

On Embeddings of Projective Spaces

兵庫教育大学 谷口 浩朗 (Hiroaki Taniguchi)

1 はじめに

k, K を可換体とし, $P^n(k)$ を k 上の n 次元射影空間, $P^m(K)$ を K 上の m 次元射影空間とする.

定義 $n, m \geq 2$ とする. $P^n(k)$ から $P^m(K)$ への埋め込み ψ とは $P^n(k)$ から $P^m(K)$ への次の条件を満たす写像のことである.

- (1) ψ は $P^n(k)$ から $P^m(K)$ への単射である.
- (2) ψ は $P^n(k)$ の直線全体から $P^m(K)$ の直線全体への単射をみちびく, i.e. ψ は $P^n(k)$ の同一直線上にある点集合を $P^m(K)$ の同一直線上にある点集合に写し, また $P^n(k)$ の同一直線上にない点集合を $P^m(K)$ の同一直線上にない点集合に写す.

ここでは次の結果について解説する.

定理 1 $n \geq 3$ とする. K を k の巡回拡大とし $\dim_k K \geq n+1$ とする. σ を k 上 K のガロア群の生成元とし, $e_0, e_1, \dots, e_n, \dots$ を K の k 上の基底とする.

$\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in P^n(k)$ に対して, $a_\lambda = \lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ とし, 写像 ψ を次のように定める

$$\psi: P^n(k) \ni (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \rightarrow (a_\lambda, a_\lambda^\sigma, a_\lambda^{\sigma^2}) \in P^2(K).$$

このとき ψ は埋め込みになっている.

定理 2 $n \geq 3$ とする. もし $P^n(k)$ が $P^2(K)$ に埋め込まれるならば, k は K の部分体で, $\dim_k K \geq n+1$ である.

射影空間の埋め込みは arcs や caps の研究において調べられてきた. Thas [5] はアフィン空間の自明でない埋め込みを構成した. 1981 年には, Limbos [1] が射影空間の埋め込みを特徴づけた. [2] において, Limbos は もし k, K が有限体で $n \geq 3$ であれば, $P^n(k)$ が $P^{n-1}(K)$ に埋め込めるための必要十分条件は $\dim_k K \geq 4$ であることを示した. さらに, Limbos は もし $n \geq 4$ かつ $\dim_k K = n^2 - 1$ または 4^{n-2} , または $n = 3$ かつ $\dim_k K \geq 4$ であれば $P^n(k)$ は $P^2(K)$ に埋め込めることを示した. [3] において, 丸田氏は, $n \geq 3$ で k の位数が 2 という仮定の下で, $P^n(k)$ が $P^2(K)$ に埋め込めるための必要十分条件は $\dim_k K \geq n + 1$ であることを示した.

定理 1, 定理 2 はこの結果の拡張になっている.

2 定理 1 の証明

$\lambda = (\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \in P^n(k)$ に対して, $a_\lambda = \lambda_0 e_0 + \lambda_1 e_1 + \dots + \lambda_n e_n$ は K の零でない元である.

さて, ψ が well defined であり ψ によって $P^n(k)$ の一直線上にある点集合が $P^2(K)$ の一直線上にある点集合に写ることは明らかなので, 定理 1 を証明するためには, 次のことを証明すれば十分である.

(1) ψ は単射である.

(2) ψ は $P^n(k)$ の同一直線上にはない点集合を $P^2(K)$ の同一直線上にはない点集合に写す.

(1) の証明. $(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n)$ and $(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n) \in P^n(k)$ とする. $a = \lambda_0 e_0 + \dots + \lambda_n e_n$, $b = \mu_0 e_0 + \dots + \mu_n e_n$ とし, $(a, a^\sigma, a^{\sigma^2}) \sim (b, b^\sigma, b^{\sigma^2})$ と仮定する, つまり 非零元 $s \in K$ が存在して

$$(a, a^\sigma, a^{\sigma^2}) = s(b, b^\sigma, b^{\sigma^2})$$

とかけていると仮定する. すると

$$\frac{a^\sigma}{a} = \frac{b^\sigma}{b}$$

となるので

$$\left(\frac{b}{a}\right)^\sigma = \frac{b}{a}$$

がわかる. よって

$$\frac{b}{a} \in \mathbf{k},$$

となり, これより

$$(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = t(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n)$$

となる $t \in \mathbf{k}$ が存在することがわかる. 結局

$$(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \sim (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbf{P}^n(\mathbf{k})$$

となることがわかった.

