

Three-State Stochastic Neural Network の挙動と解析

大平 徹

(株) ソニーコンピュータサイエンス研究所

Sony Computer Science Laboratory Inc.

3-14-13 Higashigotanda, Shinagawa, Tokyo 141 Japan

ohira@csl.sony.co.jp

あらまし 本論文では、Cowan によって提唱されたニューラルネットワークマスター方程式によって確率動作するニューラルネットの解析をする一手法について考察する。ここでは三つの状態をとるニューロンからなるネットワークを外積表記されたニューラルネットワークマスター方程式を用いて解析する。この解析ではネットワークのモーメントの力学階層式を導き、この階層式を近似する一方法としてネットワーク活動を平均場の中におかれた一つ、もしくは二つの擬似ニューロンによって表現する方法を提案する。これらの近似を単純な構造を持つネットワークに適用し、モンテカルロシミュレーションとの比較を行なった。

1. まえがき

ノイズを含む、もしくは確率動作するニューラルネットワークについての研究は近年においても盛んに行なわれている。特に近年においてはニューラルネットワークを解析する手法として全体の挙動を確率動作する一つの実効果もしくは擬似ニューロン (Effective or Quasi Neuron) の解析によって調べる研究が見受けられる⁽¹⁾⁽²⁾⁽³⁾。この論文では近年 Cowan によって提唱された⁽⁴⁾ニューラルネットワークマスター方程式 (Neural Network Master Equation (NNME)) によって表現されているモデルにおいて擬似ニューロンを用いた解析を行なう。NNME は古典力学における多体問題のために提唱された第二量子化の定式⁽⁵⁾⁽⁶⁾を用いたマスター方程式⁽⁷⁾をニューラルネットワークに応用したものである。マスター方程式のこのような定式化は場の理論によって展開されている解析手法を可能にする。以前の研究⁽⁸⁾においては NNME よりモーメント力学式の階層を導き、これをやや恣意的に近似することでモンテカルロシミュレーションとの比較を行なった。またマスター方程式より Heisenberg 表示を通じて、モーメント母関数を Feynman 図の組合せによって表現する手法も提案した⁽⁹⁾。ここでは NNME を因子の外積表記を用いることで定式化するとともにそれぞれのニューロンが3状態をとるようなシステムへの拡張を行った。この定式化を1次元リングのネットワークに適用し、シミュレーションとの比較を行なう。

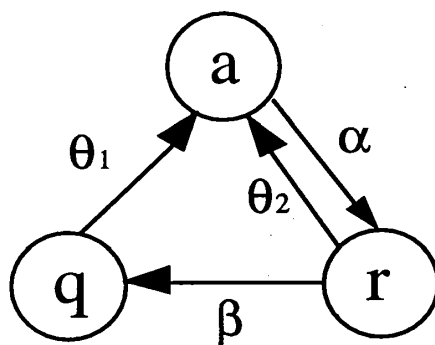


図 1: ニューロンの状態遷移確率速度

2. ニューラルネットワークマスター方程式

まず NNME について簡単に触れる。ニューロンは active (a), refractory (r), and quiescent (q) の三つの状態をとるものとして、それぞれを三次元空間の基底ベクトルとして考え Dirac の表記により記述する。

$$|q_i\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_i, \quad |a_i\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_i, \quad |r_i\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_i \quad (1)$$

これらのベクトルの内積は次のように定義される。

$$\langle a_i | a_i \rangle = \langle q_i | q_i \rangle = \langle r_i | r_i \rangle = 1, \quad (2)$$

$$\langle q_i | a_i \rangle = \langle a_i | q_i \rangle = \langle r_i | a_i \rangle = \langle a_i | r_i \rangle = \langle r_i | q_i \rangle = \langle q_i | r_i \rangle = 0. \quad (3)$$

このモデルの基礎となる個々のニューロンの状態遷移確率速度は次のように表されると仮定する (図 1)。ここで α と β はニューロンによらない一様な定数で、 θ_1 と θ_2 は他の活性ニューロンからの入力との総和の関数であり活性化確率速度をしめす。一般にこれらの関数は絶対不応期による活性化確率速度の上限を反映するためにシグモイド型の関数などを用いる。

ネットワークのとりうる可能な状態の集合は個々のニューロンの状態ベクトルの直積によって基底される空間 $\{|\Omega\rangle\}$ であると考ええる。

$$|\Omega\rangle = |v_1\rangle |v_2\rangle \dots |v_N\rangle, \quad v_i = a_i \text{ } r_i \text{ or } q_i. \quad (4)$$

