

閉リーマン面上の群作用が定める母関数

愛知産業大学経営学部 木村秀幸 (Hideyuki Kimura)

Faculty of Business Administration

Aichi Sangyo University

この論文では [2] に従い閉リーマン面上の群作用が定めるある種の母関数が有理関数となることを示す。

§ 1. 問題設定

Σ_g を種数 $g(\geq 0)$ の向き付け可能な閉曲面、 G を有限群、 $\text{Diff}^+(\Sigma_g)$ を Σ_g 上の向きを保つ微分自己同相写像全体の作る群とする。単射準同型写像

$$\tau: G \rightarrow \text{Diff}^+(\Sigma_g)$$

が存在するとき G は Σ_g 上に作用するという。 τ を Σ_g 上の G -作用と呼ぶ。

G を任意の有限群とする。このとき、 G -作用を許す Σ_g が常に存在するので問題となるのは $\{g | \Sigma_g \text{ が } G\text{-作用を許す}\}$ がどのような集合であるかである。この問いに対して Kulkarni は次のような解答を与えた。(証明については付録 2 参照)

定理 (Kulkarni [1]) 有限群 G に対して stable genus increment と呼ばれる正の整数 $n_0(G)$ が定まり、次の (1), (2) が成り立つ:

- (1) Σ_g ($g \geq 2$) が G -作用を許すとき $g \equiv 1 \pmod{n_0(G)}$ 。
- (2) $\{g | \Sigma_g \text{ が } G\text{-作用を許す}\}$ は $\{g(\geq 2) | g \equiv 1 \pmod{n_0(G)}\}$ から高々有限個の元を除いた集合。

この Kulkarni の定理から集合 $\{g | \Sigma_g \text{ が } G\text{-作用を許す}\}$ の g が十分大きい場合の様子が分かったので、次に問題となるのは Σ_g が “どの程度” G -作用を許すかである。このとき G -作用を数える基準が必要となる。このため q -同値という同値関係を定める:

定義 Σ_g 上の 2 つの G -作用

$$\tau_1, \tau_2: G \rightarrow \text{Diff}^+(\Sigma_g)$$

が q -同値とは $\Sigma_g/\tau_1(G)$ と $\Sigma_g/\tau_2(G)$ が orbifold として同型であることをいう。

N_g を Σ_g 上の G -作用の q -同値類の個数とする。このとき、

$$q_G(z) := \sum_{g \geq 0} N_g z^g$$

とおく。本論文の目的は次の定理を示すことである：

定理 G を任意の有限群とする。このとき、 $q_G(z)$ は z の有理関数である。

§ 2 . 準備

G を任意の有限群とし、以下これを固定する。 Σ_g 上の G -作用 $\tau: G \rightarrow \text{Diff}^+(\Sigma_g)$ は群 Γ から G への torsion free kernel を持つ全射準同型写像を定める。ただし、 Γ は次の表示を持つ：

$$\Gamma = \left\langle c_1, \dots, c_i, a_1, b_1, \dots, a_h, b_h \mid c_1^{m_1} = \dots = c_i^{m_i} = 1, \prod_{i=1}^i c_i \prod_{j=1}^h [a_j, b_j] = 1 \right\rangle$$

このとき、 $\sigma := (h; m_1, \dots, m_i)$ を Γ の signature と呼ぶ。また上記の表示を持つ Γ を $\Gamma(\sigma)$ と表す。

$O(G)$ を群 G の nontrivial な元の位数全体の集合とし、 $O(G) = \{n_1, \dots, n_r\}$ とする。そして

$$\Sigma(O) := \{(h; m_1, \dots, m_i) \mid m_i \in O(G), h \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\}$$

とおく。 $\Sigma(O)$ の元 $\sigma = (h; m_1, \dots, m_i)$ 、 $\sigma' = (h'; m'_1, \dots, m'_u)$ に対して和を次のように定義する：

$$\sigma + \sigma' = (h + h'; m_1, \dots, m_i, m'_1, \dots, m'_u)$$

$\Sigma(O)$ はこの和に関して半群となり、次の signature により生成される：

$$\sigma_0 = (1; -), \sigma_1 = (0; n_1), \dots, \sigma_r = (0; n_r).$$

$\Sigma(O)$ の任意の元 $\sigma = (h; m_1, \dots, m_i)$ は $r+1$ 個の非負の整数の組 $(a_0, a_1, \dots, a_r)$ を用いて

$$\sigma = a_0 \sigma_0 + a_1 \sigma_1 + \dots + a_r \sigma_r \quad (a_0 = h, a_i = \#\{m_j \mid m_j = n_i\})$$

と一意的に表されるので、以下、 σ と $(a_0, a_1, \dots, a_r)$ を同一視する。また

$\Sigma(G) := \{\sigma \in \Sigma(O) \mid \text{torsion free kernel を持つ全射準同型写像 } \phi: \Gamma(\sigma) \rightarrow G \text{ が存在する}\}$ とおき、

$$\Phi_{\Sigma(G)}(x_0, x_1, \dots, x_r) = \sum_{(a_0, a_1, \dots, a_r) \in \Sigma(G)} x_0^{a_0} x_1^{a_1} \dots x_r^{a_r} \quad \dots \quad (*)$$

