

場の理論における散乱理論

荒木 不二洋 (京大 数理解析研)

ページ

§1	理論の枠	1
§2	一粒子状態	3
§3	空間方向の漸近的ふるまい	7
§4	時間無限大での漸近的独立性	9
§5	漸近状態	11
§6	漸近状態のガイガー計数管的解釈	16
§7	ポテンシャル散乱との比較	19
§8	未解決の問題	21

§1 理論の枠

次のような枠が与えられている場合について、粒子の散乱とどのように記述し、どのような定理が証明されているか、を説明する。

$\mathcal{H}$: 複素ヒルベルト空間。[云々までもなく量子論の基本的 ingredient である。] 内積 (Φ, Ψ) は、物理学者の習慣に従い、 Ψ について線形、 Φ について反線形である： $(i\Phi, \Psi) = -i(\Phi, \Psi)$ 。

M : ミンコフスキー空間。 $x \in M$ は (x^0, x^1, x^2, x^3) または $(x, \vec{x})$ のように書くこともあり、その内積は $(x, y) = x^0 y^0 - \vec{x} \cdot \vec{y}$ とする。

$\mathcal{P}$: 非自対称ローレンツ群 [云々] まで、相対論の基本的 ingredient である。] 以下では $\mathcal{P}$ の部分群としての translation group $[x \in M \rightarrow x+a \in M \text{ for } a \in M]$ しか本質的な役割をはたさない。

(a, Λ) : $\mathcal{P}$ の元。 $x \rightarrow \Lambda x + a$ という変換。

$U(a, \Lambda)$ $\mathcal{H}$ 上の $\mathcal{P}$ の連続ユニタリ表現。 具体的に $U(a, \Lambda)$ は

$$U(a, \Lambda) = \int_M e^{i(a, p)} E(dp) \quad (1.1)$$

のように、スペクトル射影演算子 $E(\Delta)$, $\Delta \subset M$ を用いて表せるが、 E の台について次の仮定を採用する。

スペクトル条件

(S1) 実スペクトルは $p=0$ のみであり [これは $\mathcal{P}$ の表現であることから証明される。], $\mathcal{P}$ の多重度は 1 である。 $p=0$ の固有空間を $\mathcal{H}_0$ と書く。

(S2) ある $m > 0$ に対し

$$\Delta_1 \equiv \{p \in M; (p, p) = m^2, p^0 > 0\} \quad (1.2)$$

$$\mathcal{H}_1 \equiv E(\Delta_1) \mathcal{H} \quad (1.3)$$

$$d\Omega_m(p) \equiv d^3\vec{p} / (2p^0), \quad p^0 = (m^2 + \vec{p}^2)^{1/2} \quad (1.4)$$

とあくと、 $E|_{\mathcal{H}_1}$ は各実 $p \in \Delta_1$ で多重度 1, $d\Omega_m(p)$ の測度類に属する。 [$d\Omega_m$ は Δ_1 上の変換 $p \rightarrow \Lambda p$ に対して不変な測度である。]

(S3) $E|_{\mathcal{H}_1^\perp}$ の台は Δ_1 と離れている。

(S4) E の台は 0 と $\{p \in M; (p, p) \geq m^2, p^0 > 0\}$ の和集合に含まれる。

Ω : $\mathcal{H}_0$ の単位ベクトルを一つ固定して真空ベクトルと呼び Ω で表す。文

献によっては $\bar{\Omega}$ と書かれる場合もある。 $U(a, \Lambda)\Omega = \Omega$ 。

B : M 内の有界開領域を一般に B と書く。

$\mathcal{O}(B)$: 作用素の集合。領域 B で測定できる物理量の全体と考え、この性質を仮定する。

(C1) Isotony : $B_1 \supset B_2 \Rightarrow \mathcal{O}(B_1) \supset \mathcal{O}(B_2)$

(C2) Covariance : $Q \in \mathcal{O}(B) \iff U(a, \Lambda) Q U(a, \Lambda)^{-1} \in \mathcal{O}((a, \Lambda)B)$

また $\forall L \quad (a, \Lambda)B \equiv \{\Lambda x + a; x \in B\}$

(C3) Locality : $B'_1 \supset B_2 \Rightarrow \mathcal{O}(B'_1)' \supset \mathcal{O}(B_2)$

また $\forall L \quad B' = \{y \in M; x \in B \Rightarrow (x-y, x-y) \leq 0\}$

$\mathcal{O}(B)' = \{Q \in L(\mathcal{H}_B); S \in \mathcal{O}(B) \Rightarrow [Q, S] = 0\}$

[B' は B に空間的な共の全体, $B'_1 \supset B_2$ は B_1 と B_2 が互に空間的
 ということ, $\mathcal{O}(B'_1)' \supset \mathcal{O}(B_2)$ は $\mathcal{O}(B_1)$ と $\mathcal{O}(B_2)$ が elementwise
 に可換ということ。]

(C4) Irreducibility : $(\bigcup_B \mathcal{O}(B))'$ は単位作用素の定数倍からなる。

[これはある意味でよく物理的な仮定から導出できる。]

以上の枠の中での散乱理論とは、 $\mathcal{H}_1$ で記述される粒子が多数互に散乱して
 いる状態を $\mathcal{H}_1$ の中で記述する系の理論である。上記で $\mathcal{H}$ をガリレー群で置
 け換え、 $U(a, \Lambda)$ を $\mathcal{H}$ の射影ユニタリ表現で置き換え、スペクトル条件と
 $\mathcal{O}(B)$ に対する仮定を少々変更することにより、多体ポテンシャル散乱
 も、実はこのような枠に含まれることもできる筈である。

§2 一粒子状態

(S2) により、 $\mathcal{H}_1$ は $L_2(\Delta_1, d\Omega_m)$ と identify される:

$$\Psi \in \mathcal{S}_1 \sim \Psi(p) \in L_2(\mathbb{C}, d\Omega_m) \quad (2.1)$$

$$(\Psi, \bar{\Psi}) = \int \Psi(p)^* \bar{\Psi}(p) d\Omega_m(p) \quad (2.2)$$

$$[U(a, \Lambda) \Psi](p) = e^{i(a, p)} \Psi(\Lambda^{-1}p) \quad (2.3)$$

今 $f(\vec{p}) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ とし

$$\hat{f}(x) = (2\pi)^{-3/2} \int e^{-i(x, p)} f(\vec{p}) d^3p / (2p^0) \quad (2.4)$$

とすると $\hat{f}(x)$ は Klein Gordon 方程式

$$(\square + m^2) \hat{f}(x) = 0 \quad (2.5)$$

の解であるが、次の性質を証明することが出来る。[$\Psi(p), \bar{\Psi}(p) \in \mathcal{S}$ の

と $(\square(x, 1) \Psi, \bar{\Psi})$ は $\hat{f}(x)$ のようにふるまう。]

Lemma 1 $x = (t, \vec{v}t)$ に対し、 $t, \vec{v}$ に無関係な定数 A が存在し、

$$|\hat{f}(x) - |t|^{-3/2} f(\vec{p}_{\vec{v}}) (\sqrt{m}/2) (1 - \vec{v}^2)^{-3/4} \exp[-i(\vec{p}_{\vec{v}}, x) + (3\pi/4)(t/|t|)]| < A|t|^{-5/2} \quad (2.6)$$

$$\text{ただし } \vec{p}_{\vec{v}} = m\vec{v}/\sqrt{1-\vec{v}^2}, \quad p_{\vec{v}}^0 = m/\sqrt{1-\vec{v}^2}. \quad (2.7)$$

