

平面尖点曲線と P^2 の 3 重被覆

新潟大教養 吉原久夫 (Hisao YOSHIHARA)

§1. Introduction

(1.1) 平面曲線 Γ に対して特異性はどれくらい許されるか？ ここで特異性とは ① 重複度 ② 特異点の性質（接線が何本あるか等）などという。よく知られたものに Γ が既約のとき *genus formula* がある。しかしこれは数値の組がこの公式を満たすように与えられても ② の与え方によっては、曲線が存在しないことが沢山あるし、また *cusp* (局所既約な特異点のこと) も *node* も区別しない。その他に変曲点公式、双対曲線の次数を与える式などもある。我々はこれらの他に Γ が存在するための必要条件を与える式を求めたい。まず次の結果が ‘orchard problem’ (line arrangements) との関係から示された ([H]): Γ を *reduced plane curve of degree d* (可約でもよい) とし特異性は高々 2 重点であるとする。 $\mu(\Gamma)$ を Γ の各特異点での *Milnor 数* の総和とすると,

Th. 1.1 $d = 2k$ (偶数) のとき $\mu(\Gamma) \leq 3k^2 - 3k + 1$.

この式は, ちょうど Γ で分岐する $\mathbb{P}^2$ の 2 重被覆を考えその特異点解消をしてヒカルル数と比較することで得られる.
 なお $d = 2k + 1$ のときは,

Th. 1.1' $\mu(\Gamma) \leq 3k^2 + k - 1$.

が示せるが, 次の不等式が成立すると思われる ([Y1]).

予想. $\mu(\Gamma) \leq 3k^2$.

これらの一つの応用として, 平面曲線の“非存在”を示せる. 典型的なものを一つあげると: C は平面曲線としたとき, $C - \{P\} \cong \mathbb{A}^1$, $\text{mult}_P C = 2$ なら $d \leq 5$, が成立する.

(1.2) 以上と同様のことを重複度が 3 以下のときにやってみよう.

C を irreducible plane curve of degree d とし, 特異点 P_i は cusp で $\text{mult}_{P_i} C \leq 3$ であるとする.

μ_i を P_i での Milnor 数 とする. このとき

$$\mu = \mu(C) = \sum_i 6 [\mu_i / 6] \quad (\text{ここに } [] \text{ は ガウス 記号})$$

と おく と 次の 不等式 が 成立する (cf. [Y2]):

$$\text{Th. 1.2.} \quad 7\mu < 6d^2 - 9d$$

g を C の normalization の genus とすると この式 から 次 が 従う:

$$\text{Cor. 1.3.} \quad 14g \geq d^2 - 12d + 16, \text{ とくに } C \text{ が 有理な} \\ \text{ら } d \leq 10.$$

genus formula から は $\overline{\lim}_{d \rightarrow \infty} \frac{\mu}{d^2} \leq 1$ が いえる が, 上の

定理 から は $\overline{\lim}_{d \rightarrow \infty} \frac{\mu}{d^2} \leq \frac{6}{7}$ が わかる. Th. 1.2 の 証明 は C

の embedded resolution に対して 宮岡不等式 の logarithmic version

を 適用して なされる. しかし 1.1 の 証明のときのように, C

で 分岐ある $\mathbb{P}^2$ の triple covering を 用いれば (d が 小さいときは)

もっと 良い 評価式 が 得られる. (但し d は 3 の 倍数のとき).

triple covering で 得られる 曲面 から 1-canonical map が birational

morphism とはる ような minimal surface of general type の例が
 沢山作れることもわかる。

§2. Results and outline of proof

C は irreducible plane curve of degree $d = 3e$ とし、各
 singular point は cusp で 重複度 ≤ 3 とする。

数列 $\underbrace{(2, \dots, 2)}_{m \text{ 個}}$ を $2(m)$, $\underbrace{(3, \dots, 3)}_{n \text{ 個}}$ を $3(n)$

