

4

Martingale Transforms について積分不等式

とくに行列型的作用素の比較について

東北大 故養 濱利 千波

序 discrete time martingales を, 独立な確率変数を項とする級数の拡張と見て, 実数論的な手法で研究しようという試みが, 1965年ごろからあり出している。この際, 一つの有力な手法は, 対象を "good part" (L^2 -theory の適用できる部分) と, "bad part" (L^2 -theory が適用できない部分) とに分解して評価することと, stopping time (以下 ST と略記する) との確率論的な概念の利用と合わせると相違が成果が得られる。ただ, 基礎となる分解定理にも, まだ便宜的な色合いが濃く, 未完成の部分が多くなっただけ, 一応の現状を報告する。

§1. 準備

本節の結果に限らず, 本稿の結果はほとんど σ -finite measure space 上で成り立つが, vector-valued martingale

を考へる際、道具として複雑に取らなく、簡単なために確率空間に制限する。

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ を sub σ -field とする. $B \in \mathcal{G}$ に対し, $f \in L^1(\Omega) \in \mathbb{R}^n$ と

$$\mu_f(B) = \int_B f dP = E[f; B]$$

とすれば, P -absolutely continuous なる $\mathcal{G}$ 上の set function μ_f が得られる. $P|_{\mathcal{G}}$ に関する Radon-Nikodym derivative $\frac{d\mu_f}{dP}$ は $E[f|\mathcal{G}]$ であり, f の $\mathcal{G}$ に関する conditional expectation とし, $E_{\mathcal{G}}[f]$ と書くこともできる。

$E[f|\mathcal{G}]$ は $\mathcal{G}$ -measurable function であり, 次の性質がある。

- (i) $f \geq 0 \Rightarrow E[f|\mathcal{G}] \geq 0$
- (ii) f が $\mathcal{G}$ -measurable $\Rightarrow E[f|\mathcal{G}] = f$ a.e.
- (iii) c_1, c_2 constant $\Rightarrow E[c_1 f_1 + c_2 f_2] = c_1 E[f_1|\mathcal{G}] + c_2 E[f_2|\mathcal{G}]$
- (iv) $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F} \Rightarrow E_{\mathcal{H}}[E_{\mathcal{G}}[f]] = E_{\mathcal{H}}[f]$
- (v) $f, g \in L^2(\Omega) \Rightarrow E[E[f|\mathcal{G}]g] = E[f E[g|\mathcal{G}]]$
- (vi) $\|E_{\mathcal{G}}[f]\|_p \leq \|f\|_p \quad 1 \leq p \leq \infty$
- (vii) $g \in L^\infty(\Omega, \mathcal{G}, P) \Rightarrow E_{\mathcal{G}}[fg] = g E_{\mathcal{G}}[f]$

以下に於いては, $\mathcal{F}$ の sub σ -fields の増加列 $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を固定する. random variable $r: \omega \mapsto r(\omega)$ あり

$$[r = n] \equiv \{\omega: r(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n \quad (n \in \mathbb{N})$$

(ただし r は自然数又は ∞ を値にとる $\mathbb{N}$ 値関数)

をみたすとき, r を stopping time といい, ST と略記する. r が ST であるとき $r+1$ も ST であり, 2つ ST の小さい方 $r \wedge s$ も ST である.

確率変数列 $f = \{f_n\}$ に対し, f_n が $\mathcal{F}_n$ -可測であれば f は adapted であるといふ. f_n が $\mathcal{F}_{n-1}$ 可測であれば f は predictable であるといふ.

$$f = \{f_n\} \text{ が}$$

1° adapted である.

2° f_n は 各 n ごとに $L^1(\Omega)$ の元である.

$$3^\circ E[f_{n+1} | \mathcal{F}_n] \geq f_n \quad \text{a.e.} \quad (n=1, 2, \dots)$$

をみたすとき, f は submartingale であるといふ. $-f$ が submartingale であるとき, f は supermartingale といふ. 3° には $=$ の等号が成立するとき, f は submartingale であり同時に supermartingale である f は martingale といふ.

$p \geq 1$ に対し

$$\|f\|_p = \sup_n \|f_n\|_p$$

と置く. $\|f\|_p < \infty$ であれば, f は L^p -bounded であるといふ.

f が martingale であるとき $\|f\|_p = \{\|f_n\|_p\}_{n \in \mathbb{N}}$ は submartingale である. $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ は L^p である.