また $|\vec{v}| \geq 1$ に対しては $f(\vec{p}_{\vec{v}}) = 0$ と定義する。

さらに $\vec{p} \rightarrow \vec{v}(\vec{p}) = \vec{p}/p^0$ [$p^0 = (\vec{p}^2 + m^2)^{1/2}$] による f の台の像を

K , K の任意近傍 $\in N$, $|\vec{v}| \geq 1$ のような $\vec{v}$ の集合と N の補集合の和を

G とすると、 $\vec{v} \in G$ に対して一様に定数 A_N が存在して

$$|\hat{f}(x)| < |t|^{-N} A_N (1 + |\vec{x}|)^{-N}, \quad N: \text{任意}. \quad (2.8)$$

この補題の物理的意味は次のとおり： $\hat{f}(x)$ は x という点での粒子の確

率振巾に比例すると解釈すれば、 $x = (t, \vec{v}t)$ で t を動かすと、対応する $\hat{f}(x)$

のふるまいは、速度 $\vec{v}$ で動いている部分に外れた確率振巾が、 $t \rightarrow \pm\infty$ の

極限で残ってくる部分とあらわすと考えられる。(2.7)式で与えられる $p_{\vec{v}}$ は速度 $\vec{v}$, 質量

m の粒子のエネルギー運動量である。したがって $f(\vec{p})$ は粒子のエネルギー運動量 $\vec{p}$ である確率振幅を表すという波動関数の解釈 [これは別の面から支持される] と一致する。時間がたつと、異なる速度に移動する粒子の位置は相互にも比例して遠ざかるから、粒子の各々の確率密度は t^3 に比例して小さくなることが期待され、したがって確率振幅はその平方根に比例して小さくなることが期待される。これは (2.6) の左辺第 2 項の $t^{-3/2}$ という係数である。 $\exp -i(p_0, x)$ は粒子が $\vec{p}_0$ というエネルギー運動量を持ったものの波動関数であり、 $\exp -i3\pi/4$ は単なる定数位相、残りの $(\sqrt{m}/2)(1-\vec{v}^2)^{-3/4}$ は正規化因子である。 [Klein Gordon 方程式では $i \int f(x)^* \partial_0 f(x) d^3x$ が x^0 に独立になる。したがって $A \partial_0 B \equiv A (\partial B / \partial x^0) - (\partial A / \partial x^0) B$ 。これを確率と解釈できるが、(2.4) を代入すると、丁度 $\int |f(\vec{p})|^2 d\Omega_m(\vec{p})$ になっている。一方変数を (2.7) によって $\vec{p}$ から $\vec{v}$ に変換すると、 $d\Omega_m(\vec{p}) = (m/2)(1-\vec{v}^2)^{-2} d\vec{v}$ 。他方 (2.6) による $f(x)$ の大きさを t に対する評価を $i \int f(x)^* \partial_0 f(x) d^3x$ に代入し、積分変数を $x = t\vec{v}$ により $\vec{p}$ から $\vec{v}$ にかえると $\int |f(\vec{p}_0)|^2 (m/2)(1-\vec{v}^2)^{-2} d\vec{v}$ となって一致する。] なる $t^{-3/2}$ と $(1-\vec{v}^2)^{-3/4}$ はまとめて $(x, x)^{-3/2}$ と書ける。また $|\vec{v}| \rightarrow 1$ で $f(\vec{p}_0)$ は非常に速く 0 に近づくことに注意。

上記と全く同じ様な評価が自由粒子のシュレディンガー波動関数についても成立する。すなわち

Lemma 2 $f(\vec{p}) \in \mathcal{S}(R^3)$, $x = (t, \vec{v}t)$

$$f(x) = (2\pi)^{-3/2} \int f(\vec{p}) \exp -i[(\vec{p}^2/2m)x^0 - \vec{p} \cdot \vec{x}] d^3\vec{p} \quad (2.9)$$

に対して、 $t, \vec{v}$ に無関係な定数 A が存在して

$$|\hat{f}(x) - |t|^{-3/2} f(\vec{p}_v) m^{3/2} \exp -i[(p_v, x) + (3\pi/4)(t/|t|)]| \\ < A |t|^{-5/2} \quad (2.10)$$

ただし

$$\vec{p}_v = m\vec{v}, \quad p_v^0 = m\vec{v}^2/2, \quad (p_v, x) = -m\vec{v}^2 t/2 \quad (2.11)$$

特に $m\vec{v}$ が f の台の近傍に属しないとせば、任意の N に対し、 $\vec{v}$ について一様に

$$|\hat{f}(x)| < A_N |t|^{-N} \quad (2.12)$$

Lemma 2 の方の証明の要領を説明する。まずガリレ-変換により、評価しやすい形に変える。

$$(2\pi)^{3/2} \hat{f}(x) = \int f(\vec{p}_v + \vec{p}) \exp -i(\vec{p}^2/2m)t \, d^3\vec{p} \exp -i(p_v, x) \quad (2.13)$$

と

$$F(\lambda) \equiv (2m)^{3/2} \int_{|\vec{u}|=1} f(\vec{p}_v + \sqrt{2m}\lambda \vec{u}) d\omega(\vec{u}) \quad (2.14)$$

と置く。ただし $d\omega(\vec{u})$ は通常の球面上の不变測度。このとき (2.13) 式は $\exp -i(p_v, x)$ を除いて

$$\int_0^\infty F(\lambda) e^{-i\lambda^2 t} \lambda^2 d\lambda \quad (2.15)$$

となる。 $F(\lambda)$ が λ について偶関数であり、任意回連続微分可能であることは容易にわかるので、 $t \rightarrow \pm\infty$ で

$$(2\pi)^{3/2} \hat{f}(x) = F(0) e^{-i3\pi/4} (\sqrt{\pi}/4) |t|^{-3/2} \exp -i(p_v, x) + O(t^{-5/2}) \quad (2.16)$$

が得る。 $O(t^{-5/2})$ の部分は $\vec{v}$ について一様に評価できる。

Lemma 1 の証明とこれと原理的に同じだが、評価の計算が少々複雑になるので省略する。

以下の議論で Lemma 1 を用いるときには、次の形で用いる。

Corollary

$$(i) |x^0|^{3/2} \sup_x |f(x)| < A, \quad (2.17)$$

$$(ii) \int |f(x)| d^3x < A' |x^0|^{3/2} + A''. \quad (2.18)$$

粒子の確率密度が $t \rightarrow \pm\infty$ で空間的に $|t|^3$ に比例して稀がり、各点で $|t|^{-3/2}$ のように減少する。この Lemma の解釈に従うと、二粒子がある特定の点に(同時に)見つかる確率密度は t^3 に比例し、三粒子の場合は $t^{-9/2}$ に比例するという具合になる筈である。その為 $t \rightarrow \pm\infty$ の極限では、各安定粒子は確率 1 をもって互に無限大の距離にあり、相互作用が無限遠方で 0 になる場合には独立にふるまうことになる。[このような解釈をする場合、ポテンシャル散乱においては、n 体の束縛状態 (n 体重心系ハミルトニアンに離散的固有空間) も安定一粒子として取扱うことが必要である。]

