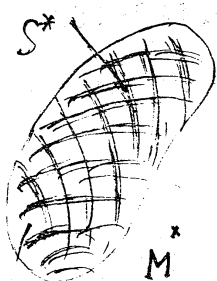


方程式 $\Delta u + k^2 u = 0$ の解に

ついての若干の考察

日大理工 洪 姓 植

滑らかな境界 S でかこまれた 3 次元の領域を D とする。



境界 S を 2 つの部分 S^* と $(S - S^*)$ に分

け, S^* を壁 $S - S^*$ を窓とよびことに

する。 D の外に一真をとりそれを M とする。

与えられた Helmholtz の方程式を

$$S - S^* \quad \Delta u + k^2 u = 0$$

とする。 つぎのような函数 $U(P)$ を考察する：

S^* 上では $U = 0$, S^* 及び M 以外の有限な所にあるす

べての点 P においては与えられた Helmholtz の方程式を満足す

る。 M では指定された形の特異点をもつ。(例えば, $U \sim \frac{e^{ikr}}{r}$,

$r = \overline{PM}$), また ∞ では U が唯一解になるような条件が

与えられているとする。(例えば, Sommerfeld の幅射条件の

類, $\lim_{R \rightarrow \infty} R(\partial U / \partial R - ikR) = 0$).

考察を試みない目的のととがらは, 上にのべた諸条件を

満足する U が, どのような条件の下に D 内の任意の点 P において

$U(P) \neq 0$ となるか? ということである。

(すなわち, どういう条件の下で D の内部で外部の点 M でのじょう乱の影響を殆んど受けまいかという, いわば, Helmholtz 方程式に対するしゃち現象のメカニズムを調べることである.)

$\epsilon = 0$ のときについて上の問題, (電氣的しゃち現象), を1つの考え方で処理したものを福原南雲記第号に出させて頂いた。

(それは壁の集合 S^* が境界 S 全体に十分に密に配布されていれば, 壁の総面積が窓の総面積に比してどんなに小さくても, D の内部で外のじょう乱の影響を殆んど受けまいということをも2次元の円の場合の問題にして推論を与え, 又, 数値解析的興味の見地から, 計算機にこの結果を check させる1つのテクニックを与え, その方法によつて実際にえられた data を与えたものである.)

まず, 考えられる1つの立場として, $\epsilon = 0$ の場合と同じ考え方を $\epsilon \neq 0$ の場合へ適用してみることである。そうすると $\epsilon = 0$ での証明中, 調和函数の最大値の原理を使つた部分が適用できなくなる。第一にこれをきり抜けなければならぬ, もし上の方針で進むなら。そのために, $\epsilon \neq 0$ の場合, この方程式に対する固定境界値問題の第1固有値に関する等周問題の結果を考慮に入れて, 調和函数の最大値の原理の拡張に相当するものをみさぐす, それを使って $\epsilon = 0$ の

場合と強くと類似の推論でいけるという推察の下に、 D についてつぎの条件をつけて考察を試みることにした：

D の体積は、与えられた κ^2 を同じ方程式の固定境界値問題の第 1 固有値とする球の体積より小さいと仮定する。

すると以下に示すように $\kappa = 0$ の場合と類似の推論にみちみかれることを示すのが本報告の主な目的の 1 つである。

$$\text{補題：} \quad 4u + \kappa^2 u = 0 \quad (\kappa \neq 0) \quad (1)$$

を与えられた方程式とする。 D は体積について上の仮定を満足する、滑らかな境界 S でかこまれている次元の単連結の領域とし、 P は D 内の任意の点、 Q は S 上の任意の点をあらわすならば、 $|u(P)| \leq c \sup_{Q \in S} |u(Q)|$ が成立する。

ここに c は D だけに従属し、 P には独立な定数である。

(D が単連結でないときは、一番外の境界でかこまれた領域の体積について上の仮定を満足するとすれば、単連結の場合と同じ推論で同じ結果がえられるので証明は単連結について示せば十分である。実は次元も 3 次元に限つてはいい)

証明： (3 次元の単連結の場合)

G を方程式 (1) の Green 函数とする。

D の大きさに対する仮定から Green 函数 G の符号は D 内で常に正である。もし符号がかわるとすれば、 $G < 0$ と

$G > 0$ の領域に分れる。 $G < 0$ なる 1 つの単連結領域が少なくとも 1 つ存在する。これを D^* とすると明らかに D^* には G の pole はない。よって

$$\begin{cases} \Delta G + \lambda^2 G = 0 & \text{in } D^* \\ G = 0 & \text{on the boundary of } D^* \end{cases}$$

が成立するから λ^2 は領域 D^* に対する固定境界値問題の 1 つの固有値になる。これは矛盾である。というのは D^* に対する同じ問題の第 1 固有値は D^* と同じ体積の球に対する第 1 固有値より小でない。 D の体積についての假定により後者は λ^2 より大であるから。

S 上で

従って $\partial G / \partial n$ の符号は λ の符号と一致しなければならない。

よく知られているように Green の公式から、 $P \in D$ のとき

$$u(P) = \frac{1}{4\pi} \int_S u(Q) \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma \quad \text{とかけるが上の}$$

2 から

$$u(P) = \frac{1}{4\pi} (u \text{ の } S \text{ 上での中間値}) \times \int_S \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma$$

