

多変数代数関数の特異点での級数展開 — 非モニックな場合 —

佐々木 建昭 (Tateaki Sasaki)

筑波大学 数学系

INSTITUTE OF MATHEMATICS, UNIVERSITY OF TSUKUBA *

稲葉 大樹 (Daiju Inaba)

日本数学検定協会

MATHEMATICS CERTIFICATION INSTITUTE OF JAPAN †

Abstract

筆者らは長年にわたり多変数代数関数の特異点での“級数”展開を研究してきた。昨年の数理解析研究集会では与式がモニックな場合について、級数の収束性と“jumping”現象を解明したが、本稿ではモニックでない場合を考察する。級数計算に用いる拡張 Hensel 構成で根幹となる概念は Newton 多項式であるが、主係数を Newton 多項式に取り込むことにより主係数の効果を級数に最大限反映させ、かつ級数の一般項を表す公式がモニックな場合と同じになることを示す。あわせて、級数の収束性と多価性を議論する。

1 はじめに

$(\ell+1)$ 変数多項式 $F(x, \mathbf{u}) \stackrel{\text{def}}{=} F(x, u_1, \dots, u_\ell)$ が与えられたとき、 $F(x, \mathbf{u})$ の x に関する根として定まる代数関数 $\varphi(\mathbf{u})$ の特異点 (英語では critical point と呼ばれることが多い) における“級数”展開を考察する。1 変数代数関数が特異点で Puiseux 級数展開できることはよく知られている。Puiseux 級数展開法は容易に多変数代数関数に拡張できるが、多変数 Puiseux 級数は各変数に関する分数べき級数 (負べきも現れる) で、非常に使い難いのみならず、その性質の解析も難しい。実際、収束性などはほとんど分かっていない。1993 年、Sasaki-Kako は多変数 Hensel 構成を特異点に拡張して (拡張 Hensel 構成、EHC と略称)、多変数代数関数の全く新しい級数展開法を得た [13, 14]。筆者らはその級数を Hensel 級数と命名し、ある条件下で級数の一般項を簡潔に表す公式を得るとともに、展開点近傍での級数の収束性と“jumping”現象 (Hensel 級数を発散領域を通過して追跡すると、級数が代数関数の一つの枝から他の枝へと飛び移る) を、理論的にかなり解明した [3, 11, 12]。本稿では非モニックな場合の扱いを提案する。

モニックな場合の展開方法はそのまま非モニックな場合にも使えそうに思えるが、そうではない。実際、多項式因数分解では主係数問題という語が生まれた。主係数の零点では少なくとも一つの代数関数が発散することが示すように、主係数は代数関数に大きな影響を及ぼすので慎重に取り扱う必要がある。筆者らは本稿でやや意外と思われる方法を提案するが、その方法では展開級数の一般項の表現がモニックな場合と全く同じになり、しかも主係数の重要性が Hensel 級数に最大限反映されることになる。

第 2 章では非モニックな場合の筆者らの取り扱い方法を述べる。第 3 章では、展開級数の一般項の公式を提示するとともに、われわれの級数が収束領域でいかに良く代数関数を近似するかを数値的に示す。第 4 章での準備のあと、第 5 章では展開点近傍での収束性を解明し、第 6 章では jumping を議論する。

*sasaki@math.tsukuba.ac.jp

†inaba@math.tsukuba.ac.jp

2 非モニックな多項式に対する筆者らの方法

与式 $F(x, \mathbf{u}) \stackrel{\text{def}}{=} F(x, u_1, \dots, u_\ell) \in \mathbb{C}[x, u_1, \dots, u_\ell]$ の主変数 x に関する次数を $\deg(F)$ 、主係数を $\text{lc}(F)$ と表し、 $\deg(F) = n$, $\text{lc}(F) = f_n(\mathbf{u})$ とする。 $f(\mathbf{u}) \in \mathbb{C}[\mathbf{u}]$ に対して従変数 $u_1, \dots, u_\ell$ に関する全次数を $\text{tdeg}(f)$ と表し、 $f(\mathbf{u})$ の位数を $\text{ord}(f)$ と表す：位数は $f(\mathbf{u})$ の各項の全次数の中で最小のものである。 $F(x, \mathbf{u})$ の x に関する根として定義される代数関数を $\varphi(\mathbf{u})$ と表す： $F(\varphi(\mathbf{u}), \mathbf{u}) = 0$ 。 $\|\mathbf{u}\|$ は、 $u_1, \dots, u_\ell$ に適当な数値を代入したとき、 $(|u_1|^2 + \dots + |u_\ell|^2)^{1/2}$ を意味するものとする。 $\mathbf{u}$ の関数 $f(\mathbf{u})$ に対し、 $\lim_{\|\mathbf{u}\| \rightarrow 0} \|f(\mathbf{u})\| / \|\mathbf{u}\|^\lambda = c$ とする。 $c \neq 0, \infty$ のとき $\|f(\mathbf{u})\| = O(\|\mathbf{u}\|^\lambda)$ と表し、 $c = 0$ のとき $\|f(\mathbf{u})\| = o(\|\mathbf{u}\|^\lambda)$ と表す。展開点を $\mathbf{s} \stackrel{\text{def}}{=} (s_1, \dots, s_\ell) \in \mathbb{C}^\ell$ で表す。一般性を失うことなく、 $F(x, \mathbf{u})$ は既約であり、したがって無平方とする。 $F(x, \mathbf{s})$ が無平方なら、 $F(x, \mathbf{u})$ の x に関する各根は $u_1 - s_1, \dots, u_\ell - s_\ell$ の Taylor 級数に展開できる。