$\underbrace{(3, \dots, 3, 2)}_{n \text{ 個}}$ を $3(n)+2$ と表わすことにある。 P を C の

cusp とするとき、 P の infinitely near singular points の multi-
 plicity sequence を 単に P の sequence という。

$$\left\{ \begin{array}{l} P_i \text{ は sequence } 2(m_i) \text{ をもつ cusp } (i=1, \dots, r), \\ Q_i \text{ は sequence } 3(n_i) \text{ をもつ cusp } (i=1, \dots, s) \\ Q_j \text{ は sequence } 3(n_i)+2 \text{ をもつ cusp } (j'=s+1, \dots, s+t) \end{array} \right.$$

とする。他の型の sequence をもつ cusp は無い。このとき

$$m = \sum_{i=1}^r \left[\frac{m_i}{3} \right], \quad n = \sum_{i=1}^{s+t} n_i, \quad M = m + n$$

$$k = \sum_{i=1}^r \left(m_i - 3 \left[\frac{m_i}{3} \right] \right) \quad \text{と置く。 } g \text{ は } C \text{ の normalization}$$

の genus とすると、 $2g = (d-1)(d-2) - 6M - 2t - 2k$ が成立

しており, 次の主張がすぐわかる.

Lem. 2.1. C の P_i 又は Q_i での局所方程式は各々

$$y^2 + x^{2n_i+1} \text{ 又は } y^3 + a(x)y + x^{N_i} = 0 \text{ である. 但し,}$$

$$N_i = 3n_i + 1 \text{ [resp. } 3n_i + 2 \text{]} \text{ かつ } \text{ord } a(x) \geq 2n_i + 1 \text{ [resp. } 2n_i + 2 \text{]}$$

ここに $i = 1, \dots, s$ [resp. $s+1, \dots, s+t$]. よって特に Q_i において

$$\mu_i = 6n_i \text{ [resp. } 6n_i + 2 \text{]}.$$

上のことより次がわかる.

Cor. 2.2. μ_i を P_i 又は Q_i での Milnor 数とすると

$$M = \sum_i [\mu_i / 6] = \frac{1}{6} \mu.$$

さて Th. 1.2 に対応する次の Th が成立する.

Th. 2.3. $10M + 4k + 4t \leq 13e^2 - 9e + 2$ ある

いは同じことだが, $5g \geq 3e^2 - 9e + k + t + 2$.

これは d が小さいとき ($d \leq 48$) のときには Th. 1.2 より良い評価を与えている. また次の系がなりたつ.

Cor. 2.4. C が rational [elliptic] なら $d = 3$ or 6
 $[3, 6 \text{ or } 9]$ である.

さて $d = 3$ で C が rational なら $y^2 + x^3 = 0$ (で定義される曲線) に射影同値であるが, $d = 6$ のとき次のことが言える.

Ex. 2.5. $C - \{P\} \cong \mathbb{A}^1$, $\text{mult}_P C = 3$, $d = 6$ と
 あると P の sequence は $3(3) + 2$ で $M = 3$, $t = 1$, であり, この
 ような C は必ず $\alpha \in \mathbb{C}$ が存在して,

$$C_\alpha : (y - x^2)^3 + \alpha(y - x^2)y^4 + xy^5 = 0$$

に射影同値である. 更に " C_α と C_β とが射影同値 $\Leftrightarrow$
 $\alpha^5 = \beta^5$ " も成立している.

さて C の defining equation を $F(z_0, z_1, z_2) = 0$ とし,
 weighted projective space $\mathbb{P}(1, 1, 1, e)$, $\deg z_i = 1$ for $i = 0, 1, 2$
 $\deg z_3 = e$, 内で