粒子の相互距離が無限大になると、それらが独立にふるまうという性質は、実は §1 の仮定から導出できる。次節でこれを説明する。

§3 空間方向の漸近的ふるまい

まず Locality の仮定 (C3) を少しゆるめたものを考える。場上の有界線型作用素の集合 $\mathcal{Q}$ が quasilocal of order N ($N \geq 0$) とは、任意の $Q_1, Q_2 \in \mathcal{Q}$ が与えられたとき定数 A が存在して

$$\| [Q_1, Q_2(x)] \| d(x)^N < A \quad (3.1)$$

となることである。ここに

$$Q(x) = U(x, 1) Q U(x, 1)^{-1} \quad (3.2)$$

$$d(x) = \max \{ 0, |x| - |x^0| \} \quad (3.3)$$

N が任意ならば quasilocal of order ∞ という。[A は N に depend.]

Locality の仮定のもとで、 $\bigcup_B \mathcal{O}(B)$ は明らかに quasilocal of order ∞ であるが、 $Q \in \mathcal{O}(B)$ に対して

$$Q(f) \equiv \int Q(x) f(x) dx \quad (3.4)$$

と $f \in \mathcal{S}$ ならば quasilocal of order ∞ である。

空間方向の無限遠で、局所観測量の期待値が独立事象のようにふるまうことは、次の命題の形で証明できる。[(5.4)と(0.3)が証明に使われる。]

Lemma 3 スペクトル条件 (5.1), (5.4) が成り立つとき、 Q_1, Q_2 が quasilocal of order N かつ $(\partial Q_2(x)/\partial x^\mu)$ 及び $(\partial Q_1(x)/\partial x^\mu)$ が有界作用素として (weakly) 存在すれば、定数 A が存在して

$$d(x)^N |(\Omega, Q_1 Q_2(x) \Omega) - (\Omega, Q_1 \Omega)(\Omega, Q_2 \Omega)| < A \quad (3.5)$$

Q_1, Q_2 が local operator [(0.3)にみたつ] ならば $\partial Q/\partial x^\mu$ が存在しない。

Q の個数が3以上の場合を証明するためには、truncation という操作を導入するのが便利である。truncation $(\)_T$ は

$$(Q_1 \cdots Q_m)_T \equiv \sum_{\ell=1}^m (-1)^{\ell-1} (\ell-1)! \sum_{\{I_\nu\}} \prod_{\nu=1}^{\ell} (\Omega, \prod_{k \in I_\nu} Q_k \Omega) \quad (3.6)$$

で定義する。ここに $\{I_\nu\}_{\nu=1, \dots, \ell}$ は $(1 \cdots m)$ の ℓ 個の nonempty sets の

(unordered) partition で $\sum$ は与えられた ℓ のような partition $\{I_\nu\}$ による。

$\ell=1 \cdots m$ について行う。 $(\prod Q_k)$ の中の作用素の順序は k の増えき順に左から右へ並べる (左辺と同じ) ものとする。例えば

$$(Q_1 Q_2)_T = (\Omega, Q_1 Q_2 \Omega) - (\Omega, Q_1 \Omega)(\Omega, Q_2 \Omega)$$

$(Q_1 \cdots Q_m)_T$ は $(\Omega, Q_1 \cdots Q_m \Omega)$ の truncated part とも云うが、後者は前者で次のように展開できる。

$$(\Omega, Q_1 \cdots Q_m \Omega) = \sum_{\ell=1}^m \sum_{\{I_\nu\}} \prod_{\nu=1}^{\ell} (\prod_{k \in I_\nu} Q_k)_T \quad (3.7)$$

記号は (3.6) と同じである。次の Lemma と (3.7) を合わせると、 $(\Omega, Q_1 \cdots Q_m \Omega)$

で $Q_1 \cdots Q_m$ の相互距離が ∞ になるほど (cluster を作って) 大きくなった

と F の値が 3 であることがわかった。(3.7) を cluster expansion と呼ぶ。

Lemma 4 スヤクトル条件 (S1), (S4) のもとで, $Q_1 \dots Q_m$ が quasi-local of order m かつ $(\partial Q_j(x)/\partial x^\mu)$ が存在すれば、任意の定数の $n (=$ 定数 4 より $|x_1^0| \dots |x_m^0|$ があって小さい限り、定数 A が存在して

$$|(Q_1(x_1) \dots Q_m(x_m))_T| d(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m)^N < \text{const} \quad (3.8)$$

$$\text{ここに } d(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) = \max_{i,j} |\vec{x}_i - \vec{x}_j|. \quad (3.9)$$

Q_j が local なら $\partial Q_j/\partial x$ が存在は仮定は必要ない。Lemma 4 の結論が成立するようは $Q_1, \dots, Q_m$ は almost local と呼ばれる。

§4 時間無限大での漸近的独立性

Lemma 5 $Q_1, \dots, Q_m$ が almost local であるとして, $k=1, \dots, m$ に

$$\hat{f}_k(x) = (2\pi)^{-3/2} \int \{e^{-i(x,p)} f_k^+(\vec{p}) + e^{i(x,p)} f_k^-(\vec{p})\} d^3\vec{p} / (2p^0) \quad (4.1)$$

$$f_k^+, f_k^- \in \mathcal{S}$$

$$Q_k(f_k, t) = \int Q_k(t, \vec{x}) f_k(t, \vec{x}) d^3\vec{x} \quad (4.2)$$

とする。ただし $m \geq 2$ 。このとき定数 A が存在して

$$|\langle Q_1(f_1, t) \dots Q_m(f_m, t) \rangle_T| |t|^{3(m-2)/2} < A \quad (4.3)$$

また $m=2$ に対し、

$$|\langle Q_1(f_1, t) Q_2(f_2, t) \rangle_T - \langle f_1, p_{12} f_2 \rangle| |t|^{3/2} < A \quad (4.4)$$

ここに

$$\langle f_1, p_{12} f_2 \rangle = \int \{f_1^-(\vec{p}) f_2^+(\vec{p}) p_{12}(\vec{p}) + f_1^+(\vec{p}) f_2^-(\vec{p}) p_{12}(-\vec{p})\} d^3\vec{p} / (2p^0) \quad (4.5)$$

$$p_{12}(\vec{p}) = (2p^0)^{-1} \int \langle Q_1 Q_2(0, \vec{x}) \rangle_T e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}} d^3\vec{x} \quad (4.6)$$

(4.3) の証明は次のようである。(4.3) の $\langle \rangle_T$ に定義式 (4.2) を代入して

得られた積分表式の絶対値を評価する。 $k=2 \dots m$ に対し, Lemma 1 から

$$|\hat{f}_k(x)| \leq \max_{\vec{x}} |f_k(t, \vec{x})| \leq |t|^{3/2} A_k \quad \text{であらう。 (Corollary (i).)}$$