(2) の証明. $(\lambda_0, \dots, \lambda_n), (\mu_0, \dots, \mu_n), (\nu_0, \dots, \nu_n)$ を $\mathbf{P}^n(\mathbf{k})$ の異なる 3 点とする.

$a = \lambda_0 e_0 + \dots + \lambda_n e_n, b = \mu_0 e_0 + \dots + \mu_n e_n, c = \nu_0 e_0 + \dots + \nu_n e_n$ とする.

ここで $\mathbf{P}^2(\mathbf{K})$ において点 $(c, c^\sigma, c^{\sigma^2})$ が 2 点 $(a, a^\sigma, a^{\sigma^2})$ と $(b, b^\sigma, b^{\sigma^2})$ を結ぶ直線上にあると仮定する.

このとき $x, y \in \mathbf{K}$ が存在して

$$(c, c^\sigma, c^{\sigma^2}) = x(a, a^\sigma, a^{\sigma^2}) + y(b, b^\sigma, b^{\sigma^2})$$

とかけている. このことより

$$c = xa + yb \tag{2.1}$$

$$c^\sigma = xa^\sigma + yb^\sigma \tag{2.2}$$

$$c^{\sigma^2} = xa^{\sigma^2} + yb^{\sigma^2} \tag{2.3}$$

となる. (2.2) と (2.3) より

$$c = x^{\sigma^{-1}}a + y^{\sigma^{-1}}b \tag{2.4}$$

$$c = x^{\sigma^{-2}}a + y^{\sigma^{-2}}b \tag{2.5}$$

となる. (2.4) から (2.1) を引くことにより, また (2.5) から (2.4) を引くことにより

$$(x^{\sigma^{-1}} - x)a + (y^{\sigma^{-1}} - y)b = 0 \tag{2.6}$$

$$(x^{\sigma^{-2}} - x^{\sigma^{-1}})a + (y^{\sigma^{-2}} - y^{\sigma^{-1}})b = 0 \tag{2.7}$$

が得られる. また (2.6) より

$$(x^{\sigma^{-2}} - x^{\sigma^{-1}})a^{\sigma^{-1}} + (y^{\sigma^{-2}} - y^{\sigma^{-1}})b^{\sigma^{-1}} = 0 \quad (2.8)$$

が得られる.

$a \neq 0, b \neq 0$ と (2.6) より, $x^{\sigma^{-1}} - x = 0$ であるならば $y^{\sigma^{-1}} - y = 0$ であり, その逆もなりたつ. つまり $x \in k$ であるならば必ず $y \in k$ であり, その逆も成り立つ.

ここで $x \notin k$ と仮定してみると, $y^{\sigma^{-2}} - y^{\sigma^{-1}} \neq 0$ と (2.7), (2.8) より,

$$-\frac{b}{a} = \frac{x^{\sigma^{-2}} - x^{\sigma^{-1}}}{y^{\sigma^{-2}} - y^{\sigma^{-1}}} = -\frac{b^{\sigma^{-1}}}{a^{\sigma^{-1}}}$$

となる. つまり

$$\frac{b}{a} = \left(\frac{b}{a}\right)^{\sigma^{-1}}$$

となる. 結局

$$\frac{b}{a} \in k$$

となり, それは 非零元 $u \in k$ が存在して

$$(\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = u(\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_n)$$

とかけることを意味する.

これより $(\lambda_0, \dots, \lambda_n) \sim (\mu_0, \dots, \mu_n)$ となる.

