

James 定数の Radon 平面における評価

水口 洋康

千葉工業大学 新習志野教務課 学生サポートセンター

hiroyasu.mizuguchi@p.chibakoudai.jp

1 Introduction

ノルム空間の幾何学的構造に関連し多くの幾何学的定数が広く研究されている. ノルム空間を X , 単位球面を S_X と表す. 広く研究されている幾何学的定数の 1 つに James 定数がある ([8]):

$$J(X) = \sup\{\min\{\|x + y\|, \|x - y\|\} : x, y \in S_X\}.$$

James 定数は空間の単位球面の四角さを表し, 以下の性質を備えている.

- (i) 任意のノルム空間 X に対し, $\sqrt{2} \leq J(X) \leq 2$ ([8]).
- (ii) $J(X) < 2$ は, 空間 X が uniformly non-square である事と同値である. なお空間 X が uniformly non-square であるとは, ある $\delta > 0$ が存在し, $x, y \in S_X$ かつ $\|x - y\| \geq 2(1 - \delta)$ ならば $\|x + y\| \leq 2(1 - \delta)$ となる事を言う.
- (iii) X が内積空間ならば $J(X) = \sqrt{2}$. 更に, $\dim X \geq 3$ であるノルム空間 X に対して $J(X) = \sqrt{2}$ は X が内積空間である事と同値である.

この内積空間の特徴付けにおいて, 仮定 $\dim X \geq 3$ は除外できない. $J(X) = \sqrt{2}$ を満たす 2 次元ノルム空間については [14, 15] などで研究されている,

内積空間では内積を用いて 2 元の直交が定義され多くの研究者により研究されている. ノルム空間には内積が存在するとは限らないが, ノルムに関する等式や不等式を用いてノルム空間に拡張された直交が複数定義されている.

Definition 1. ノルム空間 X の元 x, y に対し,

x が y に Birkhoff 直交する ($x \perp_B y$ と表記) とは, 任意の実数 λ に対して $\|x\| \leq \|x + \lambda y\|$ が成り立つ事を ([5]),

x が y に Isosceles 直交する ($x \perp_I y$ と表記) とは, $\|x + y\| = \|x - y\|$ が成り立つ事を言う ([9]).

拡張された直交の概念についても幅広く研究が行われている ([1] 等を参照).

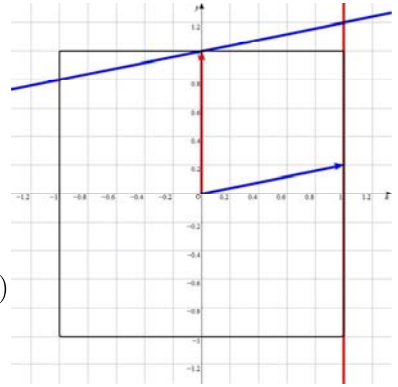
とある直交 $\perp$ が $x \perp y \Rightarrow y \perp x$ を満たすとき, $\perp$ は symmetric であると言われる. 内積空間における通常の直交は symmetric であり, 定義からノルム空間における Isosceles 直交も symmetric である. 一方, Birkhoff 直交は必ずしも symmetric ではない.

Theorem 2 ([5, 7, 10]). X をノルム空間とする. $\dim X \geq 3$ ならば次は同値:

- (1) X が内積空間.
- (2) X において Birkhoff 直交が symmetric である

この特徴付けにおいても仮定 $\dim X \geq 3$ は除外できない. Birkhoff 直交が symmetric になる 2 次元ノルム空間は Radon 平面と呼ばれている ([7, 16, 17]).

Example 3. 実 2 次元空間に $\|(a, b)\| = \max\{|a|, |b|\}$ でノルムを与えた ℓ_∞^2 を考えると, 任意の $s \in (0, 1)$ に対し $u_s = (1, s)$ は $e_2 = (0, 1)$ に Birkhoff 直交する. しかし e_2 は u_s に Birkhoff 直交していない.