定義 1 (特異点、特異主係数) $F(x, \mathbf{s})$ が無平方でないとき、展開点 $\mathbf{s}$ を代数関数の特異点あるいは単に特異点という。 $f_n(\mathbf{s}) = 0$ のとき、主係数は $\mathbf{s}$ で特異であるという。

一般性を失うことなく、以下では原点 $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ は特異点であるとし、原点での級数展開を考察する。まず、主係数の扱いの重要性を簡単な例で説明する。

例 1 [主係数の効果] $F_1(x, u, v)$ を次式とする (本例では “H.T.” は高次項を表すものとする)。

$$F_1(x, u, v) = [(u+v)x - (u^2+v^2)] \cdot [uvx^2 - (u^4+v^4)] + \text{H.T.}$$

$\deg(\text{H.T.}) \leq 2$ のとき、 $F_1(x, u, v)$ の x に関する根 $\varphi(u, v)$ は次のように振る舞う。

$$\varphi(u, v) = \frac{u^2+v^2}{u+v} + \text{H.T.}, \quad \varphi(u, v) = \pm \left(\frac{u^4+v^4}{uv} \right)^{1/2} + \text{H.T.} \quad \text{for small } |u| \text{ and } |v|.$$

しかし、 $F_1(x, u, v)$ の高次項がたとえば $(u^4+v^4)x^3$ を持つなら、 $\varphi(u, v)$ は直線 $u+v=0$, $u=0$ あるいは $v=0$ 上で発散しない。すなわち、代数関数は定義多項式の主係数に強く影響されるのである。◇

特異点での Hensel 構成で根幹をなす概念は Newton 多項式である [13, 14]。次章で見るように、Hensel 級数の半分は Newton 多項式で決まると言っても過言ではない。 $F(x, \mathbf{u})$ がモニックでない場合、主係数の効果が Hensel 級数に最大限に反映されるように、かつ結果として得られる Hensel 級数が簡単に扱い易いように、Newton 多項式を次のように定義する。

定義 2 (Newton 多項式 $F_{\text{New}}(x, \mathbf{u})$; 非モニックな場合) $F(x, \mathbf{u})$ の各項 $cx^i t^j u_1^{j_1} \dots u_\ell^{j_\ell}$, $c \in \mathbb{C}$ かつ $j = j_1 + \dots + j_\ell$ 、に対して (e_x, e_t) -平面上の座標点 (i, j) に点をプロットする。 $\nu = \text{ord}(f_n)$ とし、 (e_x, e_t) -平面上に直線 $\mathcal{L}_{\text{New}}$ を次のように引く： $\mathcal{L}_{\text{New}}$ は座標点 (n, ν) と他の少なくとも一つのプロット点を通り、その下には一つもプロット点がない。 $F_{\text{New}}(x, \mathbf{u})$ は、まず $\mathcal{L}_{\text{New}}$ 上にプロットされる全ての単項式の和とし、つぎに $F_{\text{New}}(x, \mathbf{u})$ の主係数を $f_n(\mathbf{u})$ で置き換える；したがって $\text{lc}(F_{\text{New}}) = f_n(\mathbf{u})$ である。

直線 $\mathcal{L}_{\text{New}}$ の傾きを $-\lambda$ とする (− 符号に注意)。主係数の高次項を無視すると、Newton 多項式は x^λ と従変数の全次数に関して同次式となるから、これを “ $(\lambda, 1)$ -同次” とすることにする。Newton 多項式の x^0 -項が 0 でない限り、 $F_{\text{New}}(x, \mathbf{u})$ の任意の根 $\alpha_i(\mathbf{u})$ は $\|\alpha_i(\mathbf{u})\| = O(\|\mathbf{u}\|^\lambda)$ を満たす。

原点近傍では高次項は無視できるから、 $\varphi(\mathbf{u})$ の振舞いは Newton 多項式でほぼ決まる。したがって、 $\mathcal{L}_{\text{New}}$ の傾きが正 (あるいは負) のとき、原点で代数関数 $\varphi(\mathbf{u})$ は ∞ (あるいは 0) になるので、 $\varphi(\mathbf{u})$ のグラフを描く際は $\varphi(\mathbf{u})$ を次のように “規格化” する。

$$\bar{\varphi}(\mathbf{u}) \stackrel{\text{def}}{=} |\mathbf{u}|^{-\lambda} \varphi(\mathbf{u}), \quad |\mathbf{u}| \stackrel{\text{def}}{=} (|u_1|^2 + \dots + |u_\ell|^2)^{1/2}. \quad (2.1)$$

次章で扱う Hensel 級数 $\phi^{(k)}(\mathbf{u})$ も図示する際は同様に規格化する。

3 Hensel 級数の簡潔な表現

議論を簡単にするため、本稿では与式に対して次の制約を設ける。

制約 A 主係数 $f_n(\mathbf{u})$ は原点で特異でなく、 $F_{\text{New}}(x, \mathbf{u})$ は重根も近接根も持たない。さらに、 $F_{\text{New}}(x, \mathbf{u})$ の x^0 の項は 0 でないとする。 ◇