$$z_3^3 = F(z_0, z_1, z_2)$$

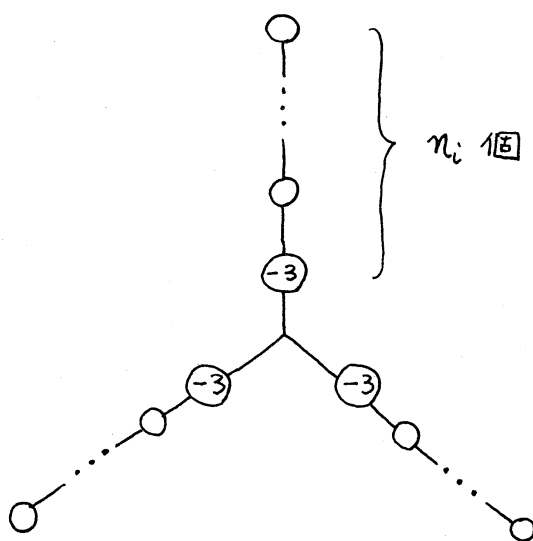
によって定義される曲面を F とする. このとき

$$\pi : F \longrightarrow \mathbb{P}^2$$

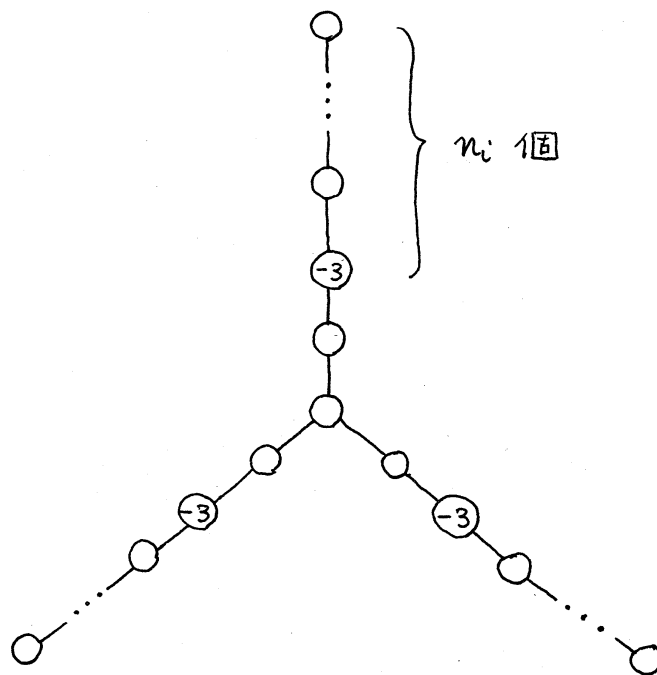
は C に沿って分岐している P^2 の triple covering である. F の特異点は C のそれに対応しており, F は normal Gorenstein surface である. $\sigma: S \longrightarrow F$ を minimal resolution とする.

K を S の canonical divisor, χ を S の topological Euler characteristic とする. そこで F の resolution を調べる. 概略を述べてと. P_i, Q_i に対応した F の特異点を各々 P_i^*, Q_i^* と表わす. あると P_i^* の近くでの局所方程式は $z^3 = y^2 + x^{2m_i+1}$, Q_i^* の近くでの局所方程式は $z^3 = y^3 + a(x)y + x^{N_i}$ である. ところで, (F, P_i^*) の resolution はよく知られており $g(P^*) = \dim(R^1\sigma_*\mathcal{O}_S)_{P^*}$ とおくと, $g(P_i^*) = [m_i/3]$ かつ P_i^* の arithmetic genus P_a は 1. 一方 (F, Q_i^*) の方は $g(Q_i^*) = n_i$ ($1 \leq i \leq s+t$) かつ $P_a = 1$, であり, $\sigma^{-1}(Q_i^*)$ の dual graph は: ($a(x)=0$ のときと同じ)

(1) $1 \leq i \leq s$ のとき $3n_i$ 個の頂点があり



(0) $s+1 \leq i \leq s+t$ のとき $3n_i + 4$ 個の頂点があり



従って特に $M = \dim H^0(F, R^1\sigma_* \mathcal{O}_S)$ が成立している.

即ち M は F 上の特異点の幾何種数の総和である.

さて C の特異点は cusp なので $\chi(C) = 2 - 2g$. F は $\mathbb{P}^2$ の 3 重被覆で C に沿って分岐しているから $\chi(F) = 5 + 4g$.

これより上記 resolution のグラフをみて

$$\chi = \chi(S) = m + 3n + 4k + 4t + 4g + 5 \quad \text{———(1)}$$

今 $h = \dim H^1(S, \Omega_S^1)$ とおくと,

$$\chi = 2 - 4g + 2p_g + h \quad \text{———(2)}$$

ここに $p_g = \dim H^2(S, \mathcal{O}_S)$, $g = \dim H^1(S, \mathcal{O})$.

exceptional curves は $H^2(S, \mathbb{Q})$ で一次独立であって, それらの既約成分数は $m + 3n + 4k + 4t$ であった. S は ample

divisor ももっているから

$$h \geq m + 3n + 4k + 4t + 1 \quad \text{---(3)}$$

また Leray spectral sequence より 次の exact sequence が ある.