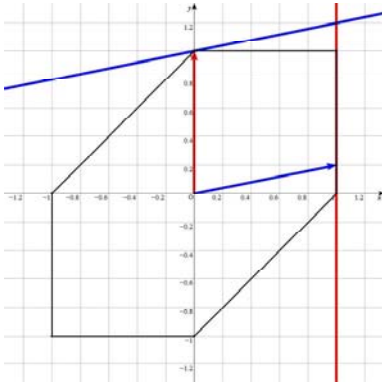


$$\begin{aligned} u_s \perp_B e_2 & \quad (\|u_s\| \leq \|u_s + \lambda e_2\| \text{ for all } \lambda \in \mathbb{R}), \\ e_2 \not\perp_B u_s & \quad (\|e_2 + \lambda u_s\| < \|e_2\| \text{ for } \lambda \in (-1, 0)) \\ & \text{in } \ell_\infty^2 \end{aligned}$$

一方,

$$\|(a, b)\|_{\infty, 1} = \begin{cases} \max\{|a|, |b|\} & (ab \geq 0), \\ |a| + |b| & (ab \leq 0). \end{cases}$$

でノルムを与えた Radon 平面 $\ell_{\infty, 1}^2$ では u_s と e_2 が互いに Birkhoff 直交する.



$$\begin{aligned} u_s \perp_B e_2 & \quad (\|u_s\| \leq \|u_s + \lambda e_2\| \text{ for all } \lambda \in \mathbb{R}), \\ e_2 \perp_B u_s & \quad (\|e_2\| \leq \|e_2 + \lambda u_s\| \text{ for all } \lambda \in \mathbb{R}) \\ & \text{in } \ell_{\infty, 1}^2 \end{aligned}$$

ここでは, Radon 平面における James 定数の値を考える. なお, James 定数は Isosceles 直交を用いて

$$J(X) = \sup\{\|x + y\| : x, y \in S_X, x \perp_I y\}$$

と表現される.

2 Preliminaries

今回の主結果を得るためにノルム空間に一般化された sine function を利用する. 内積空間 H では 0 でない 2 つの元 $x, y \in H$ に対し

$$s(x, y) = \sqrt{1 - \frac{\langle x, y \rangle^2}{\|x\|^2 \|y\|^2}}$$

で sine function が定義される. こうして定義される sine function は $x, y \in S_H$ に対し

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} \|x + ty\|$$

と一致している. このことを基に, V. Balestro, H. Martini and R. Teixeira [3] は一般的な 2 次元ノルム空間での sine function を定義した:

Definition 4 ([3, 27]). X を 2 次元ノルム空間とする. *sine function* $s : S_X \times S_X \rightarrow \mathbb{R}$ を

$$s(x, y) = \inf_{t \in \mathbb{R}} \|x + ty\|$$

で定義する.

0 でない 2 つの元 $x, y \in X$ に対しては,

$$s(x, y) = s\left(\frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|}\right)$$

で sine function を定義する. V. Balestro, H. Martini and R. Teixeira [3] は non-degenerate symplectic bilinear form や antinorm の概念と組み合わせて sine function を研究し複数の結果を与えている. 例えば sine function を用いて Radon 平面が特徴付けられている:

Proposition 5 ([3]). 2 次元ノルム空間 X が Radon 平面である事は, その空間における *sine function* が *symmetric* である事と同値. ここで, *sine function* が *symmetric* であるとは, 任意の $x, y \in X \setminus 0$ に対し $s(x, y) = s(y, x)$ が成り立つ事を言う.

主結果を得るに当たり, Radon 平面における正弦定理が有用である:

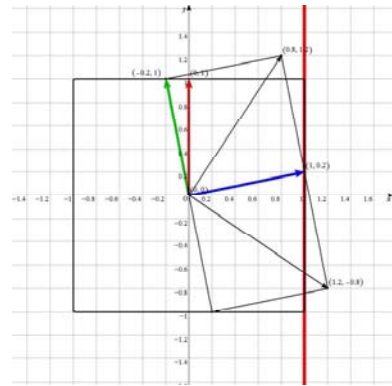
Theorem 6 (Law of Sines [3]). X を Radon 平面とし, $x, y, z \in S_X$ は同一直線上にないとする. このとき, 三角形 Δxyz において

$$\frac{\|x - y\|}{s(x - z, y - z)} = \frac{\|y - z\|}{s(y - x, z - x)} = \frac{\|z - x\|}{s(z - y, x - y)}$$

が成立する.

