

向井対と K3 曲面

金光 秋博*

城崎代数幾何学シンポジウム 2024 で話したことをもとに、向井対の分類や向井対から得られる K3 曲面について紹介する。詳細は準備中の論文 [Kan] を参考にしていきたい。

■**指数の大きい Fano 多様体** 滑らかな Fano 多様体 X には重要な 3 つの不変量、次元 $\dim X$ と Picard 数 ρ_X と指数 r_X がある。この報告では $\rho_X = 1$ の場合に話題を限定する。この場合、Picard 群は基本因子と呼ばれる因子 H_X によって生成されており、指数 r_X とは $-K_X = r_X H_X$ となる数のことをいうのであった。

Fano 多様体は、その指数が大きいほど、あるいは同じことであるが余指数と呼ばれる値 $c_X = \dim X + 1 - r_X$ が小さいほど、その構造が一般のものと比較して簡単であり、実際に $c_X \leq 3$ を満たす Fano 多様体の完全な分類が知られている。本稿の内容と関係する、 $c_X = 3$ の Fano 多様体で $\rho_X = 1$ のものの分類 [Muk89] を簡単に復習しよう。このような Fano 多様体は**種数**とよばれる数 g によって 10 種類に分類される。ここで種数とは $H_X^{\dim X} = 2g - 2$ を満たす数 g のことである。種数 g は 2, 3, ..., 10 あるいは 12 に値をもつ。種数 g が $g \leq 5$ であるものは、(重み付き) 射影空間内の完全交叉多様体として記述される。一方で、種数 g が $g \geq 6$ であるものは、等質空間を用いて記述される。本稿の主題と関係する種数 7 および種数 8 の Fano 多様体の記述を簡単に紹介する。

例 1 (種数 8 の Fano 多様体). 8 次元の Grassmann 多様体 $\mathrm{Gr}(2, 6)$ は、余指数 3 の Fano 多様体であって種数 8 のものを与える。この Grassmann 多様体の Plücker 埋め込み $\mathrm{Gr}(2, 6) \subset \mathbf{P}^{14}$ に関する線形切断で次元が 3 以上のものも同様に種数 8 の Fano 多様体となる。逆に、種数 8 の Fano 多様体で $\rho_X = 1$ のものはすべてこのように記述できる。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Gr}(2, 6) & \xrightarrow{\text{Plücker}} & \mathbf{P}^{14} \\ \uparrow & & \uparrow \text{線形埋め込み} \\ X & \longrightarrow & \mathbf{P}^{\dim X + 6}. \end{array}$$

城崎代数幾何学シンポジウム 2024 (京都開催) 報告。

Supported by JSPS KAKENHI Grant Numbers 23K12948.

* 東京都立大学, kanemitsu@tmu.ac.jp

例 2 (種数 7 の Fano 多様体). 10 次元ベクトル空間と, その上の非退化二次形式 q を固定し, この二次形式に関する直交 Grassmann 多様体を考える. このうち $OG(5, 10)$ は, 2 つの連結成分 $OG_{\pm}(5, 10)$ をもち, それぞれは余指数 3 の Fano 多様体であって種数 7 のものを与える. この直交 Grassmann 多様体の線形切断で, 次元が 3 以上のものとして, 種数 7 の Fano 多様体を得られる. 逆に, 種数 7 の Fano 多様体で $\rho_X = 1$ であるものはすべてこのように記述できる.

$$\begin{array}{ccc} OG_{\pm}(5, 10) & \xrightarrow{\text{半スピン埋め込み}} & \mathbf{P}^{15} \\ \uparrow & & \uparrow \text{線形埋め込み} \\ X & \longrightarrow & \mathbf{P}^{\dim X+5}. \end{array}$$

■**余指数 3 の Fano 多様体と K3 曲面** 余指数 $c_X = 3$ の Fano 多様体の分類は, K3 曲面と深く関連する. 実際, X の一般の線形切断 S で曲面であるものは K3 曲面であり, 逆に, 種数の低い一般の K3 曲面はすべてこのようにして得られるということが知られている [Muk88a].