また $\langle Q_1(t, \vec{x}_1) \dots Q_m(t, \vec{x}_m) \rangle_T = \langle Q_1(0, \vec{x}_1) \dots Q_m(0, \vec{x}_m) \rangle_T$ が

$\vec{x}_j - \vec{x}_{j-1}$ だけの関数で, $\vec{x}_j$ のどれかが無限大になるときに任意の
巾乗より早く 0 になる (almost local property) ことを使って

$$\int |\langle Q_1(0, \vec{x}_1) \dots Q_m(0, \vec{x}_m) \rangle_T| d\vec{x}_2 \dots d\vec{x}_m = A_0$$

が x_k に無関係に得られる。最後にまた Lemma 1 (Corollary (ii)) から

$$\int |f_1(t, \vec{x})| d\vec{x} < |t|^{3/2} A_1$$

のように評価できるので, 全体が $A_0 A_1 \dots A_m |t|^{-3(m-2)/2}$ であらうことがわかる。

(4.4) 式の方は, almost local property から $p(\beta)$ が β について任意回
連続微分可能で, $\beta \rightarrow \infty$ で slow increase であることに注意すると, straight
forward な計算で答えが出た。

この Lemma より

Corollary $\lim_{t \rightarrow \infty} (\Omega, Q_k(t) \Omega) = 0$ ならば

$$\begin{aligned} & \lim_{|t| \rightarrow \infty} (\Omega, Q_1(f_1, t) \dots Q_m(f_m, t) \Omega) \\ &= \begin{cases} 0 & \text{if } m \text{ is odd} \\ \sum_P \prod_{v=1}^{m/2} (f_{p(v)}, p_{p(v)p(v+m/2)} f_{p(v+m/2)}) & \text{if } m \text{ is even.} \end{cases} \quad (4.7) \end{aligned}$$

ここに P は $p(1) < p(1+m/2), p(1) < \dots < p(m/2)$,

をみたす $(1 \dots m)$ の順列 P すべてにわたって行う。

以上で漸近状態の議論に対する準備ができた。

§5 漸近状態

$\mathcal{H}$ 上の任意の有界線形作用素 Q に対し

$$Q_1 = Q(\hat{f}) \equiv \int Q(x) \hat{f}(x) d^4x \quad (5.1)$$

$$\hat{f}(x) \equiv (2\pi)^{-4} \int f(p) e^{-i(p, x)} d^4p \quad (5.2)$$

のようにして Q_1 を作る。このとき $f(p) \in \mathcal{S}(R^4)$ が E の台から Δ_1 を除いたところでは 0 ならば、 $Q_1 \Omega \in H_1$ となることは明らかである。また $\Xi \in H_1$ が与えられておき $(\Xi, \Xi(\cdot)\Xi)$ の台一箇々に K とよび「 μ コンパクトで」、 $(\Xi, Q_1 \Omega) \neq 0$ ならば、スペクトル条件 (S3) によって、上記の f として K に ± 1 とおき Ξ を取りとることができ、そのとき $(\Xi, Q_1 \Omega) = (\Xi, Q \Omega) \neq 0$ となる。

とくに、 $Q \in \mathcal{O}(B)$ の場合を考える。既約性の仮定 (O4) により、任意の $\Xi \in H_1$ に対し、適当な B と $Q \in \mathcal{O}(B)$ があって $(\Xi, Q \Omega) \neq 0$ 。したがって、上記の議論から、 B と $Q \in \mathcal{O}(B)$ を自由に動かしたとき、 $Q_1 \Omega$ の全体は H_1 で稠密であることがわかる。[実は、一つの $Q \in \mathcal{O}(B)$ だけで、 f をいろいろ変えることにより、 $Q_1 \Omega$ が H_1 で稠密になる。]

Q が locality (O3) をみたし、 $f \in \mathcal{S}$ だから、 Q_1 は quasilocal of order ∞ であることがたまたまにわかる。したがって §3 により Q_1 は almost local である。同様にして、 $Q_2 \dots Q_m$ を作ると、 $Q_1 \dots Q_m$ の全体は almost local である。

また、(4.2) で $f_k^- = 0$ であるような $f_1 \dots f_m$ を用意して、

$$\Xi_t \equiv Q_1(f_1, t) \dots Q_m(f_m, t) \Omega \quad (5.3)$$

を考える。(2.1) により $Q_k \Omega$ に対応する波動関数を $g_k(\vec{p})$ とし、

$$h_h(\vec{p}) = (2\pi)^{3/2} f_h^*(\vec{p}) g_h(\vec{p}) / (2p^0) \quad (5.4)$$

と置く。このとき次の定理が成立する。

定理 1

$$\Xi^{out}[h_1, \dots, h_m] = \text{strong lim}_{t \rightarrow +\infty} \Xi_t \quad (5.5)$$

が存在し、 $h_1, \dots, h_m$ のみに depend する。[$Q_1, \dots, Q_m, f_1, \dots, f_m$ の入
り方には $h_1, \dots, h_m$ を通してのみ depend.] さらに

$$(\Xi^{out}[h'_1, \dots, h'_2], \Xi^{out}[h_1, \dots, h_m]) = \delta_{2m} \sum_P \prod_{\nu=1}^m (h'_\nu, h_{P(\nu)}) \quad (5.6)$$

$$(h'_\nu, h_{P(\nu)}) = \int h'_\nu(\vec{p})^* h_{P(\nu)}(\vec{p}) d^3\vec{p} / (2p^0)$$

$$U(a, \Lambda) \Xi^{out}[h_1, \dots, h_m] = \Xi^{out}[U(a, \Lambda)h_1, \dots, U(a, \Lambda)h_m] \quad (5.7)$$

ここに、(5.6)の和はすべての順列Pにわたり、(5.7)で

$$[U(a, \Lambda)h](\vec{p}) = e^{i(p, a)} h(\Lambda^{-1}\vec{p}) \quad (5.8)$$

さらに

$$\Xi^{in}[h_1, \dots, h_m] = \text{strong lim}_{t \rightarrow -\infty} \Xi_t \quad (5.9)$$

についても全く同様のことが成立する。

(5.5)の存在の証明は次のようにする。 $Q_k \Omega \in H_1$ から容易に

$$\frac{d}{dt} Q_k(f_k, t) \Omega = 0 \quad (5.10)$$

がわかる。また(5.1)式を使って

$$\begin{aligned} Q_1(x) &= U(x, 1) \int Q(y) \hat{f}(y) dy U(x, 1)^{-1} \\ &= \int Q(y+x) \hat{f}(y) dy = \int Q(y) \hat{f}(y-x) dy \end{aligned}$$

という計算から、 $Q_k(x)$ がノルムの意味で任意回連続微分可能である

ことがわかる。そこで

$$\left\| \frac{d\Xi_t}{dt} \right\|^2 = \left\| \sum_k Q_1(f_1, t) \cdots \left(\frac{d}{dt} Q_k(f_k, t) \right) \cdots \Omega \right\|^2 \quad (5.11)$$