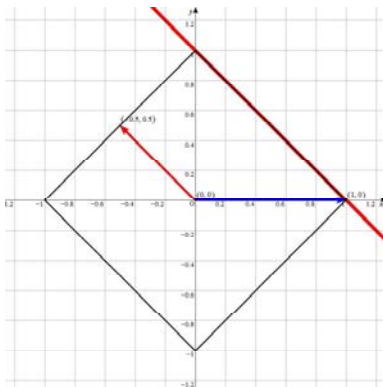
また, Radon 平面における Birkhoff 直交 $\perp_B$ と Isosceles 直交 $\perp_I$ の違いも利用する. 内積空間 H においては, 内積を用いた通常の直交と Isosceles 直交と Birkhoff 直交は全てが互いに同値である ([2]). しかし, 一般のノルム空間ではそうではない.

Example 7. ℓ_∞^2 においても $e_1 = (1, 0)$ と $e_2 = (0, 1)$ は互いに *isosceles* 直交, *Birkhoff* 直交している. しかし, 任意の $s \in (0, 1)$ に対し $u_s = (1, s)$ は $v_s = (-s, 1)$ と *isosceles* 直交するが, v_s には *Birkhoff* 直交しておらず, e_2 に *Birkhoff* 直交する.

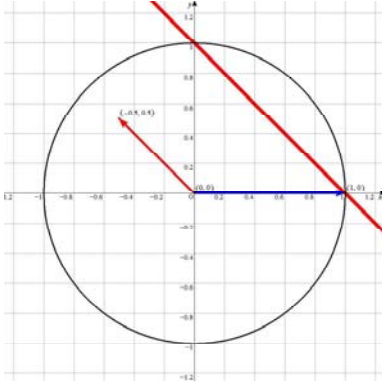


$$\begin{aligned} u_s &\perp_I v_s \quad (\|u_s + v_s\| = \|u_s - v_s\|), \\ u_s &\perp_B e_2 \quad (\|u_s\| \leq \|u_s + \lambda e_2\| \text{ for all } \lambda \in \mathbb{R}) \\ &\text{in } \ell_\infty^2 \end{aligned}$$

また, $\|(a, b)\|_1 = |a| + |b|$ で定められるノルムを持つ ℓ_1^2 では e_1 が $w = (-0.5, 0.5)$ に *Birkhoff* 直交するが, $\|(a, b)\|_2 = (|a|^2 + |b|^2)^{1/2}$ でノルムを与えた ℓ_2^2 では e_1 は w に *Birkhoff* 直交しない.



$$\begin{aligned} e_1 &\perp_B w \\ (\|e_1\| &\leq \|e_1 + \lambda w\| \text{ for all } \lambda \in \mathbb{R}) \\ &\text{in } \ell_1^2 \end{aligned}$$



$$e_1 \not\perp_B w \\ (\|e_1 + \lambda w\| < \|e_1\| \text{ for } \lambda \in (0, 2)) \\ \text{in } \ell_2^2$$

このように、一般のノルム空間 X に拡張された直交概念はそれぞれ同値ではなく、更に拡張された直交は空間 X のノルムに依存する。そこで直交の違いを各空間で計量する定数が複数定義研究されている。

$$D(X) = \inf \left\{ \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \|x + \lambda y\| : x, y \in S_X, x \perp_I y \right\},$$

$$D'(X) = \sup \{ \|x + y\| - \|x - y\| : x, y \in S_X, x \perp_B y \},$$

$$BR(X) = \sup \left\{ \frac{\|x + y\| - \|x - y\|}{\|y\|} : x, y \in X, x, y \neq 0, x \perp_B y \right\},$$

$$BI(X) = \sup \left\{ \frac{\|x + y\| - \|x - y\|}{\|x\|} : x, y \in X, x, y \neq 0, x \perp_B y \right\},$$

$$IB(X) = \inf \left\{ \frac{\inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \|x + \lambda y\|}{\|x\|} : x, y \in X, x, y \neq 0, x \perp_I y \right\}$$

([13, 22, 25] 等を参照)。

ここでは $IB(X)$ を利用する。一般に $1/2 \leq IB(X) \leq 1$ が成立し、 $IB(X) = 1$ は空間 X が内積を持っている事と同値である。また Dunkl-Williams 定数 [12]

$$DW(X) = \sup \left\{ \frac{\|x\| + \|y\|}{\|x - y\|} \left\| \frac{x}{\|x\|} - \frac{y}{\|y\|} \right\| : 0 \neq x, y \in X, x \neq y \right\}$$

との間に等式 $IB(X)DW(X) = 2$ が成立するので、 $1/2 < IB(X)$ は空間 X が uniformly non-square である事と同値である。Radon 平面における $IB(X)$ の値に関し次が得られている：

Theorem 8 ([23]). X を Radon 平面とする。このとき $8/9 \leq IB(X) \leq 1$.