これは $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ と $(\mu_0, \dots, \mu_n)$ が $\mathbf{P}^n(k)$ において異なる点であるという最初の仮定に矛盾する.

結局 $x \in k$ であり, よって $y \in k$ となることがわかった.

(2.1) より $(\nu_0, \dots, \nu_n) = x(\lambda_0, \dots, \lambda_n) + y(\mu_0, \dots, \mu_n)$ となるので, $(\nu_0, \dots, \nu_n)$ が $\mathbf{P}^n(k)$ において 2 点 $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ と $(\mu_0, \dots, \mu_n)$ を結ぶ直線上にあることがわかった.

これは (2) が成り立つことを意味する.

3 定理 2 の証明

次の命題は, 昔からよく知られている.

命題 1 もし $P^n(k)$ が $P^2(K)$ に埋め込めるならば k は K の部分体である.

証明. もし $P^n(k)$ が $P^2(K)$ に埋め込めるならば, $P^n(k)$ のどの 2-次元部分空間 $P^2(k)$ もまた $P^2(K)$ に埋め込める. すると, この命題は Stevenson [4] の 定理 8.2.10 からすぐに導かれる. $\square$

定理 2 の証明には Monique Limbos の次の結果を用いる.

命題 2 (Limbos [1]) $n > m \geq 2$ とする. もし $P^n(k)$ から $P^m(K)$ への埋め込み ψ が存在し, さらにもし $P^m(K)$ が $\psi(P^n(k))$ によって張られているならば, 次の性質を満たす $(n-m-1)$ -次元部分空間 $U \subset P^n(K)$ が存在する.

$P^n(k)$ の 3 個の元で張られるどのような 2-次元部分空間 $V \subset P^n(K)$ に対しても, $U \cap V = \emptyset$ が成り立っている.

注意 k は K の部分体なので, 自然な埋め込み

$$P^n(k) \ni (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \rightarrow (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in P^n(K)$$

により $P^n(k) \subset P^n(K)$ と見なしている.

証明. もし $P^n(k)$ から $P^m(K)$ への埋め込み ψ が存在するなら, Limbos [1] の定理 2 より, $P^n(K)$ の $(n-m-1)$ -次元部分空間 U と U を中心とする射影 π で, π が $P^n(k) \subset P^n(K)$ から $\psi(P^n(k)) \subset P^m(K)$ の上への埋め込みになっているものが存在する. ここに $P^m(K)$ を $P^n(K)$ の適当な m -次元部分空間と見なしている.

さて もし $P^n(k)$ の 3 個の点 P_1, P_2, P_3 で張られる 2 次元部分空間 V に対して $U \cap V \neq \emptyset$ であったとすると, $\pi(P_1), \pi(P_2), \pi(P_3)$ は $P^m(K)$ の同一直線上にあることになる. これは π が埋め込みであることに反する. $\square$

なお Limbos は [1] 定理 2 の証明において k, K は有限体であると仮定しているが, その証明は無限体でも成り立つ.

さて 定理 2 において, ψ は $P^n(k)$ から $P^2(K)$ への埋め込みであり $n \geq 3$ であるので, $P^2(K)$ は $\psi(P^n(k))$ によって張られている. つまり定理 2 の証明においては, 命題 2 を適用するための仮定は満たされている.

よって 定理 2 を証明するためには, 次の事実を証明すれば十分である.

事実 $\dim_{\mathbf{k}} \mathbf{K} \leq n$ とする. すると $\mathbf{P}^n(\mathbf{K})$ のどの $(n-3)$ -次元部分空間 U に対しても, $\mathbf{P}^n(\mathbf{k}) \subset \mathbf{P}^n(\mathbf{K})$ の 3 個の元で張られた $\mathbf{P}^n(\mathbf{K})$ の 2-次元部分空間 V で $U \cap V \neq \emptyset$ となるものが存在する.

ところでこの事実は, つぎの補題からすぐにみちびかれる.