を考へる。(3.7)式を用いて $(\Omega, \dots, \Omega) \in (\dots)_T$ を展開し, $(\Omega Q_k \Omega) = 0$, $\frac{d}{dt} Q_k(f_k, t) \Omega = 0$ を用いると, 次の3つを factor として含む項だけが残る. ① 4つまたはそれ以上の Q の $(\dots)_T$ を含む. ② 3つの Q の $(\dots)_T$ を2つ含む [以上①, ②では $\frac{dQ}{dt}$ も Q の仲間に入れて考へる.] ③ 二つの Q の $(\dots)_T$ はかりの積で, $(\frac{dQ_k}{dt} Q_l)_T \cdot (Q_j^* \frac{dQ_i^*}{dt})_T$ を含む. Lemma 5 の (4.3) により, ①, ② の各項は $|t|^{-3}$ であらわされる. また同様に Lemma 5 の (4.4) により, ③ もまた $|t|^{-3}$ であらわされる. したがって ある定数 A があって

$$\left\| \frac{d\Xi_t}{dt} \right\|^2 < |t|^{-3} A \quad (5.12)$$

故に, $t_2 > t_1 > T > 0$ に對し,

$$\begin{aligned} \|\Xi_{t_2} - \Xi_{t_1}\| &\leq \int_{t_1}^{t_2} \left\| \frac{d\Xi_t}{dt} \right\| dt < (t_1^{-1/2} - t_2^{-1/2}) 2A \\ &\leq 4A T^{-1/2} \end{aligned} \quad (5.13)$$

すなわち, Ξ_t は $t \rightarrow +\infty$ で Cauchy の條件をみたし, 強極限を持つ.

極限ベクトルの内積は, Lemma 5 の Corollary から (5.6) 式で与えられることがわかり, それより Ξ^{out} は $h_1, \dots, h_m$ のみに depend することがわかる.

(5.8) 式のうち α が任意で Λ が空間回転の部分 (5.5) 式よりたゞちに導かれる. Λ が一般のローレンツ変換の場合の証明は省略する. (証明終)

$m, h_1, \dots, h_m$ をいろいろ変えて得られる $\Xi^{out}[h_1, \dots, h_m]$ で張られる $\mathcal{H}$ の部分空間を $\mathcal{H}_g^{out}$, 同様に $\Xi^{in}[h_1, \dots, h_m]$ で張られる部分空間を $\mathcal{H}_g^{in}$ と名づける. $\mathcal{H}_g^{out}$ の構造は次のとおりである. m を fix した時に $\Xi^{out}[h_1, \dots, h_m]$ で張られる部分空間を $\mathcal{H}_{g_m}^{out}$ とおくと $l \neq m$ で $\mathcal{H}_{g_m}^{out} \perp \mathcal{H}_{g_l}^{out}$ なるから

$$f_y^{out} = \sum_{m=0}^{\infty} \oplus f_{y_m}^{out} \quad (5.14)$$

ここで、 $f_{y_0}^{out}$ は f_{y_0} であり、また Q, Ω が f_{y_0} で稠密であることがこの節の始でわかっているので、 $f_{y_1}^{out}$ は f_{y_1} と一致する。一般の m に対しては、(5.6) から、 $f_{y_m}^{out}$ が m 個の f_{y_i} の外積テンソル積と次の外積によりユニタリ同値である。

$$\Xi^{out}[h_1, \dots, h_m] \in f_{y_m}^{out} \sim m!^{-1/2} \sum_P h_{p(1)} \otimes \dots \otimes h_{p(m)} \in \text{Sym } f_{y_1}^{\otimes m} \quad (5.15)$$

ここに和はすべての順列 P にわたってとる。(5.5)で得られる Ξ^{out} について

は h_k に制限があるが、この外積により、任意の $h_k \in f_{y_1}$ に対して

$\Xi^{out}[h_1, \dots, h_m]$ を定義することからできる。さらにあとで使う都合上、

$$(a_{out}^+, h) \Xi^{out}[h_1, \dots, h_m] = \Xi^{out}[h, h_1, \dots, h_m] \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} (h, a_{out}) \Xi^{out}[h_1, \dots, h_m] &= 0 \quad \text{for } m=0 \\ &= \sum_{l=1}^m (h, h_l) \Xi^{out}[h_1, \dots, \widehat{h_l}, \dots, h_m] \quad \text{for } m>0 \end{aligned} \quad (5.17)$$

により、非有界線形作用素 (a_{out}^+, h) , (h, a_{out}) を定義する。 $(h, a_{out})^\dagger \supset (a_{out}^+, h)$ である。 $h_1, \dots, h_m, h$ を $\mathcal{S}$ に制限したとき、distribution の意味で、次の記号を使う。

$$\Xi^{out}[h_1, \dots, h_m] = \int |\vec{p}_1 \dots \vec{p}_m\rangle_{out} h_1(\vec{p}_1) \dots h_m(\vec{p}_m) [d^3\vec{p}_1/(2p_1^0)] \dots [d^3\vec{p}_m/(2p_m^0)]$$

$$(a_{out}^+, h) = \int a_{out}^+(\vec{p}) h(\vec{p}) (d^3\vec{p}/(2p^0)) \quad (5.18)$$

$$(h, a_{out}) = \int h(\vec{p})^* a_{out}(\vec{p}) (d^3\vec{p}/(2p^0)) \quad (5.19)$$

そのとき

$$\langle \vec{p}'_1 \dots \vec{p}'_l | \vec{p}_1 \dots \vec{p}_m \rangle_{out} = \delta_{lm} \sum_P \prod_{i=1}^m (2p_i^0) \delta(\vec{p}_i - \vec{p}'_{P(i)}) \quad (5.20)$$

$$[a_{out}(\vec{p}'), a_{out}^+(\vec{p})] = (2p^0) \delta(\vec{p} - \vec{p}') \quad (5.21)$$

$$|\vec{p}_1 \dots \vec{p}_m\rangle = a_1^+(\vec{p}_1) \dots a_m^+(\vec{p}_m) | \rangle \quad \text{ただし } | \rangle \equiv \Omega \quad (5.22)$$

が成立する。

全く同様なことを ψ^{in} についても行う。

さて、 $\Psi^{\text{out}}[h_1 \dots h_m]$ の物理的解釈^{について}は、この状態を無限の未来 ($t=+\infty$) で眺めたとき、丁度 m 個の粒子がそれぞれ $h_1, \dots, h_m$ の波動関数で走っている状態と解釈できることを、2節で示す。[ここで、我々はハイゼンベルグ表示を使っていることを注意しておく。一つの状態は時間の如何にたらず一つのベクトルで表される。違う時間でもどのように変っていくかは、その異なる時間の物理量を測定して見て判断する。従って同一の機械で測定しても、測定する時間が違えば違う作用素によって表され、それらは $U(a, 1)$, $a=(t, \vec{x})$ によるユニタリ変換でつながる。一粒子が h_k という状態にあるというときにもやはりハイゼンベルグ表示で考えている。]

同様に、 $\Psi^{\text{in}}(h_1 \dots h_m)$ は、無限の過去 ($t=-\infty$) で眺めたとき、丁度 m 個の粒子がそれぞれ $h_1, \dots, h_m$ で表される状態で見えるように見えると解釈する。

厳密に問題になるのは、 $t=-\infty$ で状態をとらえたとき、 $t=+\infty$ である状態になる確率はいくらかということである。すなわち

$$|(\Psi^{\text{out}}[h'_1 \dots h'_e], \Psi^{\text{in}}[h_1 \dots h_m])|^2 \quad (5.24)$$