例えば種数 8 の K3 曲面 S で一般のものは, $Gr(2, 6)$ の線形切断として得られる. $Gr(2, 6)$ の線形切断をパラメーター付けする Grassmann 多様体 $Gr(9, 15)$, あるいは, それを $Gr(2, 6)$ の自己同型群である $PGL(6)$ で割ったもの $Gr(9, 15)/PGL(6)$ を考えよう. この空間から, 種数 8 の K3 曲面のモジュライ $\mathcal{F}_8$ へ写像が誘導されるが, この写像は稠密部分集合への単射である:

$$Gr(9, 15)/PGL(6) \hookrightarrow \mathcal{F}_8.$$

同様に, 種数 7 の K3 曲面 S で一般のものは, $OG_+(5, 10)$ の線形切断として得られる. $OG_+(5, 10)$ の線形切断をパラメーター付けする Grassmann 多様体 $Gr(8, 16)$ や, それを $OG_+(5, 10)$ の自己同型群である $PSO(10)$ で割ったもの $Gr(8, 16)/PSO(10)$ を考えよう. この空間から, 種数 7 の K3 曲面のモジュライ $\mathcal{F}_7$ へ写像が誘導されるが, この写像も稠密部分集合への単射である:

$$Gr(8, 16)/PSO(10) \hookrightarrow \mathcal{F}_7$$

■**向井対の定義** シンポジウムでは, 上述の Fano 多様体を用いた K3 曲面の記述の類似を, 向井対の場合に考えた.

まず向井対の定義を復習する [Muk88b]. 滑らかな射影代数多様体 X とベクトル束 E の対が**向井対**であるとは E が豊富であり, $c_1(X) = c_1(E)$ を満たすときをいうのであった. 条件 $c_1(X) = c_1(E)$ は $-K_X = \det E$ ということと同じである. 豊富ベクトル束 E の $\det E$ は再び豊富であるから X は Fano 多様体であることが従う.

逆に X を Fano 多様体とし, その指数を r_X とすると $E := \mathcal{O}(H_X)^{\oplus r_X}$ と定めることで向井対 (X, E) を得る. したがって向井対は Fano 多様体のある種の一般化とみなすことができる. この観点からみると, 向井対 (X, E) に対して与えられる不変量 $\text{rank } E$ は, Fano 多様体の

不変量 r_X の一般化とみなせる. Fano 多様体のときと同じように, $\text{rank } E \leq \dim X + 1$ が成り立つことが知られており, 向井対の余階数を $c_{(X,E)} = \dim X + 1 - \text{rank } E$ として定める.

■余階数 3 の向井対 向井対は元々 [Muk88b] において, 指数の大きい Fano 多様体の分類問題との関係の中で導入されていた. 余指数 $c_X \leq 3$ をみたす Fano 多様体が分類されているように, 現在までに $c_{(X,E)} \leq 3$ を満たす向井対も分類されている. ここでは, $c_{(X,E)} = 3$ かつ $\rho_X = 1$ を満たすもので「極大」な場合の分類をまず復習する (注意 4 を見よ):

定理 3 ([Kan19a, Kan19b]). $c_{(X,E)} = 3$ かつ $\rho_X = 1$ を満たす向井対は次の対から「線形切断」を取ることで得られる.

- (1) $(\mathbf{Q}^6, \mathcal{S}(1))$.
- (2) $(\mathbf{Q}^6, \mathcal{G}(1) \oplus \mathcal{O}(1))$.
- (3) $(\text{Gr}(2, 5), \mathcal{K}^\vee(1) \oplus \mathcal{O}(1)^{\oplus 2})$.
- (4) $(\text{Gr}(2, 5), \mathcal{Q}(1) \oplus \mathcal{O}(1))$.
- (5) $(W_4, p^*\mathcal{S}(1))$.