今 $P[\Omega, t]$ をネットワークが時刻 t に状態 Ω にある確率と考える。そして、ネットワークの“ステートベクトル”を次のように定義する

$$|\Phi(t)\rangle = \sum_{\{\Omega\}} P[\Omega, t] |\Omega\rangle, \quad (5)$$

ここではすべての可能な状態について総和する。

これらの定義をもとにして (図1) の基本遷移確率速度を持つネットワークのための NNME を書くことが外積の形で書き表された演算子⁽¹⁰⁾を用いることで可能となる。ここで使われる演算子は例えば次のように与えられる。

$$|a_i\rangle\langle q_i| = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_i \quad (6)$$

NNME はこの表記を使って以下のように書ける

$$-\frac{\partial}{\partial t} |\Phi(t)\rangle = \mathbf{L} |\Phi(t)\rangle \quad (7)$$

ここで $\mathbf{L}$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{L} = & \alpha \sum_{i=1}^N (|a_i\rangle\langle a_i| - |r_i\rangle\langle a_i|) + \sum_{i=1}^N (|r_i\rangle\langle r_i| - |a_i\rangle\langle r_i|) \theta_2 \left(\frac{1}{\bar{n}} \sum_{j=1}^N w_{ij} |a_j\rangle\langle a_j| \right) \\ & + \beta \sum_{i=1}^N (|r_i\rangle\langle r_i| - |q_i\rangle\langle r_i|) + \sum_{i=1}^N (|q_i\rangle\langle q_i| - |a_i\rangle\langle q_i|) \theta_1 \left(\frac{1}{\bar{n}} \sum_{j=1}^N w_{ij} |a_j\rangle\langle a_j| \right). \quad (8) \end{aligned}$$

$\bar{n}$ は一つのニューロンへの結合の平均数であり、 w_{ij} は j から i ニューロンへの結合の強さである。(自己結合は無いものとする。 $w_{ii} = 0$) このマスター方程式の形は量子力学のシュレディンガー方程式と類推して考えることができる。しかし、 $P_N[\Omega, t]$ は確率分布であり、また $\mathbf{L}$ は全体の確率保存のためエルミート共役でないことに注目しておく必要がある。

ここで「a-r-q ベクトル」を定義し、モーメント母関数を NNME より導出する方法を提示する。a-r-q ベクトルは次のように定義される。

$$\langle \vec{a} \, \vec{r} \, \vec{q} | = \prod_{i=1}^N (q_i \langle q_i | + r_i \langle r_i | + a_i \langle a_i |). \quad (9)$$

上記の積は直積で a_i , r_i と q_i はパラメータである。今、一次モーメント $\langle\langle a_i(t) \rangle\rangle$, $\langle\langle r_i(t) \rangle\rangle$ と $\langle\langle q_i(t) \rangle\rangle$ を i ニューロンが時刻 t において active, refractory そして quiescent である確率と定義し、高次モーメント、例えば $\langle\langle r_i q_j a_k \dots(t) \rangle\rangle$ も同様に時

刻 t において i は refractory, j は quiescent, k は active, etc である確率であると定義する。すると a-r-q ベクトルを用いてこれらは以下のように導くことができる。

$$\langle\langle a_i(t) \rangle\rangle = \langle \vec{a} = \vec{r} = \vec{q} = 1 | a_i \rangle \langle a_i | \Phi(t) \rangle \quad (10)$$

$$\langle\langle q_i(t) \rangle\rangle = \langle \vec{a} = \vec{r} = \vec{q} = 1 | q_i \rangle \langle q_i | \Phi(t) \rangle \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \langle\langle r_i q_j a_k \dots(t) \rangle\rangle \\ = \langle \vec{a} = \vec{r} = \vec{q} = 1 | r_i \rangle \langle r_i | \otimes | q_j \rangle \langle q_j | \otimes | a_k \rangle \langle a_k | \dots | \Phi(t) \rangle \end{aligned} \quad (12)$$

ここで $\otimes$ は直積を表す。さらに一般には

$$\begin{aligned} \langle\langle s_i s_j s_k \dots(t) \rangle\rangle = \langle \vec{a} = \vec{r} = \vec{q} = 1 | s_i \rangle \langle s_i | \otimes | s_j \rangle \langle s_j | \otimes | s_k \rangle \langle s_k | \dots | \Phi(t) \rangle, \\ s = a, r, q \end{aligned} \quad (13)$$