定理 1 (Martingale Maximal Theorem) $f = \{f_n\}$ が martingale あるいは non-negative submartingale であるとき,

$$(i) \quad \forall y > 0 \quad \text{に対して} \quad P[f^* \geq y] \leq \frac{1}{y} \|f\|_1$$

$$(ii) \quad \|f^*\|_p \leq A_p \|f\|_p \quad (1 < p \leq \infty)$$

$$=: f^*(\omega) = \sup_n f_n^*(\omega) = \lim_n f_n^*(\omega) = \lim_n \sup_{1 \leq k \leq n} |f_k(\omega)|$$

この定理は通常 "Doob の不等式" と呼ばれる。

([D] pp. 311-318 参照)

定理 2. (Marcinkiewicz の補間定理) T が可測変数 (random variable) を可測変数に移す作用素で

1° quasi-linear である, すなわち, ある $K(>0)$ があって

$$|T(f_1 + f_2)(\omega)| \leq K(|Tf_1(\omega)| + |Tf_2(\omega)|)$$

2° T は of weak type $(1,1)$ である, すなわち

$$\exists A > 0 \quad \forall y > 0 \quad \forall f \in L^1: \quad P[|Tf| > y] \leq \frac{A}{y} \|f\|_1$$

3° T は of strong type $(2,2)$ である, すなわち

$$\exists A > 0 \quad \forall f \in L^2: \quad \|Tf\|_2 \leq A \|f\|_2$$

(2°, 3° における A はある絶対定数であるが, 同一とは限らない) であるとする。このとき $1 < p \leq 2$ に対して

$$\|Tf\|_p \leq A_p \|f\|_p$$

この定理の完全な形と証明については, 左と右は [Z_{II}]

pp. 112-115 参照)

§2. 分解定理. 対象となる martingales を "good part" と "bad part" とに分けるために, 後者の Gundy 分解が有効であることを, 本節では K. Azuma の考え方に従って Gundy の分解定理を証明する ([1])

定理3. (submartingales の Doob 分解) ([D], p. 297)
submartingale $f = \{f_n\}$ は, 一意に

$$f = \hat{f} + I : \quad \hat{f} \text{ martingale}$$

I predictable increas. sequence

と分解される. さらに, f が L^1 -bounded かつ non-negative であるならば, $I_\infty(\omega) = \lim_n I_n(\omega)$ が a.e. 存在し, 可積分である.

定理4 (L^1 -bounded martingales の Krickeberg 分解)
 L^1 -bounded martingale f は, 一意に

$$f = f^{\oplus} - f^{\ominus}, \quad \|f\|_1 = \|f^{\oplus}\|_1 + \|f^{\ominus}\|_1$$

$f^{\oplus}, f^{\ominus}$ は non-negative martingales と分解される.

証明. $f^+ = \{f_n^+\} = \left\{ \frac{1}{2}(|f_n| + f_n) \right\}$ は L^1 -bounded non-negative submartingale である. 定理3 によれば

$$f^+ = \hat{f} + I, \quad I_\infty = \lim_n I_n \in L^1 \quad \text{と} \quad (2.2.3).$$

$h_n = E[I_\infty | \mathcal{F}_n]$ とおくと $h = \{h_n\}$ は non-negative martingale であり, $f^{\oplus} = \hat{f} + h, \quad f^{\ominus} = \hat{f} + h - f$ だと

martingales z , $f = f^{\oplus} - f^{\ominus}$ である. $I_n \uparrow (n \uparrow)$

であるから, I_n が $(\mathcal{F}_{n-1}, \subset) \mathcal{F}_n$ -可測であることから

$$\begin{aligned} f_n^{\oplus} &= \hat{f}_n + h_n = f_n^+ - I_n + E[I_{\infty} | \mathcal{F}_n] \\ &= f_n^+ + E[I_{\infty} - I_n | \mathcal{F}_n] \geq 0 \end{aligned}$$

