

局所可解性と Stokes の現象

京大 数理研 清水信敬

偏微分作用素 P の局所可解性を調べる問題について P が simple characteristics を持つ場合は ほぼ解決されている。しかし P が multiple characteristics を持つ場合問題は きわめて複雑な様相を呈する。ひとつの例として原点で double characteristics を持つ次の作用素を考えよう

$$P(t, D_x, D_t) = (D_t - iat^k D_x)(D_t - ibt^k D_x) + ct^{k-1} D_x,$$

k : 正整数, a, b, c : 定数, $b < 0 < a$,

$$(t, x) \in \mathbb{R}^2, \quad D_t = i^{-1} \partial / \partial t, \quad D_x = i^{-1} \partial / \partial x.$$

P の原点での局所可解性は k が偶数の場合と奇数の場合について それぞれ別々の方法によって調べられている;

(I) k が奇数のとき (Gilioli - Tréves [4])

$$P \text{ が原点で局所可解} \Leftrightarrow c/(a-b) \not\equiv 0, 1 \pmod{k+1}$$

(II) k が偶数のとき (Menikoff [5])

$$P \text{ が原点で局所可解} \Leftrightarrow c/(a-b) \not\equiv 1/2 \pmod{k+1}$$

ここではこの問題を少し別の角度から 統一的に扱うことを考えた。 P は Grušin [3] により、研究された作用素の class に属している。 Grušin の結果は

$$P: \text{hypoelliptic} \iff \text{Ker } P(t, \pm 1, D_t) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{0\}$$

hypoelliptic な作用素の formal transpose は局所可解だから $\text{Ker } P(t, \pm 1, D_t)$ を調べることにより 局所可解性のひとつの十分条件が得られる。 実際 上記の (ii) の研究においても 最も困難な点は $P(t, \pm 1, D_t)$ に相応する常微分方程式が いつ急減少する解を持つかを 決定することにあつた。 この研究では 問題を 0 と ∞ とに特異点を持つ常微分方程式系の 解の漸近挙動に帰着させる。そして この問題が 常微分方程式の理論の中で Stokes の現象として知られているものと 強い関連を持っていることが 示されるであろう。

1. 常微分方程式系の非正則特異点

まず最初に $P(t, 1, D_t) f_0(t) = 0$ を考える。

system で書くと

$$\frac{d}{dt} f = \begin{bmatrix} -(a+b)t^k & -abt^{\frac{2k}{k-1}} - kbt^{\frac{k-1}{k-1}} + ct^{\frac{k-1}{k-1}} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} f, \quad f = \begin{pmatrix} f_0' \\ f_0 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

ここで独立変数と従属変数とに次の変換を施す；

$$f = \begin{bmatrix} \varphi'_b & \varphi'_a \\ \varphi_b & \varphi_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_b^{-1} & 0 \\ 0 & \varphi_a^{-1} \end{bmatrix} \psi = \begin{bmatrix} -bt^k & -at^k \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \psi \quad (2)$$

$$\zeta = \frac{t^{k+1}}{k+1} \quad \text{ただし} \quad \varphi_b = \exp \frac{-bt^{k+1}}{k+1}, \quad \varphi_a = \exp \frac{-at^{k+1}}{k+1}$$

ψ に対する常微分方程式は次の形となる；

$$\frac{d}{d\zeta} \psi = \left(\begin{bmatrix} -b & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} + \frac{1}{\zeta} \begin{bmatrix} \frac{\alpha}{k+1} & \frac{\alpha+k}{k+1} \\ -\alpha & -\alpha-k \end{bmatrix} \right) \psi, \quad \alpha = \frac{c}{a-b}, \quad (3)$$

命題1. $\text{Ker } P(t, 1, D_t) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) \neq \{0\}$ であるための

必要十分条件は (3) が $\zeta \rightarrow \infty \quad \arg \zeta = 0, (k+1)\pi$ のときに急減少する nontrivial な解を持つことである。

注意. (3) 式の右辺第2項の係数行列の固有値は 0 と $-k/(k+1)$

で、これは (3) の解を原点で級数展開したときの指数である。

従って (3) の解はたしかに 原点の周囲を $(k+1)$ 回 まわれば もとの値にもどる。

$\zeta = \infty$ は 常微分方程式系 (3) の 非正則特異点である。

常微分方程式の一般論を (3) に適用すると

命題2. 半直線 $\{\text{Re}(a-b)\zeta = 0\}$ を含まないような

∞ の近傍の各角領域 S において (3) の基本系

$\phi_{1S}(\zeta), \phi_{2S}(\zeta)$ が存在して次の漸近展開を持つ。(1) 参照)

$$\begin{aligned}\phi_{1S}(\zeta) &\sim e^{-b\zeta} \zeta^{\frac{a}{k+1}} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{\zeta} \begin{pmatrix} \end{pmatrix} + \dots \right) \\ \phi_{2S}(\zeta) &\sim e^{-a\zeta} \zeta^{\frac{-a-k}{k+1}} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{\zeta} \begin{pmatrix} \end{pmatrix} + \dots \right)\end{aligned} \quad \begin{matrix} \text{as } \zeta \rightarrow \infty \\ \text{in } S \end{matrix} \quad (4)$$