補題 $\dim_{\mathbf{k}} \mathbf{K} \leq n$ とする. すると $\mathbf{K}^{n+1}$ のどのような $(n-2)$ -次元部分空間 U に対しても, $\mathbf{k}^{n+1} \subset \mathbf{K}^{n+1}$ の 3 個の元で張られた $\mathbf{K}^{n+1}$ の 3-次元 $\mathbf{K}$ -部分空間 V で $U \cap V \neq \{0\}$ となるものが存在する.

注意 $\mathbf{k}$ は $\mathbf{K}$ の部分体なので, 自然に $\mathbf{k}^{n+1} \subset \mathbf{K}^{n+1}$ と見なしている.

注意 $a_1, \dots, a_l$ が $\mathbf{k}$ -ベクトル空間としての $\mathbf{K}$ の基底であるならば, $\mathbf{K}^{n+1}$ の元 $(u_1, u_2, \dots, u_{n+1})$ は $\mathbf{k}^{n+1}$ のただ一組の元 $(\alpha_{1,i}, \alpha_{2,i}, \dots, \alpha_{n+1,i})$ によって以下のように表せる. ただし $1 \leq i \leq l$.

$$(u_1, u_2, \dots, u_{n+1}) = \sum_{j=1}^l (\alpha_{1,j}, \alpha_{2,j}, \dots, \alpha_{n+1,j}) a_j. \quad (3.1)$$

(3.1) を元 $(u_1, u_2, \dots, u_{n+1})$ の, 基底 $a_1, a_2, \dots, a_l$ に関する標準的な表現 と言うことにする.

補題の証明. $\dim_{\mathbf{k}} \mathbf{K} = l$ とする. ここに $l \leq n$ である. $a_1, a_2, \dots, a_l$ を $\mathbf{K}$ の $\mathbf{k}$ -ベクトル空間としての基底とする. また $b_1, b_2, \dots, b_{n-2}$ を U の $\mathbf{K}$ -ベクトル空間としての基底とする.

$1 \leq k \leq l(n-2)$ に対し c_k を $c_{s+l(t-1)} = a_s b_t$ として定める. ただし $1 \leq s \leq l, 1 \leq t \leq n-2$.

$1 \leq k \leq l(n-2)$ に対し, c_k の, 基底 $a_1, a_2, \dots, a_l$ に関する標準的な表現が

$$c_k = \sum_{j=1}^l (\alpha_{1,j}^k, \alpha_{2,j}^k, \dots, \alpha_{n+1,j}^k) a_j \quad (3.2)$$

であるとする.

ベクトル空間 U のすべての元は c_k たちの $\mathbf{k}$ 係数の一次結合で表せることに注意する. ここに $1 \leq k \leq l(n-2)$.

さて c_k たちは $\mathbf{k}$ 上一次独立であり, また U は $\mathbf{k}$ 上 c_k たちで張られた $l(n-2)$ -次元のベクトル空間であるので, ベクトル空間 U は

$$U = \{ x_1 c_1 + x_2 c_2 + \dots + x_{l(n-2)} c_{l(n-2)} \mid x_k \in \mathbf{k} \text{ for } 1 \leq k \leq l(n-2) \}$$

と表すことができる.

ここで $1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq l$ に対して k -ベクトル空間 $W_{i,j}$ を以下のように定義する.

$$W_{i,j} = \{ x_1 c_1 + x_2 c_2 + \cdots + x_{l(n-2)} c_{l(n-2)} \mid x_k \in k \text{ for } 1 \leq k \leq l(n-2) \\ \text{with } x_1 \alpha_{i,j}^1 + x_2 \alpha_{i,j}^2 + \cdots + x_{l(n-2)} \alpha_{i,j}^{l(n-2)} = 0 \}.$$

ここに $\alpha_{i,j}^1, \alpha_{i,j}^2, \dots, \alpha_{i,j}^{l(n-2)}$ は, c_k の標準的な表現 (3.2) にでてきた k の元とする. ただし $1 \leq k \leq l(n-2)$.