$$f_n^{\ominus} = \hat{f}_n + h_n - f_n = (f_n^+ - f_n) + (h_n - I_n) \geq 0$$

z , non-negative martingales の差に分解される. (他方

$$\begin{aligned} \|f^{\oplus}\|_1 + \|f^{\ominus}\|_1 &= \sup_n E[f_n^{\oplus}] + \sup_n E[f_n^{\ominus}] \\ &= E[f_1^{\oplus}] + E[f_1^{\ominus}] \\ &= 2E[\hat{f}_1] + 2E[I_{\infty}] - E[f_1] = (*) \end{aligned}$$

$$z, \|f^{\oplus}\|_1 = \sup_n E[f_n^{\oplus}] = E[\hat{f}_1] + E[I_{\infty}] \text{ である}$$

$$\begin{aligned} (*) &= 2 \sup_n E[f_n^{\oplus}] - E[\hat{f}_1] = \sup_n \{ 2E[f_n^{\oplus}] - E[f_n] \} \\ &= \sup_n \{ 2E[f_n^{\oplus}] - E[f_n^{\oplus}] + E[f_n^{\ominus}] \} \\ &= \sup_n \{ E[f_n^{\oplus}] + E[f_n^{\ominus}] \} = \sup_n E[|f_n|] = \|f\|_1 \end{aligned}$$

一意性. $f_n = g_n^{\oplus} - g_n^{\ominus}$ $\|f\|_1 = \|g^{\oplus}\|_1 + \|g^{\ominus}\|_1$ である
の分解とする. $g_n^{\oplus} \geq 0, g_n^{\ominus} \geq 0$ である

$$g_n^{\oplus} \geq g_n^{\oplus} - g_n^{\ominus} = f_n \quad \therefore g_n^{\oplus} \geq \sup(f_n, 0) = f_n^+$$

したがって, martingale equality から $m \in \mathbb{N}$ に対して

$$\begin{aligned} g_n^{\oplus} &= E[g_{n+m}^{\oplus} | \mathcal{F}_n] \geq E[f_{n+m}^+ | \mathcal{F}_n] \\ &= E[I_{n+m} | \mathcal{F}_n] + \hat{f}_n \end{aligned}$$

$m \in \mathbb{N}$ は任意であるから $m \rightarrow \infty$ とし単調収束定理から

$$g_n^{\oplus} \geq E[I_{\infty} | \mathcal{F}_n] + \hat{f}_n = h_n + \hat{f}_n = f_n^{\oplus}$$

10

$$f_n = f_n^{\oplus} - f_n^{\ominus} = g_n^{\oplus} - g_n^{\ominus} \quad \text{かつ} \quad g_n^{\ominus} \geq f_n^{\ominus}$$

と 3 の

$$0 = E[(g_n^{\oplus} - f_n^{\oplus})] + E[(g_n^{\ominus} - f_n^{\ominus})]$$

() 内は a.s. ≥ 0 だから, $= 0$ であるはずだ。

この証明は、本質的には Davis (1974) Meyer (1974) による。

定理 5. (L^1 -bounded Martingales の Gundy 分解)

L^1 -bounded martingale f と、正数 y と $\varepsilon < 3$ と、
つぎの条件を満たす 3 つの martingales a, b, g が存在する。
すなわち $\alpha_1 = a_1, \quad \alpha_n = a_n - a_{n-1} \quad (n \geq 2)$ 等である。

$$(i) \quad f = a + b + g$$

$$(ii) \quad P[\alpha^* > 0] \leq A \|f\|_1 / y, \quad \|a\|_1 \leq A \|f\|_1$$

$$(iii) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \|\beta_n\|_1 \leq A \|f\|_1$$

$$(iv) \quad \|g\|_{\infty} \leq Ay, \quad \|g\|_1 \leq A \|f\|_1$$

証明. 必要があれば f に前定理を適用し、 $f \geq 0$ と
仮定する。 $r(\omega) = \inf \{ n : f_n(\omega) > y \}$ とおく。
 r は ST である。 $d_1 = f_1, \quad d_n = f_n - f_{n-1} \quad (n \geq 2)$ 等とおく。
($r^{-1}f^r$)_n = $\sum_{j=1}^n d_j 1_{[r=j]}$ と定義すれば $r^{-1}f^r$
は non-negative submartingale であり、 $(d_j 1_{[r=j]} \geq 0)$
かつ L^1 -bounded である。 実際