が問題になる。そこで

$$S \Psi^{\text{out}}[h_1 \dots h_m] = \Psi^{\text{in}}[h_1 \dots h_m] \quad (5.25)$$

により S 作用素を定義する。 S は $\mathcal{H}^{\text{out}}$ から $\mathcal{H}^{\text{in}}$ へのユニタリ変換である。

[$(\mathcal{H}^{\text{out}})^+$ では定義しない。] また

$$S(h'_1 \dots h'_e; h_1 \dots h_m) \equiv (\Psi^{\text{out}}[h'_1 \dots h'_e], \Psi^{\text{in}}[h_1 \dots h_m]) \quad (5.26)$$

$$= (\Xi^{\text{out}}[h'_1 \dots h'_e], S \Xi^{\text{out}}[h_1 \dots h_m])$$

$$= (\Xi^{\text{in}}[h'_1 \dots h'_e], S \Xi^{\text{in}}[h_1 \dots h_m])$$

を \$S\$ 行列要素という。また \$h'_k, h_j \in \mathcal{S}\$ のとき

$$S(h'_1 \dots h'_e; h_1 \dots h_m) = \int S(\vec{p}'_1 \dots \vec{p}'_e; \vec{p}_1 \dots \vec{p}_m)$$

$$h'_1(\vec{p}'_1)^* \dots h'_e(\vec{p}'_e)^* h_1(\vec{p}_1) \dots h_m(\vec{p}_m) \frac{d^3 \vec{p}'_1}{(2\pi)^3} \dots \frac{d^3 \vec{p}_m}{(2\pi)^3} \quad (5.27)$$

により distribution \$S\$ を定義する。次のようにも書く。

$$S(\vec{p}'_1 \dots \vec{p}'_e; \vec{p}_1 \dots \vec{p}_m) = \langle \vec{p}'_e \dots \vec{p}'_1 | S | \vec{p}_1 \dots \vec{p}_m \rangle \quad (5.28)$$

例えば \$S=1\$ なら, (5.28) は (5.21) で与えられる。

§6 漸近状態のガイガー計数管的解釈

定理 2 \$\Xi_1 = \Xi^{\text{out}}[h'_1 \dots h'_e], \Xi_2 = \Xi^{\text{out}}[h_1 \dots h_m]\$ を定理 1 で得ら

れた状態とし, \$\text{supp } h'_i \cap \text{supp } h'_j, \text{supp } h_i \cap \text{supp } h_j\$ が \$i \neq j\$ で empty とする。また \$\vec{v}_i \neq \vec{v}_j\$ for \$i \neq j\$ の異なる \$\vec{v}_j, j=1 \dots k\$ が与えられたとする。さらに \$Q_1 \dots Q_k\$ が almost local (\$\Xi_1, \Xi_2\$ の construction に使った \$Q\$ も含めて) とする。このとき

$$(\Xi_1, Q_1(t, t\vec{v}_1) \dots Q_k(t, t\vec{v}_k) \Xi_2) \quad (6.1)$$

において, 次の置換が許される。\$Q = Q_j(t, t\vec{v}_j), j=1 \dots k\$ に対し

$$Q = (\Omega, Q \Omega) 1 + (a_{\text{out}}^+, \{E(\Delta_1) Q \Omega\}) + (\{E(\Delta_1) Q^* \Omega\}, a_{\text{out}}) + (a_{\text{out}}^+, \{E(\Delta_1) Q E(\Delta_1)\} a_{\text{out}}) + O(t^{-N}) \quad (6.2)$$

ここに \$N\$ は任意, \$t \to +\infty\$ の極限を考えるものとし, \$\mathcal{H}_1\$ 上の作用素 \$C\$ に対して \$(a_{\text{out}}^+, C a_{\text{out}})\$ を次式で定義する。

$$(a_{\text{out}}^+, C a_{\text{out}}) \Xi^{\text{out}}[h_1 \dots h_m]$$

$$= \sum_{j=1}^n \bar{\psi}^{out} [h_1 \cdots h_{j-1} (h_j h_{j+1} \cdots h_n)] \quad (6.3)$$

全く同じことが、 $n \rightarrow \infty$ と変えた式の $t \rightarrow -\infty$ の極限で成立する。

証明の要領は定理 1 と同じだが、長くなるので省略する。

(6.2) の右辺の各項の $t \rightarrow -\infty$ でのふるまいを考えると、第 1 項は t について定数、第 2、第 3 項は Lemma 1 より評価できて、 $t^{-3/2}$ で小さくなり、第 4 項はこの定理より t^{-3} で小さくなる。

定理 3 Q の局所観測量に關して almost local とし、 $C \equiv E(\Delta_1) Q E(\Delta_1)$ とし、 ψ の作用素として考え、 $\psi, \bar{\psi} \in \mathcal{G}_1$, $\psi(\vec{p}), \bar{\psi}(\vec{p}) \in \mathcal{S}$ に対して

$$(\psi, C \bar{\psi}) = \int d\vec{p}, d\vec{p}' \psi(\vec{p})^* \bar{\psi}(\vec{p}') (d^3\vec{p}/2p^0) (d^3\vec{p}'/2p'^0) \quad (6.4)$$

により distribution $C(\vec{p}, \vec{p}')$ を定義すると、 $C(\vec{p}, \vec{p}')$ は $\vec{p}, \vec{p}'$ によって任意回連続微分可能な有界関数である。さらに、 $\psi, \bar{\psi} \in \mathcal{G}_1$, $\psi(\vec{p}), \bar{\psi}(\vec{p}) \in \mathcal{S}$ に

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^3 (\psi, E(\Delta_1) Q(t, t\vec{v}) E(\Delta_1) \bar{\psi}) = \Gamma(\vec{p}_v) \psi(\vec{p}_v)^* \bar{\psi}(\vec{p}_v) \quad (6.5)$$

$$\Gamma(\vec{p}) = \frac{2(\pi p^0)^3}{m^2} C(\vec{p}, \vec{p}) \quad (6.6)$$

$$\vec{p}_v = m\vec{v} (1 - v^2)^{-1/2} \quad (6.7)$$

(6.4) の $C(\vec{p}, \vec{p}')$ の微分可能であることは、Lemma 4 の $m=3$ の場合の Fourier 変換を考へることにより得られる。また (6.5) は Lemma 1 と同じ証明で得られる。

今特にゲイガー計数管に相当する局所観測量を考へる。まず真空に対しては何もなさを示さないはずなので $Q\Omega = 0$ (固有値は任意だから 0 にした。) また一粒子に対しては数と数とてくれること困るので、 $E(\Delta_1) Q E(\Delta_1) \neq 0$ 。この一つの性質をみたす almost local な作用素を考へることにする。(そのような Q が存在することは、§5 の始めの議論と同じようにして

わかる。) このとき, (6.2)式の右辺の3項は0になり, 第4項から

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^3 Q_j(t, t\vec{v}_j) = (a_{\text{int}}^\dagger \Gamma_j a_{\text{out}}) \quad (6.8)$$