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow H^1(F, \mathcal{O}_F) &\longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S) \longrightarrow H^0(F, R^1\sigma_* \mathcal{O}_S) \\ &\longrightarrow H^2(F, \mathcal{O}_F) \longrightarrow H^2(S, \mathcal{O}_S) \longrightarrow 0 \end{aligned}$$

なお F については次が成立している.

$$H^1(F, \mathcal{O}_F) = 0,$$

$\omega \cong \mathcal{O}_F(2e-3)$, ω は F の dualizing sheaf,

$$\dim H^0(F, \mathcal{O}_F(2e-3)) = \frac{1}{2}(e-1)(5e-4).$$

よって次の等式が得られる.

$$M + P_g = \frac{1}{2}(e-1)(5e-4) + g \quad \text{---(4)}$$

また C の genus formula は

$$g = \frac{1}{2}(d-1)(d-2) - 3M - t - k \quad \text{---(5)}$$

(1) ~ (5) をまとめると

$$10M + 4k + 4t - 2g \leq 13e^2 - 9e + 2$$

一方 $x = z_1/z_0$, $y = z_2/z_0$, $z = z_3/(z_0)^e$ として affine

部分 $z_0 \neq 0$ において F は $z^3 = f(x, y)$ ($= F(z_0, z_1, z_2)/z_0^d$)

で定義されている. いま X を A^3 で $z^3 = f(x, y)$ で定義され

た曲面としてこれの $\mathbb{P}^3$ での閉包をとってその nonsingular

model を $\tilde{X}$ とすると, Zariski $[Z]$ によって $g(\tilde{X}) = 0$ が

知られている. S と $\tilde{X}$ は双有理同値であるから $g = 0$

である。これで Th. 2.3 と 次の Lem. が得られた。

$$\text{Lem. 2.6. } M = \dim H^0(F, R^1\sigma_* \mathcal{O}_S),$$

$$P_g = (e-1)(5e-4)/2 - M, \quad g=0,$$

$$\chi = 9(2e^2 - 2e + 1) - 11m - 9n,$$

$$K^2 = 3(2e-3)^2 - (m+3n).$$

すると Th 2.3 とあわせて次の主張が得られる。

$$\text{Cor. 2.7. } P_g \geq \frac{3}{5}(2e^2 - 6e + 3),$$

$$K^2 \geq \frac{3}{10}(27e^2 - 111e + 88).$$

そこで S の構造を調べてみよう。まず $P_g \geq 1$ なら $|K|$ を調べることにより S は第1種例外曲線なしであることがわかる。以下 MG で *minimal surface of general type* を表わすことにする。次の主張はよく知られている：

$$\begin{aligned} & \text{" } S \text{ は第1種例外曲線なしで } P_2 = \dim H^0(S, \mathcal{O}(2K)) \\ & \geq 1 \text{ かつ } K^2 \geq 1 \iff S \text{ は } MG \text{ " } \end{aligned}$$

従って、上の Cor. によれば $e \geq 4$ なら S は MG である。次に 1-canonical map φ を調べる。まず $\mathcal{O}_S(K) \cong \mathcal{O}_S(D) \otimes \sigma^* \mathcal{O}_F(e-3)$, ここに D は $(\pi\sigma)^{-1}(C)$ に台をもつ正因子, である

ことが resolution σ を調べることで示せる. 従って φ は $e \geq 4$ のとき base point なしで $\varphi(S)$ は surface S_0 になることもわかる. 従って

Th. 2.8. $e \geq 4$ のとき S は MG であり, 1-canonical map φ は surface S_0 の上への morphism である.

さて, φ は C -isomorphism (定義は [B-P-V] の P. 215 を参照) になるかどうかを見よう. まず $K^2 \geq (\deg \varphi) \cdot (\deg \varphi(S))$ かなりたつ. Lem. 2.6 によると $5m + 3n < 3(e^2 + 3e - 9)$ のとき $\deg \varphi < 3$ であることがわかる. なぜなら $\deg \varphi(S) \geq 2p_g - 4$ であるから. 従って $\deg \varphi = 1$ を得られ, Z.M.T. より φ は C -isomorphism である. また $\psi = \sigma \varphi^{-1}$ も同様に Z.M.T. より morphism になることがわかり次の結論が得られる.