ここで

- $\mathcal{S}$ は二次超曲面 $\mathbf{Q}^n$ 上のスピノル束 (の一つ) である [Ott88].
- $\mathcal{G}$ は次のように定義される: $\mathbf{Q}^6$ は 6 次元スピン多様体 $\text{OG}(3, 7)$ と同型である. この同型のもとで $\mathcal{G} \simeq \mathcal{K}^\vee$ (普遍束の双対) である (Ottaviani 束と呼んでいる [Ott88]).
- $\mathcal{Q}$ や $\mathcal{K}$ は Grassmann 多様体上の普遍商束, 普遍部分束である.
- W_4 は $\mathbf{Q}^4$ の $B \in |\mathcal{O}(2)|$ で分岐する二重被覆 $p: W_4 \rightarrow \mathbf{Q}^4$ として得られる指数 2 の 4 次元 Fano 多様体である (4 次 del Pezzo 多様体).

注意 4. $(\mathbf{Q}^6, \mathcal{G}(1) \oplus \mathcal{O}(1))$ という対はベクトル束 E が直線束 $\mathcal{O}(1)$ を直和因子にもつ. ここから超平面切断を取ることで $(\mathbf{Q}^5, \mathcal{G}(1))$ という向井対が得られる. このようにして得られるものがすべてである, というのが定理中の “「線形切断」を取ることで得られる” という記述の意味である.

■余階数 3 の向井対と K3 曲面 $c_X = 3$ の Fano 多様体の場合と同様に, $c_{(X,E)} = 3$ をみたす向井対もまた K3 曲面に関連する. 実際 $s \in H^0(E)$ を一般の切断とすると, その零点集合 $(s)_0$ は K3 曲面である (また逆も従う [Lan96, Corollary 1.3]). したがって (余指数 3 の Fano 多様体から得られる K3 曲面の場合と同様に) 次のようなモジュライ写像が得られる:

$$\varphi: U/G \rightarrow \mathcal{F}_g$$

ここで $U \subset H^0(E)$ は $\{s \in H^0(E) \mid (s)_0 \text{ は滑らかな K3 曲面}\}$ として定義される開集合であり、また G は (X, E) の自己同型群である。つまり $(g, \psi) \in G$ は自己同型 $g: X \rightarrow X$ と同型 $\psi: g^*E \rightarrow E$ の対である。偏極 K3 曲面のモジュライ $\mathcal{F}_g$ は次の部分集合を含む:

$$\mathcal{F}_g^0 := \{[S] \in \mathcal{F}_g \mid S \text{ は余指数 3 かつ Picard 数 1 の Fano 多様体の切断として書ける}\}$$

向井の結果から、例えば $g = 7, 8$ の場合には、 $\mathcal{F}_g^0$ は $\text{Gr}(2, 6)$ や $\text{OG}_+(5, 10)$ の切断として書ける K3 曲面全体のなす稠密部分集合に一致する。

城崎シンポジウムではこの写像 φ の構造について、現在までにわかったことを紹介した。

定理 5. (X, E) を定理 3 の向井対であって、(5) 以外のものとする。このとき次が成り立つ。

- (1) $\text{Im } \varphi = \mathcal{F}_g^0$ である。
- (2) φ のファイバー F は表 1 のようになる。ファイバー F の詳細な記述は例 7 や例 8 で与える。

表 1 向井対と K3 曲面

X	E	g	$\dim U/G$	ファイバー F
$\mathbf{Q}^6$	$\mathcal{S}(1)$	7	$27 = 19 + 8$	$\mathbf{Q}^8 \setminus (D \in \mathcal{O}(4))$
$\mathbf{Q}^6$	$\mathcal{G}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$	7	$26 = 19 + 7$	$\mathbf{P}^7 \setminus \text{Sec}(S)$
$\text{Gr}(2, 5)$	$\mathcal{K}^\vee(1) \oplus \mathcal{O}(1)^{\oplus 2}$	7	$21 = 19 + 2$	$S^\vee$ (種数 7 の K3 曲面の双対)
$\text{Gr}(2, 5)$	$\mathcal{Q}(1) \oplus \mathcal{O}(1)$	8	$24 = 19 + 5$	$\mathbf{P}^5 \setminus (\text{K3 scroll})$