のようになるが (6.1)式で許される。ただし, Γ_j は作用素でなく,

$$(\Psi, \Gamma_j \Xi) = \Gamma(\vec{p}_{\vec{v}_j}) \Xi(\vec{p}_{\vec{v}_j})^* \Xi(\vec{p}_{\vec{v}_j}) \quad \text{for } \Psi, \Xi \in \mathcal{S} \quad (6.9)$$

で定義される hermitian form である。[$\vec{v}_j$ について, bounded operator Ξ 値に与る distribution と考えることもできる。]

(6.8)式の左辺を考える物理的背景は次のとおりである。 Q が何かイ
が - 計数算 (実は真空に対して反応せず, 粒子が通過を何回反応を示すも
のなす何でもよい) に対応しているとしたら, $Q(t, \vec{v}t)$ は 時刻 t ,
空間位置 $\vec{v}t$ における反応を示している。従って $Q(t, \vec{v}t)$ に対し
 $t \rightarrow +\infty$ まで反応を示すものがあれば, それは $\vec{v}$ で走っている何ものか真空
とは異なるものであるということになる。 t^3 をかけてあるので, 粒子の波束
の t に比例した範囲の確率密度が t^3 に比例して小さくなるので丁度
補ってくれる。したがって, $\vec{v}_i \neq \vec{v}_j$ for $i \neq j$ のとき

$$t^{3k} (\Psi, Q_1(t, t\vec{v}_1) \cdots Q_k(t, t\vec{v}_k) \Psi) \quad (6.9)$$

は Ψ という状態で, 粒子が少くとも k 個, それぞれ $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ という速
度で走っている確率密度に比例することになる。ここに粒子と云うのは
真空とは異なり, 時間と共に t に比例した領域に拡がる何ものかという状態
の意味である。比例定数は, 粒子が通った時に, Q_i に対応する機械がどう
いう確率で反応し, どういう値を登録するか【後者は人為的要素】による。
それを見つげるには, Ψ として一粒子状態【 $\mathcal{S}$ の中で ϕ_0 と異なり, $t \rightarrow \infty$
の $(\Psi Q(t, \vec{v}t) \Psi)^3$ の漸近極限がキ0 なのは ϕ_0 の位相からであることが示す。

であるので、 ψ_1 と考えてよい。] をとり、 $k=1$ の極限を計算すればよい。こ
 の結果は、定理3から $\Gamma(\vec{p}_1)$ である。次に他の $\vec{p}_i$ について、(6.9)の極限
 を $\prod_{i=1}^h \Gamma(\vec{p}_i)$ で割ったものを考えることにより、与えられた状態 Ψ が
 $t \rightarrow +\infty$ で散めるときに、少くとも h 個の粒子が $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_h$ という速
 度で走っている確率密度は何か分かる。[確率密度は $\prod_{i=1}^h \{c(\vec{p}_i)/(2p_i^0)\}$ と
 測定に関して密度をとったもの、] $k+1$ のものと h のものとを比較するこ
 とにより、丁度 h 個が走っている確率密度も計算できる。この処法を $\Psi =$
 $\Psi^{\text{out}}[k_1, \dots, k_m]$ に適用すると、定理2より、この状態を $t \rightarrow +\infty$ で散めれば、
 $k_1, \dots, k_m$ という波動関数で走っている粒子が m 個あるように見えることが
 分かる。

$k_1, \dots, k_m \in \mathcal{S}$, $(k_i \text{ の台}) \cap (k_j \text{ の台}) = \emptyset$ for $i \neq j$ のような $\{k_j\}$ に対
 する $\Psi^{\text{out}}[k_1, \dots, k_m]$ は ψ_m^{out} で total であるから、 ψ_j^{out} のベクトルの物理
 的解釈にはこれで十分である。

ψ_j^{in} についてまったく同じことが言える。

§7 ポテンシャル散乱との比較

二体ポテンシャルによる n 体の散乱問題では、 n 個の変数 $\vec{x}_k \in \mathbb{R}^3$, $k=1, \dots, n$
 の L_2 関数の作るヒルベルト空間 $\mathcal{H}_n = L_2(\mathbb{R}^3)^{\otimes n}$ の上で、ハミルトン作用素

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{k=1}^n (\partial/\partial \vec{x}_k)^2 + \sum_{k > l} V(\vec{x}_k - \vec{x}_l) \quad (7.1)$$

を考える。変換 $\vec{x}_k \rightarrow \vec{x}_k + \vec{a}$, $k=1, \dots, n$ は $\mathcal{H}_n$ の上のユニタリ作用素 $T_n(\vec{a})$:

$(T(\vec{a})\Psi)(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \Psi(\vec{x}_1 - \vec{a}, \dots, \vec{x}_n - \vec{a})$ で定義されるが、 H_n は $T_n(\vec{a})$ と可換で、しかも

$T_n(\vec{a})$ のスペクトル分解: $\mathcal{H}_n = \int^{\oplus} \mathcal{H}_n(\vec{p}) d^3\vec{p}$, $T_n(\vec{a}) = \int^{\oplus} e^{i(\vec{p}, \vec{a})} d^3\vec{p}$ に依りて、

$H_n = \int^{\oplus} H_n(\vec{p}) d^3\vec{p}$, $H_n(\vec{p}) = H_n(\vec{0}) + \frac{1}{2m_n} \vec{p}^2$ となることが, (7.1) で変数変換を行うことにより (または H_n のガリレー不変性より) わかるので,

$H_n(0)$ を $\mathcal{H}_n(0)$ の上で考えてもよい。

§1 の特のような形をこの場合に考えようには, $\mathcal{H}$ として $\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{H}_n$ (ただし $\mathcal{H}_0 = \mathbb{C}$ は便宜にかえる) を考え, $U(a, 1)$ としては $\sum_{n=0}^{\infty} \exp(ia^0 H_n) T_n(a)$ を考える。[$U(a, 1)$ の代りにガリレー変換の射影表現を考える。] また

$\mathcal{B}(B)$ としては, $B = I \times \mathbb{R}$, $I = (t_1, t_2)$, $\mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$ に対して, 多分

$$\left\{ e^{itH_n} f_n f_m^* e^{-itH_m}; n, m = 0, 1, 2, \dots, t \in I, f_n \in \mathcal{H}_n, f_m \in \mathcal{H}_m, \text{supp } f_n \in \mathbb{B}^{x_n}, \text{supp } f_m \in \mathbb{B}^{x_m}, f_n, f_m \in \mathcal{D} \right\} \quad (7.2)$$

で生成される作用素の代数を考えればよい。ここに $A = f g^*$ とは x に対し

$Ax = (g, x) f$ で定義される線形作用素 A である。また $\mathcal{D}$ は f_n, f_m に対応する波動関数が, class $\mathcal{D}$ であることを表すものとした。

一粒子状態とは, $H_n(0)$ の離散的固有値に属する固有ベクトル ($n=1, 2, \dots$) を指す。 $n=1$ の場合はもともと与えられた粒子だが, $n>1$ はもともと与えられた粒子 n 個の束縛状態と呼ばれるものである。今 $n=n_1, \dots, n_k$ のような粒子があったとして, [$n_j=1$ であってもよい] それらが散乱している状態に対応した Ξ^{out} をどのようにして作るかを, §5 の処法に従って考えてみよう。