Proposition 9 ([23]). X を Radon 平面とする。このとき、 $IB(X) = 8/9$ は単位球が affine regular hexagon である事と同値である。

3 Results

Isosceles 直交する $x, y \in S_X$ を取り $z = -x$ として Radon 平面における正弦定理を適用すると

$$\frac{\|x - y\|}{s(x, x + y)} = \frac{\|x + y\|}{s(x - y, x)} = \frac{2}{s(x + y, x - y)} \leq \frac{2}{IB(X)}$$

を得る事が出来る. 更に Radon 平面において sine function は symmetric なので

$$s(x, x + y) = s(x + y, x) = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \left\| \frac{x + y}{\|x + y\|} + \lambda x \right\| \leq (\|x + y\|)^{-1}.$$

こうして次の定理が得られた:

Theorem 10 ([24]). X を Radon 平面とする. このとき, $\sqrt{2} \leq J(X) \leq 3/2$.

また下記も成り立つ:

Theorem 11 ([24]). X を Radon 平面とする. このとき, $J(X) = 3/2$ は単位球が *affine regular hexagon* である事と同値である.

Remark 12. 先述の通り [14, 15] 等で $J(X) = \sqrt{2}$ を満たす 2 次元空間が研究されているほか, p -ノルムを与えた 2 次元空間 ℓ_p^2 の James 定数が p の値に応じ連続的に変化する等, Radon 平面ではないが $J(X) \leq 3/2$ を満たす 2 次元空間も存在する.

また, [24] ではとある Radon 平面の class における James 定数の明確な値も得られた.

4 In a practical class of Radon planes

2 次元ノルム空間とその共役空間の単位球面を連結することで Radon 平面を形成できる ([7, 16, 17]) ので, $\mathbb{R}^2$ 上 absolute normalized ノルムと対応する凸関数により無数の Radon を考える事ができる.

実 2 次元空間 $\mathbb{R}^2$ 上のノルム $\|\cdot\|$ が absolute であるとは, 任意の $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ に対し $\|(a, b)\| = \|(|a|, |b|)\|$ が成り立つ事を, normalized であるとは $\|(1, 0)\| = \|(0, 1)\| = 1$ を言う. 具体例として,

$$\|(a, b)\|_p = \begin{cases} (|a|^p + |b|^p)^{\frac{1}{p}} & (1 \leq p < \infty), \\ \max\{|a|, |b|\} & (p = \infty). \end{cases}$$

は absolute normalized ノルムである. absolute normalized ノルム $\|\cdot\|$ は, $\psi(t) = \|(1-t, t)\|$ 及び

$$\|(a, b)\| = \begin{cases} (|a| + |b|)\psi\left(\frac{|b|}{|a| + |b|}\right) & ((a, b) \neq (0, 0)), \\ 0 & ((a, b) = (0, 0)) \end{cases}$$

の関係式により,

$$\psi(0) = \psi(1) = 1, \quad \max\{1-t, t\} \leq \psi(t) \leq 1 \quad (\forall t \in [0, 1])$$

を満たす $[0, 1]$ 上の連続凸関数 ψ と一対一に対応する $([6, 26])$. $\mathbb{R}^2$ 上の absolute normalized ノルム全体を AN_2 ,

$$\psi(0) = \psi(1) = 1, \quad \max\{1-t, t\} \leq \psi(t) \leq 1 \quad (\forall t \in [0, 1])$$

を満たす $[0, 1]$ 上の連続凸関数全体を Ψ_2 と表記する. また $\psi \in \Psi_2$ と対応している absolute normalized ノルムを $\|\cdot\|_\psi$ と, そのノルムを持つ $\mathbb{R}^2$ を ℓ_ψ^2 と表す.