角領域 S として特に $\arg \zeta = 0$ の部分を含む S_+ と $\arg \zeta = (k+1)\pi$ の部分を含む S_- をとり 上の命題に言う基本系 ϕ_{1S_+}, ϕ_{2S_+} と ϕ_{1S_-}, ϕ_{2S_-} とを考えよう。

命題 3. ϕ_{1S_+}, ϕ_{2S_+} を S_+ から S_- まで解析接続して

$$(\phi_{1S_+}, \phi_{2S_+}) = (\phi_{1S_-}, \phi_{2S_-}) F, \quad F: (2 \times 2) \text{ 定数行列}$$

と書けたとしよう。このとき 命題 1. の条件がなりたつための 必要十分条件は

$$F_{12} = 0 \quad (k: \text{奇}) \quad \text{または} \quad F_{22} = 0 \quad (k: \text{偶})$$

注意. ひとつの角領域から他の角領域へ移ると 漸近展開 (4) は もはや一般には成立しない。この事実は Stokes の現象として 知られている。

2. Stokes の現象

ここでは K. Okubo [2] の結果を 2 階の場合に應用する。次の system を考えよう。

$$\frac{d}{ds} X = \left(\begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} + \frac{1}{s} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \right) X, \quad L_2 < 0 < L_1 \quad (5)$$

σ_1, σ_2 ; $\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$ の固有値, $f_j = \begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{pmatrix}$: 対応する固有ベクトル

$$(B1) \quad L_1, L_2 \neq 0 \quad (B2) \quad \arg L_1 \neq \arg L_2$$

$$(A1) \quad \sigma_1 - \sigma_2 \notin \mathbb{Z} \quad (A2) \quad \sigma_j - A_{RR} \notin \mathbb{Z} \quad j, R=1, 2$$

補助方程式として 次の微分方程式を考える;

$$\left(uI - \begin{bmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{bmatrix} \right) \frac{dV_j}{du} = \left(\sigma_j I - \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \right) V_j, \quad (6)_j$$

V_{1j}, V_{2j} を $(6)_j$ の解で 次の形のものとせよ

$$V_{1j}(u) = (u - L_1)^{\sigma_j - A_{11}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + (u - L_1)() + \dots \right\} \quad (7)$$

$$V_{2j}(u) = (u - L_2)^{\sigma_j - A_{22}} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + (u - L_2)() + \dots \right\}$$

$$\text{ただし 偏角については} \quad \arg L_j - \pi < \arg(u - L_j) \leq \arg L_j + \pi \quad (8)$$

そこで $C_{Rj} = C_{Rj}(\arg L_1, \arg L_2)$ を次の形に定義する

$$\Gamma(A_{11} - \sigma_j) C_{1j} g_{1j} + \Gamma(A_{22} - \sigma_j) C_{2j} g_{2j} = f_j \quad (9)$$

$$\text{ただし} \quad g_{Rj} = (2\pi i)^{-1} (e^{-2\pi i(\sigma_j - A_{RR})} - 1) V_{Rj}(0)$$

この定義は gamma 因子を除いて [2] の定義と等価である。gamma 因子は [2] lemma 5 の $\Gamma(1 - \beta_p)$ に対応する。

ここで $S(L_j) = \{ \zeta : |\zeta| > K, |\arg L_j \zeta| \leq \frac{3}{2}\pi - \varepsilon \}$
 $S(\arg L_1, \arg L_2) = S(L_1) \cap S(L_2)$ とせよ。