$F_{\text{New}}(x, \mathbf{u})$ の根を $\alpha_1(\mathbf{u}), \dots, \alpha_n(\mathbf{u})$ とする (簡単に $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ と記すこともある) :

$$F_{\text{New}}(x, \mathbf{u}) = f_n(\mathbf{u})(x - \alpha_1(\mathbf{u})) \cdots (x - \alpha_n(\mathbf{u})), \quad \alpha_i \neq \alpha_j \quad (\forall i \neq j). \quad (3.1)$$

$\alpha_i(\mathbf{u})$ は多項式や有理式のこともあるが、通常は代数関数である。

さて、補助変数 ξ を導入し、 $\tilde{F}(x, \mathbf{u}, \xi)$ を次のように定義する。

$$\begin{cases} F(x, \mathbf{u}) \stackrel{\text{def}}{=} F_{\text{New}}(x, \mathbf{u}) + F_h(x, \mathbf{u}), \\ \tilde{F}(x, \mathbf{u}, \xi) \stackrel{\text{def}}{=} F_{\text{New}}(x, \mathbf{u}) + \xi F_h(x, \mathbf{u}). \end{cases} \quad (3.2)$$

$F_{\text{New}}(x, \mathbf{u})$ が $F_{\text{New}}(x, \mathbf{u}) = G_1^{(0)}(x, \mathbf{u}) \cdots G_r^{(0)}(x, \mathbf{u})$ 、 $G_1^{(0)}, \dots, G_r^{(0)}$ は互いに素、と因数分解されたとし、 $G_1^{(0)}, \dots, G_r^{(0)}$ と ξ をそれぞれ初期因子および法として、 $\tilde{F}(x, \mathbf{u}, \xi)$ を Hensel 構成する :

$$\tilde{F}(x, \mathbf{u}, \xi) \equiv G_1^{(k)}(x, \mathbf{u}, \xi) \cdots G_r^{(k)}(x, \mathbf{u}, \xi) \pmod{\xi^{k+1}}, \quad k = 1, 2, \dots$$

特に、初期因子として $G_1^{(0)} = x - \alpha_1$ 、 $\tilde{G}^{(0)} = F_{\text{New}}(x, \mathbf{u}) / (x - \alpha_1)$ と選ぶならば、次式が得られる。

$$\begin{cases} \tilde{F}(x, \mathbf{u}, \xi) \equiv G_1^{(k)}(x, \mathbf{u}, \xi) \cdot \tilde{G}^{(k)}(x, \mathbf{u}, \xi) \pmod{\xi^{k+1}}, \\ G_1^{(k)}(x, \mathbf{u}, \xi) = x - \phi_1^{(k)}(\mathbf{u}, \xi), \quad \phi_1^{(0)}(\mathbf{u}, \xi) = \alpha_1(\mathbf{u}). \end{cases} \quad (3.3)$$

このとき、 $\phi_1^{(\infty)}(\mathbf{u}, 1)$ は α_1 に対応する Hensel 級数である。

次に、Moses-Yun の補間式を $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ で表すことにより、Hensel 級数の一般項を簡潔に表す次の公式が得られる (導出については [12] を参照) ; 公式はモニツクな場合に対する公式と全く同じである。

定理 1 $F_{\text{New}}(x, \mathbf{u})$ が無平方であるとき、Hensel 因子 $G_1^{(\infty)}$ と $\tilde{G}^{(\infty)}$ は次のように表される。

$$G_1^{(\infty)}(x, \mathbf{u}, \xi) = x - \alpha_1 + \sum_{k=1}^{\infty} \xi^k \frac{\delta F^{(k)}(\alpha_1, \mathbf{u})}{F'_{\text{New}}(\alpha_1, \mathbf{u})}, \quad (3.4)$$

$$\tilde{G}^{(\infty)}(x, \mathbf{u}, \xi) = \frac{F_{\text{New}}(x, \mathbf{u})}{x - \alpha_1} + \sum_{j=2}^n \frac{F_{\text{New}}(x, \mathbf{u})}{(x - \alpha_1)(x - \alpha_j)} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \xi^k \frac{\delta F^{(k)}(\alpha_j, \mathbf{u})}{F'_{\text{New}}(\alpha_j, \mathbf{u})} \right). \quad (3.5)$$

ここで、 $\delta F^{(1)} = F_h(x, \mathbf{u})$ であり、 k 次の残余 $\delta F^{(k)}$ ($k \geq 2$) は次式で表される。

$$\delta F^{(k)}(x, \mathbf{u}) = - \sum_{j=2}^n \frac{F_{\text{New}}(x, \mathbf{u})}{(x - \alpha_1)(x - \alpha_j)} \left(\sum_{k'=1}^{k-1} \frac{\delta F^{(k')}(\alpha_1, \mathbf{u})}{F'_{\text{New}}(\alpha_1, \mathbf{u})} \frac{\delta F^{(k-k')}(\alpha_j, \mathbf{u})}{F'_{\text{New}}(\alpha_j, \mathbf{u})} \right). \quad (3.6)$$

