) = (\Delta/\mu) J(0) + o(\Delta). \quad (28)$$

(28) を (27) に用いて Δ を 0 に近づけると

$$\frac{\partial}{\partial \tau} I(\tau, +\mu) = \frac{J(0)}{2} \int_0^1 I(\tau, +\mu; \mu') \frac{d\mu'}{\mu'} \quad (29)$$

再び (1) を用いて $\tau \rightarrow 0$ とすれば (24) を利用して

$$I(0, +\mu) = J(0) H(\mu) \quad (30)$$

両辺に μ を乗じて $(0, 1)$ で積分すると

$$\int_0^1 H(\mu) \mu d\mu = 2/\sqrt{3} \quad (31)$$

を用いて

$$J(0) = (\sqrt{3}/4) F \quad (32)$$

が得られるから (30) は

$$I(0, +\mu) = \frac{\sqrt{3}}{4} F H(\mu) \quad (33)$$

を得る。ここで F は

$$F = \int_{-1}^1 I(\tau, \mu) \mu d\mu = \text{const} \quad (34)$$

で与えられる真流量である。(33) は Milne の問題の厳密解であって Hopf-Bronstein の関係式と言はれる。

$\lambda = 1$ のとき Duhamel の原理をさすの方法で証明することは Neuman 級数が発散してしまうため不可能であるが $\lambda = 1$ のときにこの原理を仮定して正しい結果 (33) を得たことは

$\lambda = 1$ のときにも Duhamel の原理が成立することを示すものと考えられる。

§5. 非等方輻射線源を有する非均質有限大気

非均質な有限大気中に非等方(軸対称)な輻射線源 $B(\tau, \mu)$ があり表面からの入射はないものとする。このとき下表面 $\tau = \tau_1$ から出ていく輻射の強度 $I(\tau, \mu; \tau_1)$ を求めてみよう。この場合の輸送方程式及び境界条件は

$$\mu \frac{\partial}{\partial \tau} I(\tau, \mu; \tau_1) = I(\tau, \mu; \tau_1) - \mathcal{J}(\tau, \mu; \tau_1) \quad (35)$$

$$\mathcal{J}(\tau, \mu; \tau_1) = \lambda(\tau) J(\tau; \tau_1) + B(\tau, \mu) \quad (36)$$

及び

$$I(0, -\mu) = 0, \quad I(\tau_1, +\mu) = 0 \quad (37)$$

で与えられる。今下表面に光学的厚さ Δ の層を附加したことによる $I(\tau, \mu; \tau_1)$ の変化 $I(\tau, \mu; \tau_1)$ を Duhamel の原理によって求めると

$$\frac{\partial}{\partial \tau_1} I(\tau, -\mu; \tau_1) = \frac{1}{2} \int_0^1 I(\tau, -\mu; \tau_1, \mu') \mathcal{J}(\tau_1, \mu') \frac{d\mu'}{\mu'} \quad (38)$$

を得る。ここで $I(\tau, \mu; \tau_1, \mu_0)$ は下表面に方向 μ_0 からその方向に垂直な単位面積当り μ_0 の真流量で平行光線が入射した場合の τ での輻射強度である。(35), (38) 式から

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial \tau_1} I(\tau_1, -\mu; \tau_1) + \frac{1}{\mu} I(\tau_1, -\mu; \tau_1) \\
&= \frac{1}{\mu} B(\tau_1, -\mu) + \frac{1}{2\mu} \int_0^1 S(\tau_1, \mu, \mu') B(\tau_1, -\mu') \frac{d\mu'}{\mu'} \\
&+ \frac{\lambda(\tau_1)}{2\mu} X(\tau_1, \mu) \int_0^1 I(\tau_1, -\mu'; \tau_1) d\mu' \quad (39)
\end{aligned}$$

が得られる。ここで $S(\tau_1, \mu, \mu')$ は

$$S(\tau_1, \mu, \mu') = \mu I(\tau_1, -\mu; \tau_1, \mu') \quad (40)$$

であって熟知であり、また X は

$$X(\tau_1, \mu) = 1 + \frac{1}{2} \int_0^1 S(\tau_1, \mu, \mu') \frac{d\mu'}{\mu'} \quad (41)$$

で与えられる。(39)は $\tau_1=0$ で $I=0$ の初期条件のもとで数値的に解くことが出来る。

文 献

- [1] M. Matsumoto, Publ. A. S. Japan, 18, 445, 1966.
- [2] —————, Publ. A. S. Japan, 19, 48, 1967.
- [3] —————, Res. Rep. Maizuru Tech. College, 2, 52, 1967.