以上については次の性質が成り立つことは容易に示せる。

$$\langle\langle a_i(t) \rangle\rangle + \langle\langle q_i(t) \rangle\rangle + \langle\langle r_i(t) \rangle\rangle = 1 \quad (14)$$

そして

$$\langle\langle a_i^2(t) \rangle\rangle = \langle\langle a_i(t) \rangle\rangle, \quad \langle\langle r_i^2(t) \rangle\rangle = \langle\langle r_i(t) \rangle\rangle, \quad \langle\langle q_i^2(t) \rangle\rangle = \langle\langle q_i(t) \rangle\rangle. \quad (15)$$

さらにモーメント母関数、及びその力学式は以下のように与えられる。

$$G(\vec{a}, \vec{r}, \vec{q}, t) = \langle \vec{a}, \vec{r}, \vec{q} | \Phi(t) \rangle, \quad (16)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} G(\vec{a}, \vec{r}, \vec{q}, t) = \langle \vec{a}, \vec{r}, \vec{q} | \mathbf{L} | \Phi(t) \rangle \quad (17)$$

そしてこの母関数より各次のモーメントは次のように微分および全てのパラメータを 1 と置くことで導ける。

$$\langle\langle a_i \rangle\rangle = \frac{\partial}{\partial a_i} G(\vec{a}, \vec{r}, \vec{q}, t) |_{\vec{a}=\vec{r}=\vec{q}=\vec{1}} \quad (18)$$

$$\langle\langle r_i \rangle\rangle = \frac{\partial}{\partial r_i} G(\vec{a}, \vec{r}, \vec{q}, t) |_{\vec{a}=\vec{r}=\vec{q}=\vec{1}} \quad (19)$$

$$\langle\langle q_i \rangle\rangle = \frac{\partial}{\partial q_i} G(\vec{a}, \vec{r}, \vec{q}, t) |_{\vec{a}=\vec{r}=\vec{q}=\vec{1}} \quad (20)$$

$$\langle\langle r_i q_j a_k \dots(t) \rangle\rangle = \frac{\partial}{\partial r_i} \frac{\partial}{\partial q_j} \frac{\partial}{\partial a_k} \dots G(\vec{a}, \vec{r}, \vec{q}, t) |_{\vec{a}=\vec{r}=\vec{q}=\vec{1}} \quad (21)$$

上記の定式化は実質においてはゲルマン演算子⁽⁴⁾とコヒーレントベクトル⁽¹¹⁾を用いて展開された以前の定式化と同等であるが、物理状態との対応づけがより明らかである。

3. モーメントの力学階層式

モーメント母関数の力学式に加えてモーメント自身の力学階層式も NNME より a-r-q ベクトルを用いて求めることができる。この階層式は多体問題の BBGKY 階層式と類似のものである⁽¹²⁾⁽¹³⁾。二次モーメントまでを以下に表す。

$$-\frac{\partial}{\partial t}\langle\langle a_i \rangle\rangle = \alpha\langle\langle a_i \rangle\rangle - \langle\langle r_i\theta_2(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^N w_{ij}a_j) \rangle\rangle - \langle\langle q_i\theta_1(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^N w_{ij}a_j) \rangle\rangle \quad (22)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\langle\langle r_i \rangle\rangle = -\alpha\langle\langle a_i \rangle\rangle + \beta\langle\langle r_i \rangle\rangle + \langle\langle r_i\theta_2(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^N w_{ij}a_j) \rangle\rangle \quad (23)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\langle\langle q_i \rangle\rangle = -\beta\langle\langle r_i \rangle\rangle + \langle\langle q_i\theta_1(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^N w_{ij}a_j) \rangle\rangle \quad (24)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t}\langle\langle a_i a_j \rangle\rangle &= 2\alpha\langle\langle a_i a_j \rangle\rangle - \langle\langle r_i a_j \theta_2(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^N w_{ik}a_k) \rangle\rangle - \langle\langle a_i r_j \theta_2(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^N w_{jk}a_k) \rangle\rangle \\ &\quad - \langle\langle q_i a_j \theta_1(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^N w_{ik}a_k) \rangle\rangle - \langle\langle a_i q_j \theta_1(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^N w_{jk}a_k) \rangle\rangle \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t}\langle\langle r_i r_j \rangle\rangle &= -\alpha(\langle\langle r_i a_j \rangle\rangle + \langle\langle a_i r_j \rangle\rangle) + 2\beta\langle\langle r_i r_j \rangle\rangle \\ &\quad + \langle\langle r_i r_j \theta_2(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^N w_{ik}a_k) \rangle\rangle + \langle\langle r_i r_j \theta_2(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^N w_{jk}a_k) \rangle\rangle \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t}\langle\langle a_i r_j \rangle\rangle &= -\alpha(\langle\langle a_i a_j \rangle\rangle - \langle\langle a_i r_j \rangle\rangle) + \beta\langle\langle a_i r_j \rangle\rangle + \langle\langle a_i r_j \theta_2(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^N w_{ik}a_k) \rangle\rangle \\ &\quad - \langle\langle r_i r_j \theta_2(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^N w_{ik}a_k) \rangle\rangle - \langle\langle q_i r_j \theta_1(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^N w_{ik}a_k) \rangle\rangle \end{aligned} \quad (27)$$

