

Higher Separating of Links

大・理 大 川 哲 介

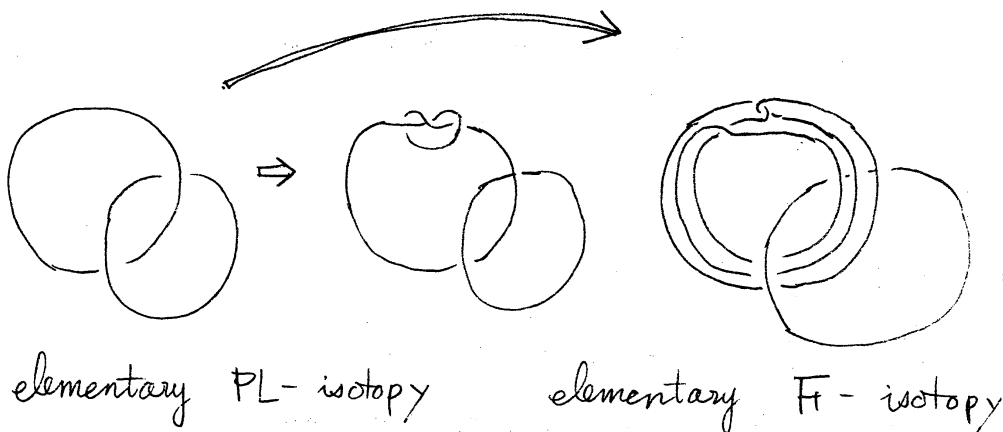
目的: knot については, ある程度分ったものとし, その上に相対的な, link の不変量・性質・同値関係等を, 調べる. 最も基本的な不変量は, linking number であり, その拡張として, Milnor μ -invariant が定義されている.

ここでは, PL-isotopy, F-isotopy, n -separability 等について考える. 主に群論的方法で不変量が定義されるので, コホモロジーとの関連は, はっきりせず, これからの問題と云える.

諸定義: 全て, S^3 内の tame な link を考える. 本論では向きは考えない. 但し各成分には 1 から μ まで (μ は成分の数) 番号がついているものとし, $L = \bigcup_{i=1}^{\mu} L_i$ の如く書表わす. (注: isotopy と云う以上は当然向きを考えているが, ここで考える invariant は, 向きによらぬという意味である)

$L = \bigcup_{i=1}^{\mu} L_i$, $L' = \bigcup_{i=1}^{\mu} L'_i$ を μ -component link とする. L の一, の成分上に局所的な knot を付加え

て, L' が得られるとき, L' は L に elementary PL-isotopic であると言ひ, その関係から得られた同値関係を PL-isotopic と言ふ. L の 1 つの成分 L_i の正則近傍を N ($N \cap L_j = \emptyset$ ($i \neq j$))) とし, $L'_j = L_j$ ($j \neq i$), $L'_i \subset \text{Int } N$, かつ L'_i の N に対する winding number は 1 であるとき, L' は L に elementary F-isotopic であると言ひ, これにより定められた同値関係を F-isotopic と言ふ. F-isotopic は, PL-isotopic を含む.



L が $(S_1, S_2, \dots, S_\mu)$ -separable であるとは, 次の条件を満たす多面体列 K_{ij} が存在することを言ふ. ($S_i \geq 0$)

- ① $K_{ij} \subset S^3$ ($i=1, \dots, \mu, j=0, 1, \dots, S_i$)
- ② $L_i = K_{i0} \subset K_{i1} \subset \dots \subset K_{iS_i}$
- ③ $K_{iS_i} \cap K_{jS_j} = \emptyset$ ($i \neq j$)
- ④ $K_{i,p} \subset K_{i,p+1}$ から導かれる 準同形 $H_1(K_{i,p}; \mathbb{Z}) \rightarrow H_1(K_{i,p+1}; \mathbb{Z})$ が零写像

$$(i=1, \dots, \mu, p=0, 1, \dots, S_i-1)$$

$(S, S, \dots, S)$ -separable を, 単に S -separable と云う.

$\mu=2$, $p+q = p'+q'$ のとき, $(p, q, p', q' \geq 0)$, (p, q) -separability と (p', q') -separability は同値であることがすぐ分る.

次に, 群系なる概念を導入する. 群 G と, $m_i, l_i \in G$ ($i=1, 2, \dots, \mu$) の組 $\mathcal{G} = (G, m_1, l_1, \dots, m_\mu, l_\mu)$ を, 群系と呼ぶ. $\mathcal{G}$ と $\mathcal{G}' = (G', m'_1, l'_1, \dots, m'_\mu, l'_\mu)$ が同値であるとは, $\exists \varphi: G \rightarrow G'$: 同型写像, $\exists a_1, \dots, \exists a_\mu \in G'$, $\varphi(m_i) = a_i^{-1} m'_i a_i$, $\varphi(l_i) = a_i^{-1} l_i a_i$ となることを云う. 群 G の降中列を $\Gamma_1 G = G$, $\Gamma_{n+1} G = [\Gamma_n G, G]$ で定める. さらに