注意 6. 定理 5 の結果は、部分的にはすでに知られている。[IMOU20] においては、(1) の向井対について、 φ が支配的となることが示されている。また [Muk06] や [KR22] では (2), (3) の向井対について、 φ が支配的であることやその一般ファイバーが F と双有理であることが示されている。定理は、(この 3 つの場合については) これらの結果の精密化とみることもできる。証明手法は [IMOU20] やそこで使われている命題 [IIM19, Proposition 4.1] に依る。

■ファイバーの記述 定理 5 に現れるファイバー F の記述を与えておく。

例 7. S を種数 7 の K3 曲面であって、 $\mathcal{F}_7^0$ に属するものとする。向井の定理から S は 10 次元直交 Grassmann 多様体 $\text{OG}_\pm(5, 10)$ の連結成分のひとつ $\text{OG}_+(5, 10)$ の部分多様体となる。

$\text{OG}_+(5, 10)$ は半スピン表現によって $\mathbf{P}^{15}$ に埋め込まれ, S はその線形切断になっている.

$$\begin{array}{ccc} \text{OG}_+(5, 10) & \xrightarrow{\text{半スピン埋め込み}} & \mathbf{P}^{15} \\ \uparrow & & \uparrow \text{線形埋め込み} \\ S & \longrightarrow & \mathbf{P}^7. \end{array}$$

とくに, S は 16 次元のスピン表現 V_+ の 8 次元部分空間 $W_8 \subset V_+$ を定めている.

- (1) 直交 Grassmann 多様体 $\text{OG}(1, 10)$ を考えよう. この多様体は定義から二次超曲面 $\mathbf{Q}^8$ である. $\mathbf{Q}^8$ 上には, 半スピン表現に対応して 2 つの階数 8 のベクトル束 $\mathcal{S}_\pm$ があった (スピノル束 [Ott88]). ここでは $H^0(\mathcal{S}_\pm) \simeq V_\pm$ がそれぞれ 16 次元半スピン表現となるようにスピノル束 $\mathcal{S}_\pm$ を定義する. K3 曲面 S を定める 8 次元部分空間 $W_8 \subset V_+$ は $\mathbf{Q}^8$ 上のベクトル束の間の射 $\mathcal{O}^{\oplus 8} \rightarrow \mathcal{S}_+$ を定める. この写像の外積を取ることで $\mathcal{O} \rightarrow \mathcal{O}(4)$ という射を得る. この射の定める因子が $D \in |\mathcal{O}(4)|$ である.
- (2) $S \subset \mathbf{P}^7$ という埋め込みに関する secant 多様体が $\text{Sec}(S)$ である.
- (3) V_+ と V_- は互いに双対の関係であったことに注意せよ. したがって S の定める 8 次元部分空間 $W_8 \subset V_+$ は, その双対を取ることで, V_- の 8 次元部分空間 $W'_8 \subset V_-$ を定める. この 8 次元部分空間 $W'_8 \subset V_-$ が定める $\text{OG}_-(5, 10) \subset \mathbf{P}^{15}$ の線形切断は再び $g = 7$ の K3 曲面であり, これを $S^\vee$ と書いている.