$\psi \in \Psi_2$ に対し dual function ψ^* を

$$\psi^*(s) = \sup \left\{ \frac{st + (1-s)(1-t)}{\psi(t)} : t \in [0, 1] \right\}, \quad \forall s \in [0, 1]$$

で定義する. このとき $\psi^* \in \Psi_2$ であり, $\|\cdot\|_{\psi^*}$ は $\|\cdot\|_\psi$ の dual ノルムになる, つまり $(\ell_\psi^2)^*$ は $\ell_{\psi^*}^2$ と等距離同型である $([18, 19, 20])$. また $\tilde{\psi}(t) = \psi(1-t)$ とする. $\tilde{\psi}^* = (\tilde{\psi})^*$ であるので $\tilde{\psi}^*$ と表記する.

$\psi, \varphi \in \Psi_2$ に対し,

$$\|(a, b)\|_{\psi, \varphi} = \begin{cases} \|(a, b)\|_\psi & (ab \geq 0) \\ \|(a, b)\|_\varphi & (ab \leq 0) \end{cases}$$

でノルムを与えた $\mathbb{R}^2$ を Day-James 空間 $\ell_{\psi, \varphi}^2$ と表現する. Day-James 空間 $\ell_{\psi, \tilde{\psi}^*}^2$ が Radon 平面となる.

$\beta \in [1/2, 1]$ に対し $k_\beta = (1-\beta)/\beta$ とし, $\psi_\beta = \max\{\beta, 1-t, t\}$ とする. 対応する absolute normalized ノルムは

$$\|(a, b)\|_{\psi_\beta} = \begin{cases} |a| & (|b| \leq k_\beta |a|), \\ \beta(|a| + |b|) & (k_\beta |a| \leq |b| \leq k_\beta^{-1} |a|), \\ |b| & (|a| \leq k_\beta |b|). \end{cases}$$

となる. dual function を計算すると

Lemma 13 ([21]). $\beta \in [1/2, 1]$ に対し, ψ_β の dual function ψ_β^* は

$$\psi_\beta^*(s) = \begin{cases} (1-s) + k_\beta s & (0 \leq s \leq 1/2), \\ k_\beta(1-s) + s & (1/2 \leq s \leq 1). \end{cases}$$

で与えられる.

Proof. $s, t \in [0, 1]$ に対し

$$f(s, t) = \frac{st + (1-s)(1-t)}{\psi_\beta(t)}$$

とすると, 任意の $s \in [0, 1]$ に対し $\psi_\beta^*(s) = \max_{t \in [0, 1]} f(s, t)$ である.
 $0 \leq t \leq 1 - \beta$ のとき, $\psi_\beta(t) = 1 - t$ であるから,

$$f(s, t) = \frac{1-s+(2s-1)t}{1-t} = -(2s-1) + \frac{s}{1-t}$$

と変形でき, $f(s, t)$ は t に関し増加する.

$1 - \beta \leq t \leq \beta$ ならば,

$$f(s, t) = \frac{1-s+(2s-1)t}{\beta}$$

なので, $f(s, t)$ は $s \leq 1/2$ のときに t に関し減少し, $1/2 \leq s$ のとき t に関し増加する.

$\beta \leq t \leq 1$ の場合を考えると $\psi_\beta(t) = t$ より

$$f(s, t) = \frac{1-s+(2s-1)t}{t} = (2s-1) + \frac{1-s}{t}$$

なので, $f(s, t)$ は t に関し減少する.

以上より, $s \in [0, 1/2]$ に対しては

$$\psi_\beta^*(s) = f(s, 1 - \beta) = 1 - 2s + \frac{s}{\beta} = 1 - s + k_\beta s,$$

$s \in [1/2, 1]$ に対し

$$\psi_\beta^*(s) = f(s, \beta) = 2s - 1 + \frac{1-s}{\beta} = k_\beta(1-s) + s$$

である. □

$$\|(a, b)\|_{\psi_\beta^*} = (|a| + |b|)\psi_\beta^*\left(\frac{|b|}{|a| + |b|}\right) \quad ((a, b) \neq (0, 0))$$

より

Lemma 14 ([21]). $\beta \in [1/2, 1]$ に対し, $\|\cdot\|_{\psi_\beta}$ の dual ノルムは $\|\cdot\|_{\psi_\beta^*}$ は