がある。

定理 6. (Chow Decomposition) [6] $f = \{f_n\} = \sum d_n$

が martingale なら, $S(f) = \left(\sum_{j=1}^{\infty} d_j^2\right)^{1/2} \in L^1(\Omega)$ であるとする。

このとき, 与えられた正数 γ に対して 2 martingales a, b, g が存在して

$$(i) \quad f = a + b + g$$

$$(ii) \quad [\alpha^* > 0] \subset [S_H > \gamma], \quad S(a) \leq S(f) \quad \text{a.e.}$$

$$(iii) \quad \sum \|\beta_n\|_1 \leq 2\|d^*\|_1 \leq 2\|S(f)\|_1$$

$$(iv) \quad \|g\|_2^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|\gamma_n\|_2^2 \leq \gamma \|S(f)\|_1$$

証明は前定理よりいさか簡単である。原論文を参照されたい。Burkholder [3] による前定理の証明も同じ線上にあると思われる。

§ 3. Martingale Transforms と行列型作用素

martingale transforms の組織的な研究は, Burkholder [2] に始まる。その主要定理の一つは, 一つの変形に述べられる。

定理 7. $f = \{f_n\} = \sum d_n$ が martingale, $v = \{v_n\}$ が predictable, uniformly bounded sequence とする。

$$(v \circ f)_n = \sum_{j=1}^n v_j d_j \quad \text{とすると } v \circ f \text{ は martingale である}$$

$$(i) \quad P[(v \circ f)^* > \gamma] \leq A \|f\|_1 / \gamma$$

$$(ii) \quad \|v \circ f\|_2 \leq A \|f\|_2$$

仮とせば, ST の適用として $v_j = 1[a \geq j]$ 仮とし
 $v_j = 1[\sigma < j]$ とすると, martingale transform が得られる。
 この定理は, つぎの定理に含まれる。

Burkholder - Gundy は, 行列型的作用素 "Operators of Matrix Type" を定義した。 $f = \{f_n\} = \sum d_n$ かつ

$$Mf(\omega) = \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \sum_{k=1}^n a_{j,k} d_k \right|^2 \right\}^{1/2}$$

($a_{j,k}$ は $\mathcal{F}_{k-1}$ -measurable 且 $0 < A \leq \sum_{j=1}^{\infty} a_{j,k}^2 \leq A' < \infty$)
 を作る作用素である。これに関連して, 同じ条件のもとに

$$M_n f = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^n a_{j,k} d_k \right|^2 \right)^{1/2} \quad \text{"operator of finite matrix type"}$$

$$M^{***} f = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sup_n \left| \sum_{k=1}^n a_{j,k} d_k \right|^2 \right)^{1/2} \quad \text{maximal matrix type}$$

が考えられる。 M_n は [5] において広く利用されている。
 M^{***} は [10] において述べられたが, 後に入手した [4]
 において取り扱われている。

定義 (Gundy [8]) Martingales に対して定義された
 quasi-linear operator T の class $\mathcal{B}$ であるとは

$$1^\circ \text{ "local" である: } [Tf \neq 0] \subset [d^* > 0]$$

$$2^\circ L^1(l^1)\text{-bounded である: } \|Tf\|_1 \leq A \sum_{j=1}^{\infty} \|d_j\|_1$$

$$3^\circ L^2\text{-bounded である: } \|Tf\|_2 \leq A \|f\|_2$$

の3条件を満たすことをいう。

定理8. Martingale transforms, operators of (maximal)

!! Minkowski ineq. が $K=1$ だよ. (C.W.)

matrix type は of class B だよ.

証明. maximal matrix type は ~ 2 だよ.

{ $(u+v)^2 \leq 2(u^2+v^2)$ だよ, $K=\sqrt{2}$ と M^{***} は quasi-linear だよ. ([4] だよ. $K=1$ だよ. $1^\circ \sim 3^\circ$ の証明を要する. 1° は 2° だよ. 2° は 3° だよ. 3° は定理 1 から来る.)