例 2 (Hensel 級数と代数関数の数値比較) $F_2(x, u, v)$ を次式とする。

$$F_2(x, u, v) = [(u+v)x - 1][uvx^2 + (u-v)x + 1] + (u^3 + v^3)x^2 + (u+v).$$

$F_2(x, u, v)$ の Newton 多項式とその因数分解は $F_{2\text{New}}(x, u, v) = [(u+v)x - 1][uvx^2 + (u-v)x + 1]$ となる。初期因子 $[(u+v)x - 1]$ に対応する Hensel 級数を $\phi_1^{(k)}(u, v)$ とし、 $F_2(x, u, v)$ の根として定まる代数関数を $\varphi_i(u, v)$ ($i=1, 2, 3$) とする。表 I は、 α_1 に対応する Hensel 級数 $\phi_1^{(k)}(u, v)$ を $k=4$ まで計算し、Mathematica で計算した代数関数 $\varphi_i(u, v)$ ($i=1, 2, 3$) と比較したものである。ただし、 $-0.20 \leq u \leq 0.20$, $v = 0.1$ とし、Hensel 級数も代数関数も (2.1) のように規格化した。

表 I. Hensel 級数と代数関数の数値比較

u	$\bar{\phi}_1^{(4)}(u, 0.1)$	$\bar{\varphi}_i(u, 0.1) \ (i = 1, 2, 3)$	
-0.20	-7.11517	0.696242	$-2.75189 \pm 1.12207 i$
-0.15	∞	0.635459	$-3.33738 \pm 1.33045 i$
-0.10	∞	0.585786	$-3.41421 \quad \infty$
-0.05	<u>2.46037</u>	0.573904	<u>2.46039</u> -3.76102
0.00	∞	0.626789	$1.59543 \quad \infty$
0.05	<u>0.590837</u>	<u>0.590885</u>	$0.552400 \pm 1.54123 i$
0.10	<u>0.565685</u>	<u>0.565685</u>	$\pm 1.41421 i$
0.15	<u>0.559016</u>	<u>0.559010</u>	$-0.324574 \pm 1.41098 i$
0.20	<u>0.552161</u>	<u>0.552125</u>	$-0.630106 \pm 1.40194 i$

$\bar{\phi}_1^{(4)}(u, v)$ の“収束領域”は第 5 章に示すが、それを参照すると、収束領域内では Hensel 級数は代数関数の三つの枝のどれかと非常によく合うことが分かる（表中、下線は一致する数字を表す）。 $u = -0.05$ の数値から、Hensel 級数は代数関数の枝から枝へ飛び移っていることがわかる (jumping)。◇

4 展開点近傍でのオーダー評価

公式 (3.4) より、各 Hensel 級数の振舞いは $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ に決定的に依存することが分かる。そこで本章では、原点近傍で $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ 等が u に関してどう振る舞うかを調べる。

以下では $F(x, u) = f_n(u)x^n + f_{n-1}(u)x^{n-1} + \dots + f_0(u)$ とし、 u は $\|u\| \ll 1$ かつ $f_n(u)$ の零点等の点ではなく一般的な点とする。また、 $o(\|u\|^a)$ は $O(\|u\|^{a'})$, $a' \geq a+1$, を意味するものとする。

4.1 $\text{ord}(f_n) = 0$ のとき

条件 $\text{ord}(f_n) = 0$ は $f_n(0) \neq 0$ を意味する。すなわち $f_n(u)$ は 0 でない定数項を持つので、モニックな場合と同じオーダー評価が成立する。

補題 1 $\text{ord}(f_n) = 0$ のとき、 u が $\alpha_i(u) - \alpha_j(u)$ ($\forall i \neq j$) の零点に近い場合を除き、原点近傍では次のオーダー評価が成立する。

$$\|\alpha_1\|, \|\alpha_1 - \alpha_j\| = O(\|u\|^\lambda) \quad (j = 2, \dots, n), \quad (4.1)$$

$$\|F'_{\text{New}}(\alpha_i, u)\| = O(\|u\|^{(n-1)\lambda}) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (4.2)$$

$$\|F_h(\alpha_i, u)\| = o(\|u\|^{n\lambda}) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (4.3)$$

証明 $\|u\| \ll 1$ のとき、 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ は $F_{\text{New}}(x, u)$ の斉次部分でほぼ決まる、すなわち $f_n(u)$ の高次部分は無視できる。したがって、制約 A から直ちに (4.1) と (4.2) が得られる。 $F_h(x, u)$ の x に関する各係数の全次数は $F_{\text{New}}(x, u)$ の対応する係数の全次数より少なくとも 1 大きいので、(4.3) が成立する。◇

4.2 $\text{ord}(f_n) = \nu > 0$ のとき

補題 2 制約 A の下では、 u が $f_n(u)$ と $\alpha_i(u) - \alpha_j(u)$ ($\forall i \neq j$) の零点に近い場合を除き、原点近傍では次のオーダー評価が成立する。

$$\|\alpha_1\|, \|\alpha_1 - \alpha_j\| = O(\|u\|^\lambda) \quad (j = 2, \dots, n), \quad (4.4)$$

$$\|F'_{\text{New}}(\alpha_i, u)\| = O(\|u\|^{\nu+(n-1)\lambda}) \quad (i = 1, \dots, n), \quad (4.5)$$

$$\|F_h(\alpha_i, u)\| = o(\|u\|^{\nu+n\lambda}) \quad (i = 1, \dots, n). \quad (4.6)$$