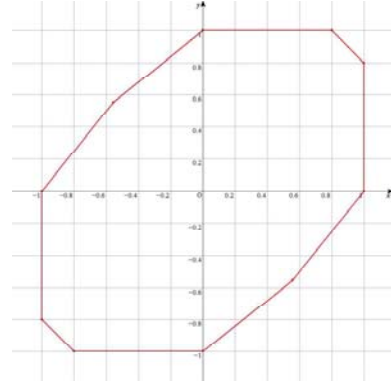
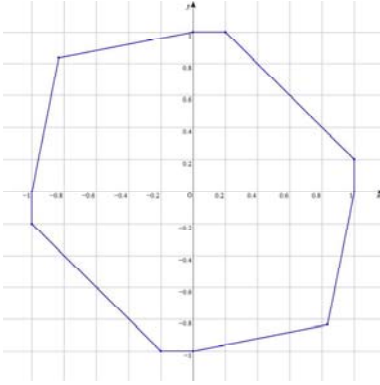
$$\|(a, b)\|_{\psi_\beta^*} = \begin{cases} |a| + k_\beta|b| & (|b| \leq |a|), \\ k_\beta|a| + |b| & (|a| \leq |b|). \end{cases}$$

で与えられる.

従って Radon 平面 $\ell_{\psi_\beta, \tilde{\psi}_\beta^*}$ は

$$\|(a, b)\|_{\psi_\beta, \tilde{\psi}_\beta^*} = \begin{cases} |a| & (ab \geq 0, |b| \leq k_\beta |a|), \\ \beta(|a| + |b|) & (ab \geq 0, k_\beta |a| \leq |b| \leq k_\beta^{-1} |a|), \\ |b| & (ab \geq 0, |a| \leq k_\beta |b|), \\ k_\beta |a| + |b| & (ab \leq 0, |a| \leq |b|), \\ |a| + k_\beta |b| & (ab \leq 0, |b| \leq |a|). \end{cases}$$

で計算されるノルムを持つ.



$\beta = 5/6, \beta = 5/9$ の場合における Radon plane $\ell_{\psi_\beta, \tilde{\psi}_\beta^*}$ の単位球面

この Radon 平面における James 定数を以下のように計算できた:

Theorem 15. $1/2 \leq \beta \leq 1$ に対し $k_\beta = (1 - \beta)/\beta$ とする. このとき Radon 平面 $\ell_{\psi_\beta, \tilde{\psi}_\beta^*}$ の James 定数は

$$J(\ell_{\psi_\beta, \tilde{\psi}_\beta^*}) = \max \left\{ \frac{1 + 2\beta^2}{2\beta}, \frac{3\beta - 2\beta^2}{1 - \beta + \beta^2}, \frac{-2 + 4\beta + \beta^2}{-1 + 2\beta + \beta^2} \right\}$$

$$= \begin{cases} \frac{1 + 2\beta^2}{2\beta} & \left(\frac{1}{2} \leq \beta < \frac{\sqrt{5} - 1}{2} \right), \\ \frac{3\beta - 2\beta^2}{1 - \beta + \beta^2} & \left(\frac{\sqrt{5} - 1}{2} \leq \beta < \frac{2}{3} \right), \\ \frac{-2 + 4\beta + \beta^2}{-1 + 2\beta + \beta^2} & \left(\frac{2}{3} \leq \beta \leq 1 \right). \end{cases}$$

Radon 平面の一例なので定理 10 より $\sqrt{2} \leq J(\ell_{\psi_\beta, \tilde{\psi}_\beta^*}) \leq 3/2$ が成り立つが, この計算結果より任意の $\beta \in [1/2, 1]$ で $\sqrt{2} < J(\ell_{\psi_\beta, \tilde{\psi}_\beta^*})$ である事, $\beta = 1/2, 1$ の場合のみ $3/2$ に一致する事が確認できる.