$D = \sum_{k=1}^{\infty} |d_k|$ とする.

$$\left| \sum_{k=1}^n a_{jk} d_k \right|^2 \leq \left(\sum_{k=1}^n |d_k| \right) \left(\sum_{k=1}^n a_{jk}^2 |d_k| \right) \\ \leq D \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}^2 |d_k|$$

n について上限をとる (右辺は n に無関係), j について相加し合わせると順序を交換すると

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sup_n \left| \sum_{k=1}^n a_{jk} d_k \right|^2 \leq D \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} a_{jk}^2 |d_k| \leq A' D^2$$

だよ. これから 2° が得られる. 3° は定理 1 から来る.

Gundy 分解, Marcinkiewicz の補題と組み合わせると、この系が得られる.

系. $\|M^{***} f\|_p \leq A_p \|f\|_p \quad (1 < p \leq 2).$

$$Nf = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \limsup \left| \sum_{k=1}^j b_{jk} d_k \right|^2 \right)^{1/2}$$

$$N_n f = \left(\sum_{j=1}^n \left| \sum_{k=1}^j b_{jk} d_k \right|^2 \right)^{1/2} \quad N^{***} f = \left(\sum_{j=1}^{\infty} \sup_n \left| \sum_{k=1}^j b_{jk} d_k \right|^2 \right)^{1/2}$$

これは n の operator of (finite, maximal) matrix type とする. Burkholder - Gundy [5] の所論を少し修正して

この定理が得られる。(この定理は [4] に述べられてゐる。) (以下同様である。)

定理 9. (i) $P[N^{***}f > y] \leq A \sup_n \|M_n f\|_1 / y$.

(ii) $\|N^{***}f\|_p \leq A_p \sup_n \|M_n f\|_p \quad (1 < p < \infty)$

この定理の証明は外に複雑で、3段階に分けて実行される。

1° $Mf = S(f)$ のとき、Chow の分解定理が用ゐられる。

2° Khintchine の不等式に注意して、Chow の分解定理を Mf に拡張する。

3° $p > 2$ の部分には Khintchine の不等式が得る。

$f \mapsto f^*$ は $\rightarrow$ の operator of maximal matrix type であるから、ある operator of matrix type M に対して $\sup_n \|M_n f\|_p < \infty$ であるとは f は L^p -bounded であるが、 $p=1$ のとき、ある M に対して $\sup_n \|M_n f\|_1 < \infty$ から f が L^1 -bounded と結論できるかは未確定のようである (M. Yamazaki の問題)。 $p=1$ の場合には

$$A \|f^*\|_1 \leq \|S(f)\|_1 \leq A' \|f\|_1 \quad (B. J. Davis [7])$$

が成り立つが、より一般にこの定理が成り立つ ([4], [9])

定理 10. M, N を行列型の作用素とするとき

$$\|N^{***}f\|_1 \leq A \sup_n \|M_n f\|_1.$$

文 献

- [D] J. L. Doob, Stochastic Processes, Wiley, New York, 1952.
- [Z] A. Zygmund, Trigonometric Series, I and II, Cambridge, 1959.
- [1] K. Azuma and C. Watari, Decomposition Theorems and Martingale Transforms, Preprint.
- [2] D. L. Burkholder, Martingale Transforms, Ann. Math. Statist., 37(1966), 1494 - 1504.
- [3] D. L. Burkholder, Distribution Function Inequalities for Martingales, Ann. Prob., 1(1973), 19 - 42.
- [4] D. L. Burkholder, B. J. Davis and R. F. Gundy, Integral Inequalities for Convex Functions of Operators on Martingales, Proc. 6th Berkeley Symp., vol. 3, 223 - 240.
- [5] D. L. Burkholder and R. F. Gundy, Extrapolation and Interpolation on Quasi-linear Operators on Martingales, Acta Math., 124(1970), 249 - 304.
- [6] Y. S. Chow, Convergence of Sums of Squares of Martingales, Ann. Math. Statist., 39(1968), 123 - 133.
- [7] B. J. Davis, Integrability of Martingale Square Functions, Israel J. Math., 8(1970), 187 - 190.
- [8] R. F. Gundy, A Decomposition for L^1 -bounded Martingales. Ann. Math. Statist., 39(1968), 134 - 138.
- [9] M. Izumizawa, Comparison of Matrix Type Operators on Martingales, Preprint.
- [10] C. Watari, Martingale Transforms について, 作行会シとホシユウシ. 1972.