ここで $W_{i,j} \subset U$ であり $\dim_k W_{i,j} = \dim_k U - 1$ となることは明らかである.

さて, さらに k -ベクトル空間 W' を

$$W' = W_{1,1} \cap W_{2,1} \cap \cdots \cap W_{n,l-3} \cap W_{n+1,l-3} \subset U$$

として定義する.

仮定より $l \leq n$ であるので, $l(n-2) > (n+1)(l-3)$ となる.

また, $\dim_k U = l(n-2)$ であり, W' は $(n+1)(l-3)$ 個の $W_{i,j}$ たちの交わりであるので, $c \in W' \subset U$ であるような非零元 c が存在する.

c を U の元と考えると以下のように表せる.

$$c = x_1 c_1 + x_2 c_2 + \cdots + x_{l(n-2)} c_{l(n-2)}. \quad (3.3)$$

また, $1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq l-3$ に対して, $c \in W_{i,j}$ であるので,

$$x_1 \alpha_{i,j}^1 + x_2 \alpha_{i,j}^2 + \cdots + x_{l(n-2)} \alpha_{i,j}^{l(n-2)} = 0 \quad (3.4)$$

が成り立っている.

ここで c_k たちの標準的な表現 (3.2) を思い出すと, また, $1 \leq i \leq n+1, 1 \leq j \leq l-3$ に対して (3.3) と (3.4) を考えあわせると, 基底 $a_1, a_2, \dots, a_l$ に関する, c の標準的な表現は

$$c = \sum_{j=1}^{l-3} (0, 0, \dots, 0) a_j + \sum_{j=l-2}^l (\beta_{1,j}, \beta_{2,j}, \dots, \beta_{n+1,j}) a_j \quad (3.5)$$

となっていることがわかる. ただし, $1 \leq i \leq n+1, l-2 \leq j \leq l$ に対して $\beta_{i,j} \in k$ とする.

さて V を k^{n+1} の 3 個の元で張られた 3-次元 K -ベクトル空間で, k^{n+1} の 3 個の元 $(\beta_{1,j}, \beta_{2,j}, \dots, \beta_{n+1,j})$, ただし $l-2 \leq j \leq l$, を含んでいるものとする.

そうすると (3.5) より, $U \cap V \ni c \neq 0$ となっている.

これが補題の主張することであった. $\square$

定理 1 においては, $\mathbf{K}$ が $\mathbf{k}$ の巡回拡大であると仮定しているので, 次の問題はまだオープンだと思われる.

問題 $\mathbf{k}$ が $\mathbf{K}$ の部分体で $\dim_{\mathbf{k}} \mathbf{K} \geq n+1$ であれば, 常に $\mathbf{P}^n(\mathbf{k})$ から $\mathbf{P}^2(\mathbf{K})$ への埋め込みが存在するか?

参考文献

- [1] M. Limbos, A characterisation of the embedding of $PG(m, q)$ into $PG(n, q^r)$, *Journal of Geometry*, Vol. **16**, (1981), 50–55.
- [2] M. Limbos, Plongements de $PG(n, q)$ et $AG(n, q)$ dans $PG(m, q')$, $m < n$, *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, Vol. **IV** (1982), 65–68.
- [3] T. Maruta, Arcs and Steiner triple systems (in Japanese), *RIMS kokyuroku* **697**, Research Institute for Mathematical Science, Kyoto university (1989), 29–39.
- [4] F. W. Stevenson, *Projective Planes*, W. H. Freeman and Company, 1972.
- [5] J. A. Thas, Connection between the n -dimensional affine space $A_{n,q}$ and the curve C , with equation $y = x^q$, of the affine plane A_{2,q^n} , *Rend. ist. di Matem. Univ. di Trieste*, Vol. **II** fasc. **II** (1970), 146–151.
- [6] H. Taniguchi, On Embeddings of Projective Spaces, *Utilitas Mathematica*, to appear.