定理 ([2]) 常微分方程式系 (5) の $\zeta = 0$ の近傍での基本
 行列 (基本系を並べたもの) と その $\zeta = \infty$ の近くでの
 漸近展開とは次の形で関係づけられる。 ([2] 末尾参照)

$$\left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix} + \zeta \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} + \dots \right\} \begin{bmatrix} \zeta^{\sigma_1} & 0 \\ 0 & \zeta^{\sigma_2} \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{\zeta} \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix} + \dots \right\} \begin{bmatrix} e^{L_1 \zeta} \zeta^{A_{11}}, & 0 \\ 0, & e^{L_2 \zeta} \zeta^{A_{22}} \end{bmatrix} \times$$

$$\times C(\arg L_1, \arg L_2)$$

$$\text{as } \zeta \rightarrow \infty \text{ in } S(\arg L_1, \arg L_2), \quad (10)$$

$$\text{更に } C_{Rj}(\theta_1 + 2q_1\pi, \theta_2 + 2q_2\pi) = C_{Rj}(\theta_1, \theta_2) \times e^{2q_1\pi i (A_{R1} - \sigma_1)} \quad (11)$$

もとの system (3) と (5) を比較してみよう。(3) の場合

$$\sigma_1 = 0, \quad \sigma_2 = -k/(k+1), \quad f_1 = \begin{pmatrix} \alpha+k \\ -\alpha \end{pmatrix}, \quad f_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (12)$$

従って (B1) (B2) (A1) は 既に満たされている。(A2) は,

$$(A2): \quad \alpha (= c/(a-b)) \not\equiv 0, 1 \pmod{k+1} \quad (13)$$

更に (10) 式の左辺を X とすると 命題 3 の記号では

$$(\phi_{1S+}, \phi_{2S+}) = X \cdot C^{-1}(0, -\pi), \quad (\phi_{1S-}, \phi_{2S-}) = X \cdot C^{-1}(-k\pi, \\ , -(k+1)\pi) \quad (k: \text{偶}), \quad (\phi_{1S-}, \phi_{2S-}) = X \cdot C^{-1}(-(k+1)\pi, -k\pi) \quad (k: \text{奇})$$

命題 4. system (3) は (A2) (13) 式) を満たすとせよ。

このとき
$$F = \begin{cases} C(-(k+1)\pi, -k\pi) \cdot C^{-1}(0, -\pi) & (k: \text{奇}) \\ C(-k\pi, -(k+1)\pi) \cdot C^{-1}(0, -\pi) & (k: \text{偶}) \end{cases}$$

3. $C_{kj} = C_{kj}(0, -\pi)$ の計算

まず $\tilde{f}_j = \begin{pmatrix} \beta_j \\ -d_j \end{pmatrix}$ と書くことにすれば r_j, l_j があって

$$\begin{bmatrix} A_{11} - \sigma_j & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} - \sigma_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_j^* \tilde{f}_j \\ l_j^* \tilde{f}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_j \beta_j & -r_j d_j \\ l_j \beta_j & -l_j d_j \end{bmatrix} \quad (14)$$

一方 (9) 式に上の記号を代入し C_{kj} について解くと

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Gamma(r_j \beta_j) C_{1j} \\ \Gamma(-l_j d_j) C_{2j} \end{pmatrix} &= \left[\left(\frac{e^{\frac{2\pi i r_j \beta_j}{2\pi i}} - 1}{2\pi i} \right) V_{1j}(0), \left(\frac{e^{\frac{-2\pi i l_j d_j}{2\pi i}} - 1}{2\pi i} \right) V_{2j}(0) \right]^{-1} \tilde{f}_j \\ &= K_j^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2\pi i} (e^{\frac{-2\pi i l_j d_j}{2\pi i}} - 1) (-\tilde{f}_j^* \cdot V_{2j}(0)) \\ \frac{1}{2\pi i} (e^{\frac{2\pi i r_j \beta_j}{2\pi i}} - 1) (\tilde{f}_j^* \cdot V_{1j}(0)) \end{bmatrix} \quad (15) \end{aligned}$$

ここで $K_j \neq 0$ で、最右辺の成分はベクトルの内積を表わす。ところで (6)_j から $\tilde{f}_j^* \cdot \nabla_{R_j}(u)$ は次の方程式の解である；

$$\frac{d}{du} (\tilde{f}_j^* \cdot \nabla_j) = \left(\frac{-r_j \beta_j}{u - L_1} + \frac{l_j d_j}{u - L_2} \right) (\tilde{f}_j^* \cdot \nabla_j) \quad (16)$$

更に $\tilde{f}_j^* \cdot \nabla_{R_j}(u)$ を決定する初期条件は (7) から与えられる。

かくして $C_{kj} = C_{kj}(0, -\pi)$ は次の如くに計算される；

まず、

$$\begin{aligned} \hat{f}_j \cdot V_j(u) &= \beta_j (L_1 - L_2)^{-l_j d_j} (u - L_1)^{-r_j \beta_j} (u - L_2)^{l_j d_j} \\ \hat{f}_j \cdot V_{2j}(u) &= -d_j (L_2 - L_1)^{r_j \beta_j} (u - L_1)^{r_j \beta_j} (u - L_2)^{l_j d_j} \end{aligned} \quad (17)$$