証明 オーダー評価 (4.4) と (4.5) は制約 A の直接的結果である。 $F_h(x, \mathbf{u})$ の各係数の全次数は $F_{\text{New}}(x, \mathbf{u})$ の対応する係数の全次数より少なくとも 1 大きいので、(4.6) が得られる。◇

補題 3 Hensel 級数 $\phi_1^{(\infty)}(\mathbf{u}, \xi)$ の ξ^k 項の係数を $\delta\phi_1^{(k)}(\mathbf{u})$ とする。 $\mathbf{u}$ が $\alpha_i(\mathbf{u}) - \alpha_j(\mathbf{u})$ ($\forall i \neq j$) の零点に近い場合を除き、原点近傍では次のオーダー評価が成立する。

$$\|\delta\phi_1^{(k)}(\mathbf{u})\| = o(\|\mathbf{u}\|^{\lambda+k-1}) \quad \text{for small } \|\mathbf{u}\|. \quad (4.7)$$

証明 補題 2 とともに (3.4) を考える。まず、 $\delta F^{(1)} = F_h(x, \mathbf{u})$ ゆえ次式が成立する。

$$\|\delta\phi_1^{(1)}(\mathbf{u})\| = \frac{O(\|F_h(\alpha_1, \mathbf{u})\|)}{O(\|F'_{\text{New}}(\alpha_1, \mathbf{u})\|)} = \frac{o(\|\mathbf{u}\|^{\nu+n\lambda})}{O(\|\mathbf{u}\|^{\nu+(n-1)\lambda})} = o(\|\mathbf{u}\|^\lambda).$$

よって、(4.7) は $k=1$ に対して正しい。つぎに補題が $k-1$ に対して正しいと仮定する：

$$\frac{\|\delta F^{(j)}(\alpha_i, \mathbf{u})\|}{\|F'_{\text{New}}(\alpha_i, \mathbf{u})\|} = o(\|\mathbf{u}\|^{\lambda+j-1}) \quad \text{for small } \|\mathbf{u}\|, \quad j = 1, \dots, k-1.$$

この仮定より (3.6) の $\|\delta F^{(k)}(\alpha_1, \mathbf{u})\|$, $k \geq 2$, が次のようにオーダー評価できる。

$$\begin{aligned} & O\left(\sum_{j=2}^n \frac{\|F'_{\text{New}}(\alpha_j, \mathbf{u})\|}{\|\alpha_1 - \alpha_j\|} \times \left[\sum_{k'=1}^{k-1} \frac{\|\delta F^{(k')}(\alpha_1, \mathbf{u})\|}{\|F'_{\text{New}}(\alpha_1, \mathbf{u})\|} \frac{\|\delta F^{(k-k')}(\alpha_j, \mathbf{u})\|}{\|F'_{\text{New}}(\alpha_j, \mathbf{u})\|} \right] \right) \\ &= \frac{O(\|\mathbf{u}\|^{\nu+(n-1)\lambda})}{O(\|\mathbf{u}\|^\lambda)} \cdot \sum_{k'=1}^{k-1} o(\|\mathbf{u}\|^{\lambda+k'-1}) o(\|\mathbf{u}\|^{\lambda+(k-k')-1}) = o(\|\mathbf{u}\|^{\nu+n\lambda+k-1}). \end{aligned}$$

以上より、 $\|\delta\phi_1^{(k)}(\mathbf{u})\| = \|\delta F^{(k)}(\alpha_1, \mathbf{u})\| / \|F'_{\text{New}}(\alpha_1, \mathbf{u})\| = o(\|\mathbf{u}\|^{\lambda+k-1})$ を得る。◇

5 展開点近傍での Hensel 級数の収束性

公式 (3.4) - (3.6) は Hensel 級数の性質を理論的に解明するのに非常に有用である。論文 [12] では、与式がモニックな場合について理論解析を行った。本章では同様な解析を非モニックな場合について行う。結果として、 $\mathbf{u}$ が主係数の零点に近い場合を除き、規格化された Hensel 級数はモニックな場合の級数と非常に良く似た収束性を示すことが分るだろう。

定理 2 $\mathbf{u}$ が $f_n(\mathbf{u})$ の零点に近い場合を除き、規格化 Hensel 級数 $\bar{\phi}_1^{(\infty)}(\mathbf{u}, 1)$ の任意の発散領域は展開点を出発し、 $\alpha_1(\mathbf{u}) - \alpha_j(\mathbf{u})$ ($2 \leq j \leq n$) の零点に沿って放射状に広がる。

証明 (3.4) の $G_1^{(k)}(x, \mathbf{u}, t)$ と (3.6) によれば、展開点の近傍では Hensel 級数 $\bar{\phi}_1^{(\infty)}(\mathbf{u}, 1)$ は $F_{\text{New}}(\alpha_1, \mathbf{u}) = f_n(\mathbf{u}) \prod_{j=2}^n (\alpha_1(\mathbf{u}) - \alpha_j(\mathbf{u}))$ の零点上で発散し、さらに $f_n(\mathbf{u})$ の零点上でも発散するが、それ以外の場所では発散しない。◇