$\mathcal{Q} X$: X で生成された部分群

$N\mathcal{Q} X$: X で生成された正規部分群

$$A \cap B = \mathcal{Q} \{ b^{-1} a b \mid a \in A, b \in B \}$$

$$A_{p\mathcal{G}} \mathcal{G} = N\mathcal{Q} \bigcup_{i=1}^{\mu} \Gamma_{\mathcal{G}}(\{m_i\}) \cap \Gamma_p N\mathcal{Q}(\{m_i\})$$

$$B_{p\mathcal{G}} \mathcal{G} = N\mathcal{Q} \bigcup_{i=1}^{\mu} \Gamma_{\mathcal{G}}(\{m_i, l_i\}) \cap \Gamma_p N\mathcal{Q}(\{m_i, l_i\})$$

$$\tilde{A}_{p\mathcal{G}} \mathcal{G} = G / A_{p\mathcal{G}} \mathcal{G}$$

$$\tilde{B}_{p\mathcal{G}} \mathcal{G} = G / B_{p\mathcal{G}} \mathcal{G}$$

$$\mathcal{G} = \{G, m, l\} \text{ に対し } C_0 \mathcal{G} = G,$$

$$C_{n+1} \mathcal{G} = [C_n \mathcal{G}, C_n \mathcal{G}] \cdot (\{m\} \cap C_n \mathcal{G})$$

一般の $\mathcal{G}$ に対して

$$C_n \mathcal{G} = \mathcal{Q} \cup_{i=1}^{\mu} C_n(G, m_i, l_i)$$

$$\tilde{C}_n \mathcal{G} = G / C_n \mathcal{G} \quad \dots \text{と定義する.}$$

link $L = \cup_{i=1}^{\mu} L_i$ が与えられたとき, それに対する群系 $\mathcal{G} = (G, m_1, l_1; m_2, l_2; \dots; m_{\mu}, l_{\mu})$ を,
 $G = \pi_1(S^3 - L)$, m_i, l_i は各々, L_i の meridian, longitude, $(m_i, l_i) = 1$ ($i=1, \dots, \mu$) として与える.
 この様な与え方は, 変換 $m_i \rightarrow m_i^{\pm 1}$, $l_i \rightarrow l_i^{\pm 1}$, 及び群系の同値を除いて一意に定まる. 初めに L を $\mathbb{R}^3$ 内の link に限ったが, 以後, 断わらぬ限り, $L \subset M^3$ (M^3 : connected 3-mf d) として考える. このとき, l_i のとり方として, L_i が M^3 で homologous to 0 のときは l_i も, $M^3 - L_i$ で homologous to 0 のものを取り, そうでない場合は, 単なる longitude を勝手に取る. 最初に述べた, PL-isotopy 等の概念は, 一般の M^3 内でも, 同様に定義出来る.

諸定理:

定理 1. L, L' を, M^3 内の link (with μ -components), それらに対する群系を, $\mathcal{G}, \mathcal{G}'$ とせよ. そのとき

i) L と L' が PL-isotopic ならば

$$\tilde{A}_{p,q} \mathcal{G} \approx \tilde{A}_{p,q} \mathcal{G}' \quad (p, q \geq 1)$$

ii) L と L' が, F-isotopic ならば,

$$\widetilde{B}_{pg} G \approx \widetilde{B}_{pg} G' \quad (p, g \geq 1)$$

(但し $\approx$ は群の同型を意味する)

定理 2. L を M^3 内の link で, L は S -separable であるとする. L の群系を $G = (G, m_1, l_1, \dots, m_\mu, l_\mu)$ とするとき, $l_i \in C_S G \quad (i=1, \dots, \mu)$

系. L を S^3 内の 2-component link, $G = (G, m_1, l_1; m_2, l_2)$ をその群系, $G' = (G, m_1, l_1)$ とす. L が $(S, 0)$ -separable ならば $l_1 \in C_S G'$

定理 1 の系. L を S^3 内の link とする. $G = \pi_1(S^3 - L)$ とするとき $G / \Gamma_p G \quad (p=1, 2, \dots)$ は L の F -isotopy-invariant である.

注意: これは Giffen の結果 (F -isotopy $\Rightarrow$ topological cobordant) Stallings の結果 ($G / \Gamma_p G$ は topological cobordism invariant) を使っても得られる. しかし, 我々の結果は $p = \infty$ (但し $\Gamma_\infty G = \bigcap_{i=1}^\infty \Gamma_p G$) でも成立する. 定理 1 も $1 \leq p, g \leq \infty$ として成立する. 証明は, 以下に述べる有限の場合と全く同様である.

定理 3. L を M^3 内の link で, M : compact とする. さらに H を有限群とするとき, $\widetilde{A}_{pg} G, \widetilde{B}_{pg} G, \widetilde{C}_p G$ から H への準同形の総数, 全写準同型の総数等は計算可能である. 但し G は, link L の群系.