(A2) より $r_j \beta_j, -l_j d_j \notin \mathbb{Z}$ 。従って (14) (15) (17) により $C_{R_j}(0, -\pi)$ は K_j の因子を除いて完全に決定される。

注意 1. $r_j \beta_j, -l_j d_j \notin \mathbb{Z}$ からとくに、 $C_{R_j} \neq 0$ $R_j = 1, 2$ (18)

注意 2. (8) 式での偏角の選択により $C(0, -\pi)$ については $\arg(L_1 - L_2) = 0, \arg(L_2 - L_1) = \pi$

4. 応用と結論

(1), (14), (15), (17) の各式を用いて (A2) の仮定のもとで F が計算される。

(1) k ; 奇 のとき

$$\begin{aligned} (C(-(k+1)\pi, -k\pi) C^{-1}(0, -\pi))_{12} &= \\ &= C_{11} C_{12} (C_{11} C_{22} - C_{12} C_{21})^{-1} (-e^{-(k+1)r_1 \beta_1 \pi i} + e^{-(k+1)r_2 \beta_2 \pi i}) \\ &= C_{11} C_{12} (C_{11} C_{22} - C_{12} C_{21})^{-1} e^{-(k+1)r_2 \beta_2 \pi i} (1 - e^{-(k+1)(r_1 \beta_1 - r_2 \beta_2) \pi i}) \end{aligned}$$

(12) 式 を用いて

$$r_1 \beta_1 - r_2 \beta_2 = \sigma_2 - \sigma_1 = -k/(k+1)$$

k が 奇数であることと、前の注意 1 ((18) 式) により (A2) のもとでは $(C(-(k+1)\pi, -k\pi) C^{-1}(0, -\pi))_{12} \neq 0$

(ii) k : 偶 のとき

$$\begin{aligned} (C(-k\pi, -(k+1)\pi) C^{-1}(0, -\pi))_{22} &= \\ &= (C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21})^{-1} (-e^{k l_1 d_1 \pi i} C_{21}C_{12} + e^{k l_2 d_2 \pi i} C_{11}C_{22}) \end{aligned}$$

(14), (15), (17) の各式により

$$\begin{aligned} \frac{C_{11}C_{22}}{C_{21}C_{12}} &= \frac{(e^{-2\pi i l_1 d_1} - 1)(-d_1)(L_2 - L_1)^{l_1 \beta_1} (e^{2\pi i l_2 \beta_2} - 1)(\beta_2)(L_1 - L_2)^{-l_2 d_2}}{(e^{2\pi i l_1 \beta_1} - 1)(\beta_1)(L_1 - L_2)^{-l_1 d_1} (e^{-2\pi i l_2 d_2} - 1)(-d_2)(L_2 - L_1)^{l_2 \beta_2}} \times \\ &\quad \times \frac{\Gamma(-l_1 d_1) \Gamma(l_2 \beta_2)}{\Gamma(l_1 \beta_1) \Gamma(-l_2 d_2)} \end{aligned}$$

ここで 前の注意2. と恒等式 $l_1 \beta_1 + l_1 d_1 - l_2 \beta_2 - l_2 d_2 = 0$,

trace の不変性 ; $l_1 \beta_1 - l_2 d_2 = 0$, $-l_1 d_1 + l_2 \beta_2 = 0$

更に, $\{\Gamma(Z) \Gamma(-Z)\}^{-1} = -\pi^{-1} Z \sin \pi Z$ とを用いて

$$\begin{aligned} (C(-k\pi, -(k+1)\pi) C^{-1}(0, -\pi))_{22} &= \\ &= \frac{C_{21}C_{12}}{C_{11}C_{22} - C_{12}C_{21}} e^{k l_1 d_1 \pi i} \left\{ \left(\frac{\sin l_2 \beta_2 \pi}{\sin l_1 \beta_1 \pi} \right) e^{(k+1)(\sigma_2 - \sigma_1) \pi i} - 1 \right\} \end{aligned}$$

System (3) については (12) 式より

$$\left(\frac{\sin l_2 \beta_2 \pi}{\sin l_1 \beta_1 \pi} \right) e^{(k+1)(\sigma_2 - \sigma_1) \pi i} - 1 = \left(\frac{\sin \frac{d+k}{k+1} \pi}{\sin \frac{d}{k+1} \pi} \right) - 1$$