ここでは (14) により a, r, q のうちで一つのパラメータの消去は可能である。

4. 階層式の近似

ここではより一般的な NNME より導かれるモーメントの力学階層式を近似する (truncation of hierarchy)。階層式の近似は物理的状況を反映してヒューリスティックに行なわれることが多い。ここでは近似の結果が一つもしくは二つの平均場を通じて相互作用するニューロンに類似する形となるような近似を行なう。以下では (8) の式に

$$\theta_1\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^N w_{ij}\langle\langle a_j \rangle\rangle\right) = \theta_2\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^N w_{ij}\langle\langle a_j \rangle\rangle\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^N w_{ij}\langle\langle a_j \rangle\rangle \quad (28)$$

の条件をつけた NNME について考察する。

一次モーメント近似は通常の前平均場の近似と同じである⁽¹⁴⁾。この近似では二次モーメントは2つの一次モーメントの積として近似され、階層式は次のように一次のレベルで近似される。

$$-\frac{\partial}{\partial t}\langle\langle a_i \rangle\rangle = \alpha\langle\langle a_i \rangle\rangle - \bar{w}_i(\langle\langle r_i \rangle\rangle + \langle\langle q_i \rangle\rangle) \quad (29)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\langle\langle r_i \rangle\rangle = -\alpha\langle\langle a_i \rangle\rangle + \beta\langle\langle r_i \rangle\rangle + \bar{w}_i\langle\langle r_i \rangle\rangle, \quad (30)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\langle\langle q_i \rangle\rangle = -\beta\langle\langle r_i \rangle\rangle + \bar{w}_i\langle\langle q_i \rangle\rangle, \quad (31)$$

ここで

$$\bar{w}_i = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^N w_{ik}\langle\langle a_k \rangle\rangle \quad (32)$$

ここでの留意点はこの近似が自己活性遷移確率速度 $\bar{w}_i$ を持つニューロンの形である点である。

二次モーメント近似は一次モーメント近似を拡張し、その結果が平均場を通じて相互作用する二つの擬似ニューロンの形となるように階層を近似する。具体的にはそのような形となるように三次モーメントを二次と一次モーメントの積と近似する。

$$-\frac{\partial}{\partial t}\langle\langle a_i \rangle\rangle = \alpha\langle\langle a_i \rangle\rangle - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^N w_{ij}(\langle\langle q_i a_j \rangle\rangle + \langle\langle r_i a_j \rangle\rangle), \quad (33)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\langle\langle r_i \rangle\rangle = -\alpha\langle\langle a_i \rangle\rangle + \beta\langle\langle r_i \rangle\rangle + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^N w_{ij}\langle\langle r_i a_j \rangle\rangle, \quad (34)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\langle\langle q_i \rangle\rangle = -\beta\langle\langle r_i \rangle\rangle + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^N w_{ij}\langle\langle q_i a_j \rangle\rangle, \quad (35)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\langle\langle a_i a_j \rangle\rangle = 2\alpha\langle\langle a_i a_j \rangle\rangle - \overline{w_{ij}}(\langle\langle r_i a_j \rangle\rangle + \langle\langle q_i a_j \rangle\rangle) - \overline{w_{ji}}(\langle\langle a_i r_j \rangle\rangle + \langle\langle a_i q_j \rangle\rangle), \quad (36)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\langle\langle r_i r_j \rangle\rangle = -\alpha(\langle\langle r_i a_j \rangle\rangle + \langle\langle a_i r_j \rangle\rangle) + 2\beta\langle\langle r_i r_j \rangle\rangle + 2\overline{w_{ij}}\langle\langle r_i r_j \rangle\rangle, \quad (37)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t}\langle\langle a_i r_j \rangle\rangle = -\alpha(\langle\langle a_i a_j \rangle\rangle - \langle\langle a_i r_j \rangle\rangle) + \beta\langle\langle a_i r_j \rangle\rangle + \overline{w_{ji}}\langle\langle a_i r_j \rangle\rangle - \overline{w_{ij}}(\langle\langle r_i r_j \rangle\rangle + \langle\langle q_i r_j \rangle\rangle). \quad (38)$$