各粒子に対応するベクトルを $f_1, \dots, f_k$ とすると, $f_j \in \mathcal{H}_{n_j}$ であるが, $\mathcal{H}_{n_1 n_2} = \mathcal{H}_{n_1} \otimes \mathcal{H}_{n_2}$ のような natural な identification があるので, §5 の Ξ_t に相当するベクトルは, 今の場合

$$\Xi_t = e^{iHt} \left\{ (e^{-iHt} f_1) \otimes (e^{-iHt} f_2) \otimes \dots \otimes (e^{-iHt} f_k) \right\} \quad (7.3)$$

である。こゝに H が $f_j \in \mathcal{H}_{n_j}$ に働くときは H_{n_j} とおきいであり、 $\{ \}$ に働くときは $\mathcal{H}_{n_1+\dots+n_n}$ に働く $H_{n_1+\dots+n_n}$ とおきいである。§5 と同様の議論で $V(x) \in L_2 \cap L_1$ の場合、 $\lim \Xi_t$ の存在を証明することができる。ただし f_j の微分可能性等が技術上必要になる。

特に (7.3) で $n_1=n_2=\dots=n_n=1$ の場合、 $(H_0)_n = \sum_{j=1}^n (\partial/\partial x_j)^2/2m$ を導入すると、(7.3) は

$$\Xi_t = e^{iH_k t} e^{-i(H_0)_n t} f_1 \otimes \dots \otimes f_n \quad (7.4)$$

となり、 $t \rightarrow +\infty$ の強極限の存在は wave matrix

$$W_k^+ = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{iH_k t} e^{-i(H_0)_n t} \quad (7.5)$$

の存在と同値であり、よく知られた結果となる。

§8 未解決の問題

重要な未解決の問題を二つあげておく。ボラニヤル散乱で (7.5) の存在の証明は非常に簡単だが、 $W_k^+ f_{k_n}$ が f_{k_n} と一致するかどうか等の問題は非常にむずかしい。物理的に予想されるのは次のような結論である。

$\{n_j\}_{j=1,\dots,n}$ を固定した時、(7.3) の $t \rightarrow +\infty$ での極限で得られる space E

$$f_k^{\text{out}}(\{n\}_k) \text{ と書くことにすると } f_k = \sum_{\substack{n_1+\dots+n_n=n \\ k=1,\dots,n}} f_k^{\text{out}}(\{n\}_k) \quad \text{ただし } f_k^{\text{out}}(\{n\})$$

は $H_m^{(n)}$ の離散的固有値に属する固有空間に属するものである。§1 の

公理系では、簡単な各離散的固有状態 (一粒子状態) を一種類に限ってある

ので $f_k = f_k^{\text{out}} = f_k^{\text{in}}$ が物理的に望まれる。しかし §1 の枠では反例が

存在する。そこで問題は物理的に意味のある公理を追加して望ましい結論

が生ずるようにできるかということである。

これに関して次のような興味ある公理が提案されている。すなわち、コンパクトな群 G の Δ と、有界領域 B を固定したとき、ベクトルの集合

$$\{\Xi = E(\Delta) Q \Omega; Q \in \mathcal{O}(B), \|Q \Omega\| \geq e^{-m} \|Q\|, \|\Xi\| \leq 1\} \quad (8.1)$$

がコンパクトであるという条件である。ここに $\mathcal{O}(B)$ は $\mathcal{O}(B)$ で生成される W^* 代数である。実はこの条件だけでは不十分のようだが、これに C^* 代数的なある条件を加えと、知られている反例は皆排除することができよう。

第二の問題は S 行列の性質に関するものである。二体のポテンシャル散乱で次のことが知られている：二体の場合、 $\mathcal{H}_2(0)$ は x_1, x_2 の L_2 関数の作るヒルベルト空間と考えることができ、そこですべて話をすればよい。また §5 で導入した S 作用素は必ずしも全部で定義されないが、ポテンシャル散乱では、漸近状態を記述する $h_1, \dots, h_m$ の空間から $\Xi^{out}[h_1, \dots, h_m]$ の空間 $\mathcal{H}_1 \otimes \dots \otimes \mathcal{H}_m$ を作ることによって程よいので、 S 行列 S_0 を $(S_0) = (W_2^+)^* W_2^-$ で定義すると $S(h_1', h_2'; h_1, h_2) = (h_1' \otimes h_2', S_0, h_1 \otimes h_2)$ となる。【 S 作用素の方は $W_2^- W_2^{+*}$ である。】この S_0 を $\mathcal{H}_2(0)$ に制限して考える。そのときガウス波束

$$\varphi(x) = e^{-|\vec{x} - \vec{x}_0|^2 / 2b^2 + i(\vec{p}_0, \vec{x})} \quad b = [(|\vec{x}_0| - a) / |\vec{p}_0|]^{1/2} \quad (8.2)$$

$|\vec{x}_0| > a$

に対して

$$\|(S-1)\varphi\| < const \cdot e^{-(|\vec{x}_0| - a)|\vec{p}_0|/2} \quad (8.3)$$

のような評価が成立する。ここにポテンシャル $V(r)$ は $r > a$ で 0 とする。

この物理的意味は次のとおりである。 $|\vec{x}_0|$ が大きくなることは衝突する粒子がそれぞれ直進したときの最短距離 (impact parameter と呼ばれる) が大きくなることを意味する。ポテンシャルの range が a ならば $|\vec{x}_0|$ が a

δ 越えて大きくなると、二粒子の散乱の起る確率は小さくなるべきである。
 散乱波束を取ったのは、波束の大きさの影響を小さくするためである。
 δ (5.3)式は散乱の起る確率が、 $|\vec{x}|$ と共に指数的に小さくなることを示している。
 (5.3)式を得る際に散乱波束の広がり parameter ρ も変えているが、実はこれは ϕ のフーリエ変換で $\vec{p}=0$ の値を小さくするためである。
 波束 ϕ のフーリエ変換は、運動量の確率分布を表すが、 $\vec{p}=0$ の部分は、速度 0 の粒子に相当し、この部分は時間が増えるとも相互に離れな
 いので物理的にいって散乱を起しやういのである。全波束 ρ は運動量の平均
 値で、 ϕ の大きさが experiment の係数に入っているのもこの効果を表して
 いると考えられる。

このような結果を §1 の様の中での証明することが次の問題である。こ
 の際ポテンシャルが Q より外で 0 になるという仮定の代わりに使えるのは、
 (3.1) の $(Q_1, Q_2(x))_+$ が $\exp -m(x)$ で小さくなるということ、こ
 れは $Q_1, Q_2 \in \mathcal{O}(B)$ に対し §1 の様の中での証明である。(同様のことは (3.8)
 でも証明できる。)

参考文献 一般的には

R. Jost, The General Theory of Quantized fields, American Mathematical Soc.
 の chapter VI を参照。ただし $\mathcal{O}(B)$ の代りに fields が用いられている。
 §8 の第 1 の問題については

R. Haag and J. A. Swieca, Commun. Math. Phys. 1 (1965), 308-320.
 §8 の第 2 9 問題については
 W. Brenig and R. Haag; Fortschritte der Physik 7 (1959), 183-242.