Th. 2.9. $e \geq 4$ の

$5m + 3n < 3(e^2 + 3e - 9)$ のとき

φ は C -isomorphism であって, morphism

$\psi: S_0 \rightarrow F$ で $\sigma = \psi \varphi$ を満すものが存在する. 即ち

resolution は ^{高々}有理 2 重点のみをもっている S_0 を経由して完

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{\sigma} & F \\ & \searrow \varphi & \nearrow \psi \\ & S_0 & \end{array}$$

成されている。

C が nonsingular で $e \geq 3$ なら $F = S$ でそれは MG で K は very ample である。

Rem. 2.10. $e = 3$ または 2 のとき S は MG か elliptic surface か rational surface である。とくに Ex. 2.5 から得られるものは rational surface である。これは $(\pi\sigma)^{-1}$ による C の proper transform を C' と表わるとき C' は nonsingular で

$$C'^2 = 2m + 3n + 2g - 6e^2 + 9e - 2$$

であることに注目すれば容易にわかる。 S が MG でないときは C' を fiber とする fiber space が作れるのである。

Cor. 2.4 と関係して次の問いが解けない。もしそのような C が存在すれば C' を fiber とする elliptic surface S が得られる。

Problem 2.11 elliptic curve C で $d = 9$, $r = t = 0$ かつ $n = 9$ とはなるものは存在するか？

この § の初に掲げた性質をもつ curve C は決山存在

することは、ほぼ明らかであるが、なお上の remark のように微妙なこともある。そこでいくつかの具体例を作ってみよう。それに対応して曲面 S が存在することになる。

Ex. 2.12. curve C_i , $i=1, 2$, は $f_i = 0$ で定義されているとする。

(1). $\deg f_1 = 3$, $\deg f_2 = e$, $e \neq 0$ (3) かつ C_1 と C_2 は transversal に交わっているとする。このとき $\lambda_1 f_1^e + \lambda_2 f_2^3$ で定義される curve Λ は (general な λ_1, λ_2 に対して) 次の性質を満たしている。

(1). Λ は irreducible.

(2). 各特異点は cusp で その sequence は, $3(h)$ [resp. $3(h)+2$], ここに $e = 3h+1$ [resp. $3h+2$].

(3). Λ の cusp の個数は $3e$, 従って $M = 3eh$.

とくに, $h \geq 1$ なら Th. 2.9 の条件は満たされている。

(□). $f_1 = y^3 + x^{3e-i} + x^{3e}$ ($i=1$ or 2), f_2 は一次式で C_1 と C_2 は $(0,0)$ 以外で transversal に交わっているとする。このとき $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2^{3e}$ で定義される curve Λ は次の性質を満たしている。

(1). Λ は irreducible.

(2). Λ はたゞ1個の特異点をもちそれは cusp

である。かつその *sequence* は $3(e-1)+2$ [resp. $3(e-1)$], 但し $i=1$ [resp. $i=2$].

とくに $e \geq 4$ なら Th. 2.9 の条件は満されている。

以上 §2 の内容について詳しい証明等は [Y3] を御覧下さい。

References

- [B-P-V] BARTH, W., PETERS, C., VAN DE VEN, A.: Compact complex surfaces, *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete* 3. Folge, Band 4, Springer 1983
- [H] HIRZEBRUCH, F.: Some examples of algebraic surfaces. *Contemporary Math.* 9, 55-71 (1982)
- [Y1] YOSHIHARA, H.: A note on the existence of some curves. *Algebraic Geometry and Commutative Algebra in Honor of M. Nagata*. 801-804 (1987)
- [Y2] _____ : Plane curves whose singular points are cusps. *Proc. Amer. Math. Soc.* 103, 737-740 (1988)
- [Y3] _____ : Plane curves whose singular points are cusps and triple coverings of $\mathbb{P}^2$. *manuscripta math.* 64, 169-187 (1989)
- [Z] ZARISKI, O.: On the linear connection index of the algebraic surfaces $z^n = f(x, y)$. *Proc. Nat. Acad. Sci.* 15, 494-501 (1929)