とかき直せる。ところで $\int_S \frac{\partial G}{\partial n} d\sigma$ は境界値 1 なる (1) の方程式の解の P における値である。これは D だけに従えば、 P には独立な定数 C で上方からおさえられる。よって u の D の内点における値の評価を u の境界 S 上での値を使って与え

る不等関係:

$$|u(p)| \leq C \sup_{Q \in S} |u(Q)| \quad (p \in D)$$

を得る。

さて、 z で I 頁においてかかげた問題の函数 $U(p)$ に戻る。(但し、 D の体積は上での β を仮定をみなすとする、)

$$e^{ikr}/r \equiv \varphi(p)$$

とおく、 U を求める代わりに u を求めることにする:

u は S^* 以外では $\Delta u + k^2 u = 0$ をみなす。

S^* 上では $u = -\varphi$, ∞ では幅条条件 $\lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\frac{\partial u}{\partial R} - iku \right) = 0$

をみなす、 u が求まれば U は

$$U(p) = u(p) + \varphi(p) \quad \text{である。}$$

このような問題の解がえられたときこれを $u(p)$ とする。

つぎに D をかこんでこれより少し大きい領域 D_1 を作り、その境界を S_1 とする。(D_1 の体積について D と同じ条件をみなすとする。) S_1 上では $u(p)$ は有限確定値をもつ、この S_1 上の $u(p)$ の値を $u(Q_1)$ とかく。(S_1 上の点を Q_1 とあらわした。) D_1 内で考えると $u(p)$ は S_1 上で $u(Q_1)$, S^* 上で $u = -\varphi(Q)$ となる $\Delta u + k^2 u = 0$ の解である、これを問題 I としておく。

つぎに S_1 上で $u(Q_1)$, S 上で $-\varphi(Q)$ となる $\Delta v + k^2 v = 0$ の解を考える、これを問題 II としておく。

問題IIの解 V につき S 及び S_1 上で $\partial V/\partial n$ を作る。この $\frac{\partial V}{\partial n}$ を用い $-\frac{1}{4\pi} \cdot \frac{\partial V}{\partial n}$ を密度とする一重層 $\sigma(Q)$ を S 及び S_1 上に配布する。(Qは S 上の点をあらわした。)

この一重層 σ にもとづくポテンシャルを V で表わすとこれは S と S_1 との間で問題IIの V と一致する。 S の内側 D では S 上で $V(Q) = -\phi(Q)$, それをかきかえりと S 上で $V(Q) + \phi(Q) = 0$ である。 $V(P) + \phi(P)$ は D で

$$\Delta[V + \phi] + k^2[V + \phi] = 0$$

を満足する。 D の大きさに対する仮定から、 D 内で $\Delta u = 0$ 境界値問題の non-trivial solution がないから $V(P) + \phi(P) \equiv 0$ となる。 $\therefore V(P) = -\phi(P)$, すなわち、一重層ポテンシャルは S の内側では $-\phi(P)$ を与える。問題IIで S 上に配布した一重層を S^* 上に再配分する。すなわち窓のところで $(S-S^*)$ では0にしてしまい、そこにあつた一重層をすぐ近隣の壁へ移動させる。もう少し詳しくいふと考えている面 S の上に網の目を作る。1つの網の目の中でのそこらに配布されている一重層の質量の total が変わらないように移動させることである、(S_1 上ではもとのまま)。網の目を細くする操作はその直径を小さくすることである。このように再配布された一重層を $\sigma^*(Q)$ とする。

$\sigma^*(Q)$ にもとづくポテンシャル $W(P)$ は $\sigma(Q)$ にもとづく

ポテンシャルの Riemann 積分式近似を与え, S^* から S 上に十

分に密に配布されている P につき一様

$$|W(P) - V(P)| < \varepsilon \quad (2)$$

特に D_1 の境界 S_1 上においても

$$|W(Q_1) - V(Q_1)| < \varepsilon \quad (b)$$

また S^* 上においても

$$|W(Q) - V(Q)| < \varepsilon \quad (c) \quad \text{である。}$$

ところで (b), (c) において

$$S_1 \text{ 上では } V(Q_1) = U(Q_1)$$

$$S \text{ 上では } V(Q) = U(Q) = -\varphi(Q) \quad \text{であった。}$$

そこで W と U とを境界 S_1 , S^* の上で比較すると

$$S_1 \text{ 上では } |W(Q_1) - U(Q_1)| < \varepsilon$$

$$S^* \text{ 上では } |W(Q) - U(Q)| < \varepsilon \quad \text{となる。}$$

W と U との差を作ると, その差について, $W(P) - U(P)$

も $D_1 - S^*$ で

$$\Delta(W - U) + \rho^2(W - U) = 0$$

を満足し, かつ 境界値は ε より小である。そこで $D_1 - S^*$

の体積に関する仮定から $D_1 - S^*$ の内部では

$$|W(P) - U(P)| < c\varepsilon \quad (c \text{ はある定数})$$

となる。一方 (2) から

$$|W(P) - V(P)| < \varepsilon \quad \text{左の二式を合わせ}$$

$$|u(p) - v(p)| < (1+c)\varepsilon$$

とすると $v(p)$ については D 内で $-\varphi(p)$ であつた。

故に D 内で

$$|u(p) + \varphi(p)| < (1+c)\varepsilon \quad \text{となる。}$$

$u(p) + \varphi(p)$ は、はじめの求めるもの $V(p)$ であり、 D 内における評価

$$|V(p)| < \varepsilon$$

がえられ、結局、 D の体積についての上の假定の下に $t=0$ の場合と類似の結果がえられる。