参考文献

- [1] J. Alonso, H. Martini and S. Wu, On Birkhoff orthogonality and isosceles orthogonality in normed linear spaces, *Aequationes Math.*, 83 (2012), 153–189.
- [2] D. Amir, *Characterization of Inner Product Spaces*, Operator Theory: Advances and Applications, 20, Birkhauser, Basel, 1986.
- [3] V. Balestro, H. Martini and R. Teixeira, Geometric properties of a sine function extendable to arbitrary normed planes, *Monatsh. Math.*, 182 (2017), 781–800.
- [4] V. Balestro, H. Martini and R. Teixeira, Geometric constants for quantifying the difference between orthogonality types, *Ann. Funct. Anal.* 7 (2016), 656–671.
- [5] G. Birkhoff, Orthogonality in linear metric spaces, *Duke Math. J.*, 1 (1935), 169–172.
- [6] F. F. Bonsall and J. Duncan, *Numerical Ranges II.*, London Math. Soc. Lecture Note Series, 10, Cambridge University Press, New York-London, 1973.
- [7] M. M. Day, Some characterization of inner-product spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 62 (1947), 320–337.
- [8] J. Gao and K.-S. Lau, On geometry of spheres in normed linear spaces, *J. Austral. Math. Soc. Ser. A* 48 (1990), 101–112.
- [9] R. C. James, Orthogonality in normed linear spaces, *Duke Math. J.*, 12 (1945), 291–302.
- [10] R. C. James, Orthogonality and linear functionals in normed linear spaces, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 61 (1947), 265–292.
- [11] R. C. James, Inner product in normed linear space, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 53 (1947), 559–566.
- [12] A. Jimenez-Melado, E. Llorens-Fuster and E. M. Mazcunan-Navarro, The Dunkl-Williams constant, convexity, smoothness and normal structure, *J. Math. Anal. Appl.*, 342 (2008), 298–310
- [13] D. Ji and S. Wu, Quantitative characterization of the difference between Birkhoff orthogonality and isosceles orthogonality, *J. Math. Anal. Appl.*, 323 (2006), 1–7.

- [14] N. Komuro, K.-S. Saito and R. Tanaka, On the class of Banach space with James constant $\sqrt{2}$ III, *Math. Inequal. Appl.*, 20 (2017), 865–887.
- [15] N. Komuro, K.-I. Mitani, K.-S. Saito, R. Tanaka and Y. Tomizawa, A comparison between James and von Neumann–Jordan constants, *Mediterr. J. Math.*, 14 (2017), Art. 168, 13p.
- [16] H. Martini and K. J. Swanepoel, The geometry of Minkowski spaces – a survey. II. , *Expo. Math.*, 22 (2004), 93–144.
- [17] H. Martini and K. J. Swanepoel, Antinorms and Radon curves, *Aequat Math.*, 72 (2006), 110–138.
- [18] K.-I. Mitani and K.-S. Saito, Dual of two dimensional Lorentz sequence spaces, *Nonlinear Anal.*, 71 (2009), 5238–5247.
- [19] K.-I. Mitani, S. Oshiro and K.-S. Saito, Smoothness of ψ -direct sums of Banach spaces, *Math. Inequal. Appl.*, 8 (2005), 147–157.
- [20] K.-I. Mitani, K.-S. Saito and T. Suzuki, Smoothness of absolute norms on C_n , *J. Convex Anal.*, 10 (2003), 89–107.
- [21] H. Mizuguchi, The Dunkl-Williams constant of symmetric octagonal norms on $\mathbb{R}^2$ II, *Nihonkai Math. J.*, 25 (2014), 151–172.
- [22] H. Mizuguchi, The constants to measure the differences between Birkhoff and isosceles orthogonalities, *Filomat*, 30 (2016), 2761–2770.
- [23] H. Mizuguchi, The differences between Birkhoff and Isosceles orthogonalities in Radon plane, *Extracta Math.*, 32 (2017), 173–208.
- [24] H. Mizuguchi, The James constant in Radon planes, submitted.
- [25] P. L. Papini and S. Wu, Measurements of differences between orthogonality types, *J. Math. Anal. Appl.*, 397 (2013) 285–291.
- [26] K.-S. Saito, M. Kato and Y. Takahashi, Von Neumann–Jordan constant of absolute normalized norms on $\mathbb{C}^2$, *J. Math. Anal. Appl.*, 244 (2000), 515–532.
- [27] T. Szostok, On a generalization of the sine function, *Glas. Mat. Ser. III* 38 (2003), 29–44.