定理 3 展開点の近傍では、代数関数の二つの枝 $\bar{\varphi}_1(\mathbf{u})$ と $\bar{\varphi}_j(\mathbf{u})$ ($j \geq 2$) は、 $\alpha_1(\mathbf{u})$ と $\alpha_j(\mathbf{u})$ が交差するときは $\alpha_1(\mathbf{u}) - \alpha_j(\mathbf{u})$ の零点に沿って交差し、 $\alpha_1(\mathbf{u})$ と $\alpha_j(\mathbf{u})$ が接するときは枝どうしも接する。

証明 定理 2 によれば、展開点近傍では、発散領域は $\alpha_1(\mathbf{u}) - \alpha_j(\mathbf{u})$ の零点に沿って放射状に出ていく。一方、補題 3 によれば、Hensel 級数は第一項で良く近似される。また、代数関数も Newton 多項式の根でよく近似されるが、Hensel 級数の第一項はその根に他ならない。ゆえに、展開点近傍では、Hensel 級数も代数関数も $\alpha_1(\mathbf{u}) - \alpha_j(\mathbf{u})$ の零点に沿って同じ振舞いをするようになる。◇

定理 4 原点を中心とする半径 $r \ll 1$ の超球面 $\|\mathbf{u}\|^2 = r^2$ を S_r とする。 S_r は $f_n(\mathbf{u})$ の零点を含んで、零点上で $\alpha_1(\mathbf{u})$ は発散するとする。 S_r 上のその零点の近傍を δS_r とし、 $\check{S}_r = S_r - \delta S_r$ とする。このとき、次式が成立する。

$$\frac{[\check{S}_r \text{ 上での } \bar{\phi}_1(\mathbf{u}) \text{ の発散領域}]}{[\check{S}_r \text{ 上での } \bar{\phi}_1(\mathbf{u}) \text{ の収束領域}]} \rightarrow 0 \quad \text{as } r \rightarrow 0. \quad (5.1)$$

証明 正規化された根 $\bar{\alpha}_1(\mathbf{u})$ は $\check{S}_r$ 上では発散せず、高次項 $\bar{\phi}_1^{(k)}(\mathbf{u})$ ($k \geq 1$) は $F_{\text{New}}(\alpha_1, \mathbf{u})$ の零点上でのみ発散する。一方、補題 2 より、 $F_{\text{New}}(\alpha_1, \mathbf{u})$ の零点の近傍を除き $\|\bar{\phi}_1^{(k)}(\mathbf{u})\|/\|\alpha_1(\mathbf{u})\| = o(\|\mathbf{u}\|^{k-1})$ である。したがって、(5.1) の比は $r \rightarrow 0$ とともに限りなく 0 に近づく。 $\diamond$

系 1 正規化された Hensel 級数 $\bar{\phi}_1^{(\infty)}(\mathbf{u}, 1)$ は、展開点の微小近傍ではほとんど至るところで収束する。

例 3 (原点近傍での収束領域) 例 2 の $F_2(x, u, v)$ の Hensel 級数の収束領域を調べる。

正規化された 4 次の Hensel 級数 $\bar{\phi}_1^{(4)}(u, v)$ と対応する代数関数 $\bar{\varphi}_i(u, v)$ ($i=1, 2, 3$) を実領域 $-a \leq u, v \leq a$ で比較する。Hensel 級数と代数関数との対応が未知なので、“収束領域” $\mathcal{D}_\delta$ を次式で定める。

$$\mathcal{D}_\delta = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 \mid \min_{i=1,2,3} |\bar{\phi}_1^{(4)}(u, v) - \bar{\varphi}_i(u, v)| < \delta\}.$$

δ として 0.01 あるいは 0.001 を選び、 (u, v) として領域内の多数の点を選べば、Hensel 級数の収束領域がおおよそ $\mathcal{D}_\delta$ で示されるはずである。図 1a, 1b はこうして得られた“収束領域”を示している。

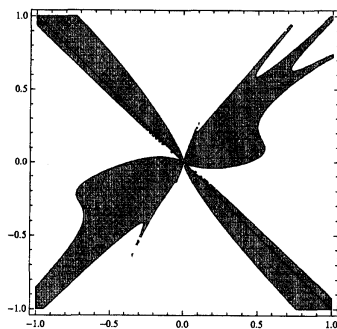


図 1a ($a = 1.0, \delta = 0.01$)

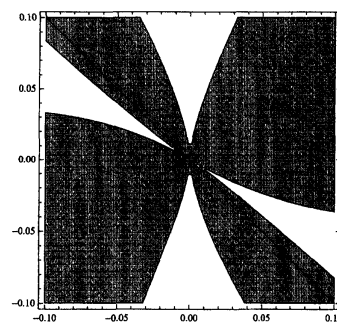


図 1b ($a = 0.1, \delta = 0.001$)

図 1a より、“収束領域”は展開点からかなり遠方まで達することが分かる。一方、図 1a の原点近傍では定理 4 が判然としない。そこで、原点近傍を 10 倍に拡大し、図の解像度も 10 倍上げて (δ を小さくして) 描いたのが図 1b である。図 1b より、定理 4 が成立していることが分かる。