ここで

$$\overline{w_{lm}} = \frac{1}{\bar{n}} \left[\sum_{k=1, (k \neq m)}^N w_{lk} \langle\langle a_k \rangle\rangle + w_{lm} \right]. \quad (39)$$

これは i と j ニューロンが平均場 $\overline{w_{ij}}$ と $\overline{w_{ji}}$ を通じて相互作用する式となっている。

ここで留意しなければならない点は、このような近似が階層式の近似として一意に決まるものではなく、その評価は次節に行なわれるようにモンテカルロシミュレーションとの比較によってなされる。

5. モンテカルロシミュレーションとの比較

前節で求められた近似を NNME のモンテカルロシミュレーションと比較するために、具体例として、ニューロンがリング状に配列されたネットワークを考える。このネットワークでは、それぞれのニューロンは隣り合う二つのニューロンと相互作用している (図 2)。

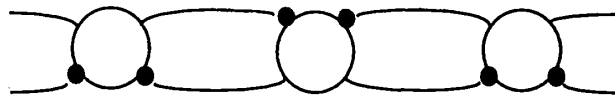


図 2: リング状のネットワーク

具体的には NNME に次の条件を付加する。

$$w_{ij} = (\delta_{i,i+1} + \delta_{i-1,i}), \quad (N+1 \equiv 1), \quad \bar{n} = 2, \quad \theta_i(x) = w_i x \quad (40)$$

この条件を前節の近似に適用すればこのネットワークの一次、そして二次モーメント近似を求めることができる。ここではネットワーク全体の挙動を調べるために、

次のように巨視的パラメータ⁽¹⁵⁾を定義する。

$$\chi_a = \frac{1}{N} \sum_{i=1} \langle\langle a_i \rangle\rangle, \quad \chi_r = \frac{1}{N} \sum_{i=1} \langle\langle r_i \rangle\rangle, \quad \chi_q = \frac{1}{N} \sum_{i=1} \langle\langle q_i \rangle\rangle, \quad (41)$$

$$\eta_{aa} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle\langle a_i a_{i+1} \rangle\rangle, \quad \eta_{rr} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle\langle r_i r_{i+1} \rangle\rangle, \quad \eta_{ar} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \langle\langle a_i r_{i+1} \rangle\rangle. \quad (42)$$

これらの定義を用いると一次モーメント近似は

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \chi_a &= \alpha \chi - w_2 \chi_a \chi_r - w_1 \chi_q \chi_a, \\ -\frac{\partial}{\partial t} \chi_r &= -\alpha \chi + \beta \chi_r + w_2 \chi_q \chi_a, \\ \chi_q &= 1 - \chi_a - \chi_r. \end{aligned} \quad (43)$$

となり、二次モーメント近似は以下ようになる。

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \chi_a &= \alpha \chi - w_2 \eta_{ar} - w_1 (\chi_a - \eta_{ar} - \eta_{aa}), \\ -\frac{\partial}{\partial t} \chi_r &= -\alpha \chi + \beta \chi_r + w_2 \eta_{ar}, \\ -\frac{\partial}{\partial t} \eta_{aa} &= 2\alpha \eta_{aa} - w_2 \eta_{ar} (\chi_a + 1) - w_1 (\chi_a + 1) (\chi_a - \eta_{ar} - \eta_{aa}), \\ -\frac{\partial}{\partial t} \eta_{ar} &= -\alpha (\eta_{aa} - \eta_{ar}) + \beta \eta_{ar} + \frac{1}{2} w_2 \eta_{ar} (\chi_a + 1), \\ &\quad -\frac{1}{2} w_2 \eta_{rr} \chi_a - \frac{1}{2} w_1 \chi_a (\chi_r - \eta_{rr} - \eta_{ar}), \\ -\frac{\partial}{\partial t} \eta_{rr} &= -2\alpha \eta_{ar} + 2\beta \eta_{rr} + w_2 \eta_{rr} \chi_a. \end{aligned} \quad (44)$$