固定された群 H への準同型の総数等は明らかに群の不変量であるから、これを基とし、link の $PL(F)$ -isotopy invariant となり、また S -separable でないことを判定出来る計算可能不変量となっている。ここでは有限群を値域に考えたが、有限次元線型群を考えると、準同型全体は、定義域が有限生成なら、有限次元 affine variety となり、その交差点を計算可能となるから、より効果的な不変量を得ることが出来る。以下、定理 1 の略証を与えることにする

定理 1 の略証

① $Ap_8 G$ 等の構成法より、 $\mu = 1$ 、即ち knot の場合に証明すれば、十分である。

② さらに elementary $PL(F)$ -isotopy の場合に限って良い。

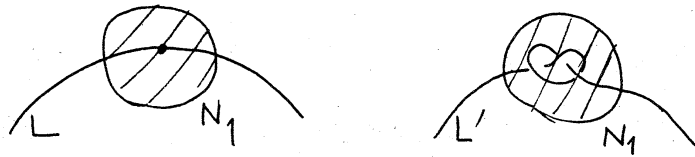
③ L' を L に elementary $PL(F)$ -isotopic な knot とする。 $G = \pi_1(M^3 - L)$, $G' = \pi_1(M^3 - L')$, $N: L$ の開正則近傍, $L' \subset \text{Int } N$ とする。すると、図式

$$M^3 - \text{Int } N \supset \partial N \subset N - L'$$

より、 $G' = \text{push out } \left\{ \begin{array}{ccc} G & \xleftarrow{\mathbb{Z}^2} & \pi_1(N - L') \end{array} \right\} \quad (1)$

が得られる。さらに PL -isotopy の場合は、 $N_1: L$ のある 1 点の十分小さな正則近傍で、 $N_1 \cap L \approx I$ かつ。これは、

N_1 の中で knot してゐないとし, $L - N_1 = L' - N_1$ とする.



すると, $\pi_1(M - L) = \pi_1(M - (L \cup N_1)) = G$ となる. 図式

$$M - L - \text{Int } N_1 \supset \partial N_1 - L \subset N_1 - L'$$

より, $G' = \text{push out } \left(G \begin{array}{c} \nwarrow \nearrow \\ \mathbb{Z} \end{array} \pi_1(N_1 - L') \right)_{(2)}$

が成立する. (1), (2) に於ける $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Z}$ は $\{m, l\}$, $\{m\}$ によつて生成された G の部分群とも見られる. 但し $G = \{G, m, l\}$ を L の群系とする. これらの図式に操作 $\tilde{A}_{\text{pg}}$, $\tilde{B}_{\text{pg}}$ を施して, 自然射 $G \rightarrow G'$ がこれらの群の同型を惹起することを云えば良い. 図式①, ②の push out 図式に現れる射を次の如く名付ける.

$$\text{①) } \begin{array}{ccc} & G' & \\ \gamma_1 \nearrow & & \nwarrow \delta_1 \\ G & & \pi_1(N - L') \\ \alpha_1 \nwarrow & \mathbb{Z}^2 & \nearrow \beta_1 \end{array} \quad \text{②) } \begin{array}{ccc} & G' & \\ \gamma_2 \nearrow & & \nwarrow \delta_2 \\ G & & \pi_1(N_1 - L') \\ \alpha_2 \nwarrow & \mathbb{Z} & \nearrow \beta_2 \end{array}$$

④ β_1, β_2 は, Abel 化群の同型を引起す.

⑤ これより, $\Gamma_2 \pi_1(N_1 - L') = \Gamma_3 \pi_1(N_1 - L') = \Gamma_4 \dots$

及び, $\Gamma_2 \pi_1(N - L') = \Gamma_3 \pi_1(N - L') = \Gamma_4 \dots$

が従う.

⑥ さらに,

$$\pi_1(N-L') \subset \{m, l\} \amalg \pi_1(N-L')$$

$$\pi_1(N_1-L') \subset \{m\} \amalg \pi_1(N_1-L')$$

⑦これらと⑤を合わせて

$$\pi_1(N-L') \subset \{m, l\} \amalg \Gamma_p \pi_1(N-L')$$

$$\pi_1(N_1-L') \subset \{m\} \amalg \Gamma_p \pi_1(N_1-L')$$

⑧さらに

$$\tilde{A}_{pg} \{ \pi_1(N_1-L'); m, l \} \approx \mathbb{Z}$$

$$\tilde{B}_{pg} \{ \pi_1(N-L'); m, l \} \approx \mathbb{Z}^2$$

と合わせて求める結果を得る.

定理2, 3の証明は略するが, 定理2の証明は本質的に同じ差えで出来る. 幾何学的には, $\{m\} \amalg \dots$ を取っていると
ころからも分る様に, meridean以外の部分をほぐす covering
を繰り返し使って link の成分を分離するところにある.

定理1では, 2回しかくり返していないが, 多重に繰り返す
ことにより, $\tilde{A}_{p_1 p_2 \dots p_n G}$, $\tilde{B}_{p_1 p_2 \dots p_n G}$ なる不変
量を得ることが出来る.