図 1a と 1b に示したのは初期因子 $(u+v)x - 1$ に対応する Hensel 級数である。したがって、 $\bar{\phi}_1^{(4)}(u, v)$ は主係数の零点である直線 $u+v=0$ 上で発散する。図を見ると、この直線上での発散領域は非常に細く、 $k=4$ で打ち切った Hensel 級数は、主係数の零点近傍でも対応する代数関数を非常によく近似することがわかる。一方、 $F'_{2\text{New}}(\alpha_1, u, v) = u(2u+3v)/(u+v)$ であるので、 $\bar{\phi}_1^{(4)}(u, v)$ は直線 $u=0$ と $2u+3v=0$ に沿って発散することを定理 2 は主張するが、図は正にそうになっている。 $\diamond$

6 Hensel 級数の jumping について

Hensel 級数を数値的に調べた論文 [3] において、著者らは次の興味深い現象に遭遇した：Hensel 級数を発散領域を通過して追跡すると、級数は代数関数の一つの枝から他の枝へと飛び移ることが多い。筆者らはこの現象を jumping と命名し、論文 [12] において、与多項式がモニックの場合について理論的にかなり解明した。本章では非モニックな場合について jumping 現象を議論する。

定義 3 $\alpha_1(u) \in \mathbb{C}[u]$ ならば Hensel 級数 $\phi_1^{(\infty)}(u, 1)$ は有理的と言い、そうでなければ代数的という。

$F_{\text{New}}(x, u)$ は $\mathbb{C}[x, u]$ で $F_{\text{New},1}(x, u) \cdots F_{\text{New},r}(x, u)$ と既約因数分解され、 $F_{\text{New},1}(x, u)$ の一つの根を α_1 とする。 $\deg(F_{\text{New},1}) = m > 1$ ならば α_1 と互いに共役な根が存在するので、それらを $\alpha_{1,1}(=\alpha_1), \alpha_{1,2}, \dots, \alpha_{1,m}$ とする。 $\alpha_{1,i}$ に対応する Hensel 級数を $\phi_{1,i}^{(\infty)} (1 \leq i \leq m)$ とする。 $\phi_{1,1}^{(k)}, \dots, \phi_{1,m}^{(k)}$ は互いに共役で、したがって $\phi_{1,1}^{(k)}(u)$ は m 価であることが示されている [14]。

多変数では特異点は連続して現れることが多い。連続した特異点は、 $\ell = 2$ では曲線に、 $\ell = 3$ では曲面に、 $\ell \geq 4$ では $(\ell-1)$ 次元超曲面になることが多い。簡単のため、われわれはこれらを特異線と呼ぶ。

P_0 と P_1 は $\mathbb{C}^\ell$ 内の点で、Hensel 級数 $\phi_1^{(\infty)}(u, 1)$ の収束領域内、かつ展開点の近傍にあるとする。経路 C_0 は、 P_0 を出発して一つの特異線を一回だけ回り、 P_0 に帰るとする。経路 C_1 は、 P_0 を出発して特異線を回ることなく、 P_1 に至るとする。つぎの定理 5 は自明であろう。

定理 5 代数的 Hensel 級数 $\phi_1^{(k)}(u, 1)$ ($k \geq 2$) を経路 C_0 に沿って追跡し P_0 に帰ったとき、その級数は互いに共役な他の一つの Hensel 級数に移っている。

定理 6 Hensel 級数 $\phi_1^{(k)}(u, 1)$ ($k \geq 2$) を経路 C_1 に沿って追跡し P_1 に至ったとき、その級数が有理的か代数的かに拘わらず、また経路が発散領域を通過するか否かに拘わらず、 P_1 では元の級数のままである。

証明 展開点の微小近傍では大部分の領域が収束領域であり、発散領域は展開点から放射状に出ることが判明している。したがって、発散領域を横切ることなく、経路 C_1 を展開点の微小近傍でかつ収束領域内に移動することができる。この移動した経路上では Hensel 級数は元の級数のままである。◇

系 2 Hensel 級数 $\phi_1^{(\infty)}(u, 1)$ は P_1 では代数関数の枝の一つ $\varphi_1(u)$ に対応するとする。 $\phi_1^{(k)}(u, 1)$ を経路 C_1 に沿って追跡し、その級数の発散領域を通過すると、級数は代数関数の別の枝に飛び移ることが多い。

証明 定理 3 によると、代数関数の展開点近傍での二つの枝は、特異点の特異線を成す限り、発散領域の近傍で交差するか接する。接して再び離れる場合を除き、経路 C_1 が発散領域を通過した場所で二つの枝が入れ替わっていれば、Hensel 級数は入れ替わった枝に飛び移る。◇

例 4 (Hensel 級数の jumping). $F_3(x, u, v)$ を次式とする。

$$F_3(x, u, v) = [(u+v)x - 1](ux - 1)(vx + 1) + (u^4 + v^4)x^2 + u^3v^3.$$

初期因子 $vx+1$ に対応する Hensel 級数 $\phi_3^{(10)}(u, v)$ と三つの代数関数 $\varphi_i(u, v)$ ($i = 1, 2, 3$) を、経路 C_3 : $(u, v) = 0.1 \times (\cos \theta, \sin \theta)$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) に沿って追跡する。(経路半径を大きくするとグラフは一層複雑になる)。 $F'_{3\text{New}}(-1/v, u, v) = (u+v)(u+2v)/v^2$ なので、発散領域は 2 直線 $u+v=0, u+2v=0$ に沿って走り、 C_3 は発散領域と $\theta = 3\pi/4, 5\pi/6, 7\pi/4, 11\pi/6$ で交差する。