以下では、これらの近似より得られる χ_a および χ_r の力学についてのみ注目する。ここではマスター方程式のためのモンテカルロアルゴリズム⁽¹⁶⁾をNNMEにあてはめて10000ニューロンを含むネットワークを

$$\alpha = 1.0, \quad \beta = 0.2, \quad w_1 = 0.01 \cdot w_0, \quad w_2 = 0.6 \cdot w_0 \quad (45)$$

として、 w_0 を変化させるに伴う χ_a と χ_r の挙動を調べ、一次及び二次モーメント近似と比較した(図3)。

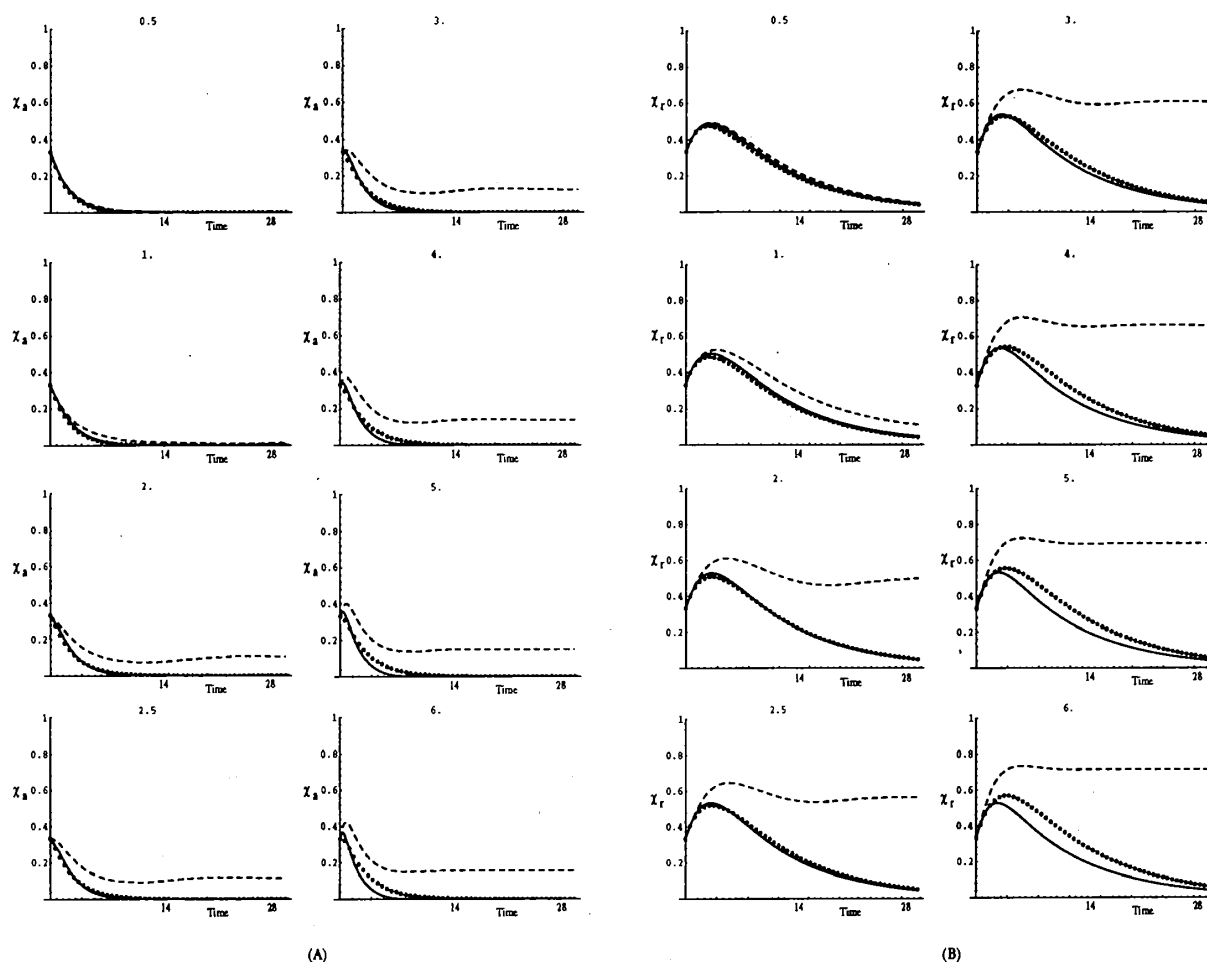


図 3: モンテカーロシミュレーション (点) と一次 (ダッシュ線)、そして二次モーメント近似 (実線) の比較 (χ_a (A) and χ_r (B)). それぞれのグラフは w_0/α の数値で表記されている。

この結果にあるようにより広いパラメータ範囲で、二次モーメント近似の方が一次モーメント近似よりネットワークの力学を正しくとらえているが、パラメータによっては二次モーメント近似の限界も示されている。

6. むすび

マスター方程式による確率動作するニューラルネットワークの解析を行なう一手法を紹介し、三状態をとるニューロンよりなるネットワークへの応用を示した。具体的にはモーメントの力学階層式を導きだし、一次及び二次モーメント近似を行ない単

純なネットワークについてシミュレーションとの比較した。このマスター方程式に基づく他の手法について、また、より複雑なネットワークの解析は別に考察されている(17)と同時に探求中である。

謝辞 この研究における米国シカゴ大学数学科の Jack D. Cowan 教授のご指導に謝意を表します。

文献

- (1) Bulsara A. R., Schieve W. C. and Moss F. : “Cooperative stochastic effects in a model of a single neuron”, In Single Neuron Computation (T.Mckenna, J.Davis, S.F.Zornetzer, eds.), Academic Press, San Diego (1992).
- (2) Bulsara A.R. and Schieve W. C. : “Single effective neuron: Macroscopic potential and noise-induced bifurcations”, Phys. Rev. A, **44**, p.7913 (1991).
- (3) Sompolinsky H., Crisanti H. and Sommers H. : “Chaos in random neural networks”, Phys. Rev. Lett., **61**, p.259 (1988).
- (4) Cowan J. D. : “Stochastic neurodynamics”, In Advances in Neural Information Processing Systems (D. S. Toretzky, R. P. Lippman, J. E. Moody, eds.), vol. 3, Morgan Kaufmann Publishers, San Mateo (1991).