よって (A2) のもとでは

$$(\quad)_{22} = 0 \iff \alpha (= c/(a-b)) \equiv 1/2 \pmod{k+1}$$

以上によつて (A2) のもとで $\text{Ker } P(t, 1, D_t)$ が

調べられた。 $\text{Ker } P(t, -1, D_t)$ についても 全く同じ結論が導かれる。 $d = c/(a-b)$ は formal transpose をとっても 不変だから、

結論 I. (A2); $c/(a-b) \not\equiv 0, 1 \pmod{k+1}$ のとき

(i) k : 奇 ならば P は原点で局所可解

(ii) k : 偶 のとき $c/(a-b) \not\equiv 1/2 \pmod{k+1}$ ならば P は 原点で局所可解。

上記の(ii)で $c/(a-b) \equiv 1/2 \pmod{k+1}$ のときは (i) の急減少解が存在する。それを $f_{00}(t)$ としよう。 System (3) の解の原点の近傍での級数展開を (2)式を使って (i)の解にもとめてみると 指数 0 に対応するものは 原点で nonzero, 指数 $-k/(k+1)$ に対応するものは 原点で zero となる。

((i) の解 $\begin{pmatrix} f_0' \\ f_0 \end{pmatrix}$ の f_0 について考えている。) 急減少解を (10)式 によって 原点の近傍での級数解で表示してみると 注意 1 により $C_{Rf} \neq 0$ だから 指数 0 の成分は 0 ではない。よって $f_{00}(0) \neq 0$ 。 よって [5] の Lemma により

結論 II. (ii)' k : 偶 で $c/(a-b) \equiv 1/2 \pmod{k+1}$ ならば P は 原点で局所可解でない。

5. 3階方程式

$$P = (D_t - iat^k D_x)(D_t - ibt^k D_x)(D_t - ict^k D_x) + \\ + dt^{k-1} D_x (D_t - iet^k D_x) + ift^{k-2} D_x$$

a, b, c, d, e, f ; 定数, $\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b, \operatorname{Re} c \neq 0$

a, b, c : distinct

これは Grusin [3] で扱われた作用素の class の中の
2次元 3階のものにあたる。従って問題は 再び
 $\operatorname{Ker} P(t, \pm 1, D_t) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R})$ にある。

$P(t, 1, D_t) f_0(t) = 0$ を考えよう。

$$\begin{bmatrix} f_0'' \\ f_0' \\ f_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varphi_c'' & \varphi_b'' & \varphi_a'' \\ \varphi_c' & \varphi_b' & \varphi_a' \\ \varphi_c & \varphi_b & \varphi_a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_c^{-1} & 0 \\ 0 & \varphi_b^{-1} \\ 0 & \varphi_a^{-1} \end{bmatrix} v, \quad \xi = \frac{t^{k+1}}{k+1}$$

とすれば 常微分方程式系は

$$\frac{d}{d\xi} v = \left(\begin{bmatrix} -c & 0 \\ 0 & -a \end{bmatrix} + \frac{1}{\xi} A_1 + \frac{1}{\xi^2} A_2 \right) v, \quad A_j: \text{定数行列}$$

解の漸近展開は $\bar{e}^{c\xi} [\dots], \bar{e}^{b\xi} [\dots], \bar{e}^{a\xi} [\dots]$

の形だから 最もやさしい場合を考えると

結論 III. k : 偶 a, b, c : distinct で $\operatorname{Re} a, \operatorname{Re} b,$

$\operatorname{Re} c$ が 同符号であれば $\operatorname{Ker} P(t, \pm 1, D_t) \cap \mathcal{S}(\mathbb{R}) = \{0\}$

となり ψP は 原点で局所可解となる。

6. 文献

- [1] E. Coddington - N. Levinson : Theory of ordinary differential equations, McGraw-Hill 1955.
- [2] K. Okubo : A global representation of a fundamental set of solutions and a Stokes phenomenon for a system of linear ordinary differential equations, J. Math. Soc. Japan Vol 15 No.3 (1963) 268-288.
- [3] V. V. Grušin : On a class of hypoelliptic operators Math. USSR Sbornik Vol.12 No.3 (1970) 458-476.
- [4] A. Gilioli - F. Trèves : An example in the solvability theory of linear PDE's, Amer. Jour. Math. Vol. 96 No.2 (1974) 366-384.
- [5] A. Menikoff : Some examples of hypoelliptic partial differential equations, Math. Ann. 221 (1976), 167-181.
- [6] 清水信敬 : 局所可解性と Stokes の現象
修士論文, 京大 数理研 (1979)。