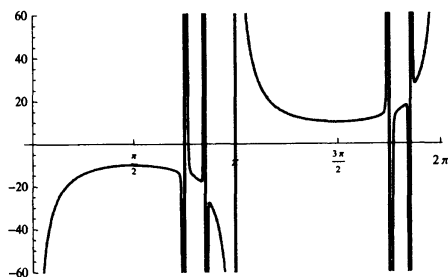


図 2a $\phi_3^{(10)}(u, v)$

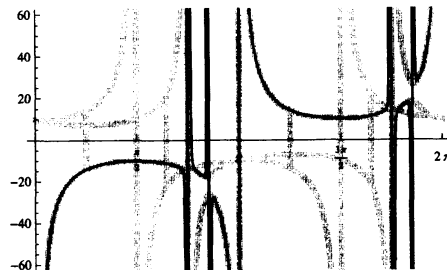


図 2b $\text{Re}(\varphi_i(u, v))$ ($i = 1, 2, 3$)

図 2a は、 $\phi_3^{(10)}(u, v) = -1/v + \text{H.T.}$ を C_3 に沿って追跡したときの $\phi_3^{(10)}$ を示している。グラフは次の箇所を発散している： $\theta = 0, 3\pi/4, 5\pi/6, \pi, 7\pi/4, 11\pi/6, 2\pi$ 。図 2b の灰色曲線は代数関数の三つの枝を C_3 に沿って追跡したときの $\text{Re}(\varphi_i(u, v))$ ($i = 1, 2, 3$) を示している；参考のため、 $\phi_3^{(10)}$ の値を黒曲線で示した。代数関数の二つの枝はおおよそ次の箇所で複素数になっている： $\theta = 0, 3\pi/4, \pi, 7\pi/4, 2\pi$ 。(本稿の図は Mathematica を用いて描いた。図には何本か垂直な線が描かれているが、長さが有限の 4 本の線は Mathematica が描いた偽線である)。Hensel 級数は $\theta = 5\pi/6, 11\pi/6$ を通過する際に jump していることが分かる。なお、主係数が零となる $\theta = 0, \pi, 2\pi$ では jumping は起きていないことに注意。◇

参 考 文 献

- [1] F. Beringer and F. Jung, Multi-variate polynomials and Newton-Puiseux expansions. *Proc. SNSC 2001*, W. Winkler and U. Langer (Eds.): *Lec. Notes Comp. Sci.*, **2630**, 240–254, 2003.
- [2] D. Inaba, Factorization of multivariate polynomials by extended Hensel construction. *ACM SIGSAM Bulletin*, **39**(1), 2–14, 2005.
- [3] D. Inaba and T. Sasaki, A numerical study of extended Hensel series. *Proc. SNC'07*, J. Verschede and S.T. Watt (Eds.), 103–109, ACM Press, 2007.
- [4] M. Iwami, Analytic factorization of the multivariate polynomial. *Proc. CASC 2003*, V.G. Ganzha, E.W. Mayr and E.V. Vorozhtsov (Eds.), 213–225, Technische Universität München Press, 2003.
- [5] M. Iwami, Extension of expansion base algorithm to multivariate analytic factorization. *Proc. CASC 2004*, V.G. Ganzha, E.W. Mayr and E.V. Vorozhtsov (Eds.), 269–282, Technische Universität München Press, 2004.
- [6] J. McDonald, Fiber polytopes and fractional power series. *J. Pure Appl. Algebra*, **104**, 213–233, 1995.
- [7] P.D. González Pérez, Singularités quasi-ordinaires toriques et polyèdre de Newton du discriminant. *Canad. J. Math.*, **52**(2), 348–368, 2000.
- [8] A. Poteaux, Computing monodromy groups defined by plane algebraic curves. *Proc. SNC'07*, J. Verschede and S.T. Watt (Eds.), 36–45, ACM Press, 2007.
- [9] T. Sasaki and D. Inaba, Hensel construction of $F(x, u_1, \dots, u_\ell)$, $\ell \geq 2$, at a singular point and its applications. *ACM SIGSAM Bulletin*, **34**(1), 9–17, 2000.
- [10] T. Sasaki and D. Inaba, On series expansion of multivariate algebraic functions by extended Hensel construction. Preprint of Univ. Tsukuba, 2008. (submitted)
- [11] T. Sasaki and D. Inaba, Multivariate Hensel construction in roots. Preprint of Univ. Tsukuba, 2008. (submitted)
- [12] T. Sasaki and D. Inaba. Convergence and many-valuedness of Hensel series near the expansion point. *Proc. SNC 2009*, 159–167, ACM Press, Aug. 2009.
- [13] T. Sasaki and F. Kako, Solving multivariate algebraic equation by Hensel construction. Preprint of Univ. Tsukuba, March, 1993.
- [14] T. Sasaki and F. Kako, Solving multivariate algebraic equation by Hensel construction. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, **16**(2), 257–285, 1999.
- [15] K. Shiihara and T. Sasaki, Analytic continuation and Riemann surface determination of algebraic functions by computer. *Japan J. Indust. Appl. Math.*, **13**(1), 107–116, 1996.