例 8. S を種数 8 の K3 曲面であって, $\mathcal{F}_8^0$ に属するものとする. S は 8 次元 Grassmann 多様体 $\text{Gr}(2, 6)$ の部分多様体となる. $\text{Gr}(2, 6)$ は $\mathbf{P}^{14}$ に埋め込まれ, S はその線形切断になっているのであった.

$$\begin{array}{ccc} \text{Gr}(2, 6) & \xrightarrow{\text{Plücker}} & \mathbf{P}^{14} \\ \uparrow & & \uparrow \text{線形埋め込み} \\ S & \longrightarrow & \mathbf{P}^8. \end{array}$$

$\text{Gr}(2, 6)$ に含まれる $\mathbf{P}^4$ は $\text{Gr}(1, 6) \simeq \mathbf{P}^5$ によってパラメーター付けされている. また旗多様体 $\text{Fl}(1, 2; 6)$ を考えることで次の普遍族が得られる:

$$\begin{array}{ccc} & \text{Fl}(1, 2; 6) & \\ p_1 \swarrow & & \searrow p_2 \\ \text{Gr}(1, 6) \simeq \mathbf{P}^5 & & \text{Gr}(2, 6). \end{array}$$

$V = p_1(p_2^{-1}(S))$ と定めると, これは K3 曲面上の $\mathbf{P}^1$ 束の像となっている. 表 1 に現れる K3 scroll とはこの V のことである. $\mathbf{P}^5$ 内の 3 次元の scroll は Ottaviani によって分類されており, 4 種類あることが知られている [Ott92]. この V はそのうちの一つである.

参考文献

- [IIM19] Daisuke Inoue, Atsushi Ito, and Makoto Miura. Complete intersection Calabi-Yau manifolds with respect to homogeneous vector bundles on Grassmannians. *Math. Z.*, Vol. 292, No. 1-2, pp. 677–703, 2019.
- [IMOU20] Atsushi Ito, Makoto Miura, Shinnosuke Okawa, and Kazushi Ueda. Derived equivalence and Grothendieck ring of varieties: the case of K3 surfaces of degree 12 and abelian varieties. *Selecta Math. (N.S.)*, Vol. 26, No. 3, pp. Paper No. 38, 27, 2020.
- [Kan] Akihiro Kanemitsu. K3 surfaces from Mukai pairs of corank 3. In preparation.
- [Kan19a] Akihiro Kanemitsu. Classification of Mukai pairs with corank 3. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, Vol. 69, No. 1, pp. 231–282, 2019.
- [Kan19b] Akihiro Kanemitsu. Classification of Mukai pairs with dimension 4 and rank 2. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 372, No. 9, pp. 6629–6653, 2019.
- [KR22] Michał Kapustka and Marco Rampazzo. Mukai duality via roofs of projective bundles. *Bull. Lond. Math. Soc.*, Vol. 54, No. 2, pp. 694–717, 2022.
- [Lan96] Antonio Lanteri. Ample vector bundles with sections vanishing on surfaces of Kodaira dimension zero. *Matematiche (Catania)*, Vol. 51, No. suppl., pp. 115–125 (1997), 1996.
- [Muk88a] Shigeru Mukai. Curves, K3 surfaces and Fano 3-folds of genus ≤ 10 . In *Algebraic geometry and commutative algebra, Vol. I*, pp. 357–377. Kinokuniya, Tokyo, 1988.
- [Muk88b] Shigeru Mukai. Problems on characterization of the complex projective space. In *Birational Geometry of Algebraic Varieties, Open Problems, Katata*, pp. 57–60. the 23rd Int’l Symp., Taniguchi Foundation, 1988.
- [Muk89] Shigeru Mukai. Biregular classification of Fano 3-folds and Fano manifolds of coindex 3. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, Vol. 86, No. 9, pp. 3000–3002, 1989.
- [Muk06] Shigeru Mukai. Polarized K3 surfaces of genus thirteen. In *Moduli spaces and arithmetic geometry*, Vol. 45 of *Adv. Stud. Pure Math.*, pp. 315–326. Math. Soc. Japan, Tokyo, 2006.
- [Ott88] Giorgio Ottaviani. Spinor bundles on quadrics. *Trans. Amer. Math. Soc.*, Vol. 307, No. 1, pp. 301–316, 1988.
- [Ott92] Giorgio Ottaviani. On 3-folds in $\mathbf{P}^5$ which are scrolls. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, Vol. 19, No. 3, pp. 451–471, 1992.