- (5) Doi M. : “Second quantization representation for classical many-particle system”, J. Phys. A: Math. Gen., **9**, pp.1465–1477 (1976).
- (6) Grassberger P. and Scheunert M. : “Fock-space methods for identical classical objects”, Fortschritte der Physik, **28**, p.547 (1980).
- (7) van Kampen N. : “Stochastic Processes in Physics and Chemistry”, North Holland, Amsterdam, (1981).

- (8) Ohira T. and Cowan J. D. : “Master-equation approach to stochastic neurodynamics”, Phys. Rev. E, **48**, p.2259 (1993).
- (9) Ohira T. and Cowan J. D. : “Feynman Diagrams for Stochastic Neurodynamics”, Proceedings of Fifth Australian Conference of Neural Networks (1994).
- (10) Sakurai J. J. : “Modern Quantum Mechanics”, Benjamin/Cummings, Menlo Park (1985).
- (11) Perelomov A. : “Generalized Coherent States and their Application”, Springer, New York (1986).
- (12) Liboff R. L. : “Kinetic Theory, Classical, Quantum and Relativistic Descriptions”, Prentice Hall, Englewood Cliffs (1990).
- (13) Doi M. : “Stochastic theory of diffusion-controlled reactions”, J. Phys. A: Math. Gen., **9**, p.1479 (1976).
- (14) Reichl L. E. : “A Modern Course in Statistical Physics”, University of Texas Press, Austin (1980).
- (15) 甘利 俊一 : “神経回路網の数理”, 産業図書, (1978).
- (16) Binder K. : “Introduction: Theory and “technical” aspects of Monte Carlo simulations. Monte Carlo Methods in Statistical Physics, 2nd Ed. (Binder K ed.)”, Springer-Verlag, Berlin (1986).
- (17) Ohira T.: Ph.D Thesis, The University of Chicago, Chicago (1993).