と定義する。

§ 3 . 定理の証明

定理を証明するために上で定義した $\Phi_{\Sigma(G)}$ を含む 2 つの等式を示す。

$$(I) \quad q_G(z) = z^{1-o(G)} \Phi_{\Sigma(G)}(z^{n_0(G)q_0}, z^{n_0(G)q_1}, \dots, z^{n_0(G)q_r})$$

ただし、 $o(G)$ は G の位数、 $n_0(G)$ は stable genus increment、

$$q_0 = \frac{o(G)}{n_0(G)} \quad , \quad q_i = \frac{o(G)}{2n_0(G)} \left(1 - \frac{1}{n_i}\right) \quad (i=1, \dots, r).$$

$$(II) \quad \Phi_{\Sigma(G)}(x_0, x_1, \dots, x_r) = \frac{- \sum_{\sigma=(a_0, \dots, a_r) \in X} \mu(\hat{0}, \sigma) x_0^{a_0} x_1^{a_1} \dots x_r^{a_r}}{\prod_{i=0}^r (1 - x_i^2)}$$

ただし、 X は $\Sigma(G)$ のある有限部分集合、 μ は Möbius 関数 (付録 1 参照)、 $\hat{0}$ は補題 2 の証明参照。

定理の証明 (I)、(II) 式より

$$q_G(z) = z^{1-o(G)} \frac{- \sum_{\sigma=(a_0, \dots, a_r) \in X} \mu(\hat{0}, \sigma) z^{n_0(G) \sum_{i=0}^r a_i q_i}}{\prod_{i=0}^r (1 - z^{2n_0(G)q_i})}$$

さらに $q_0, \dots, q_r$ の定義および Riemann-Hurwitz の関係式より $q_G(z)$ が z の有理関数であることがわかる。

証明終

§ 4 . (II) 式の証明

(II) 式を示すために補題を 3 つ準備する。

定義 $\Sigma(O)$ の元 $(a_0, \dots, a_r), (b_0, \dots, b_r)$ に対して binary ordering と呼ばれる半順序 $\leq_B$ を次のように定める：

$$(a_0, \dots, a_r) \leq_B (b_0, \dots, b_r) \stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} a_i \leq b_i, \quad a_i \equiv b_i \pmod{2} \quad (i=0, \dots, r)$$

以下、 $\Sigma(O)$ 上には binary ordering $\leq_B$ が与えられているとする。

補題 1 K を $\Sigma(O)$ の空でない部分集合とする。このとき、 K の $\leq_B$ に関する極小元全体の集合は空でない有限集合である。

補題2 X を $\Sigma(O)$ の join-closed な有限部分集合とし、 $K = \bigcup_{\sigma \in X} C_\sigma$ とおく。ただし、

$C_\sigma = \{\tau \in \Sigma(O) \mid \sigma \leq_b \tau\}$ (C_σ を σ 上の cone と呼ぶ)。このとき、

$$\Phi_K = - \sum_{\sigma \in X} \mu(\hat{0}, \sigma) \Phi_{C_\sigma}$$

が成り立つ。 $(\Phi_K, \Phi_{C_\sigma})$ は (*) 式の $\Sigma(G)$ を K, C_σ としたもの、 X が join-closed であるとは X の2元 σ, τ に対して、最小上界 $\sigma \vee \tau$ (i.e. 集合 $\{\rho \in \Sigma(O) \mid \sigma \leq_b \rho, \tau \leq_b \rho\}$ の最小元) が、存在する場合には、常に X に含まれることをいう。

補題3 (1) 任意の $\sigma \in \Sigma(G)$ に対して $C_\sigma \subset \Sigma(G)$ が成り立つ。(このとき $\Sigma(G)$ は closed under cones であるという) (2) $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_r) \in \Sigma(G)$ に対して

$$\Phi_{C_\sigma}(x_0, x_1, \dots, x_r) = \frac{x_0^{a_0} x_1^{a_1} \dots x_r^{a_r}}{\prod_{i=0}^r (1 - x_i^2)}$$

が成り立つ。

補題2の証明 以下では $\leq_b$ を単に $\leq$ と表す。 $\hat{0} < \omega$ ($\forall \omega \in \Sigma(O)$) を満たす元 $\hat{0}$ を考える。

そして $C_{\hat{0}} := K \cup \{\hat{0}\}$ 、 $C'_\sigma = C_\sigma - \bigcup_{\substack{\rho \in X \\ \sigma < \rho}} C_\rho$ ($\sigma \in \hat{X} := X \cup \{\hat{0}\}$) とおく。このとき、

C_ρ ($\rho \in X$) は次のように有限個の集合の直和に分解される： $C_\rho = \sum_{\substack{\sigma \in \hat{X} \\ \rho \leq \sigma}} C'_\sigma$ 。

従って、 $F(\sigma) = \Phi_{C_\sigma}$ 、 $G(\sigma) = \Phi_{C'_\sigma}$ とおくと

$$F(\rho) = \Phi_{C_\rho} = \sum_{\substack{\sigma \in \hat{X} \\ \rho \leq \sigma}} \Phi_{C'_\sigma} = \sum_{\substack{\sigma \in \hat{X} \\ \rho \leq \sigma}} G(\sigma)$$

が得られる。この式に Möbius の反転公式 (付録1 参照、 $\hat{X}$ が有限集合なので Möbius の反転公式の仮定が満たされることに注意) を適用すると

$$G(\rho) = \sum_{\substack{\sigma \in \hat{X} \\ \rho \leq \sigma}} \mu(\rho, \sigma) F(\sigma)$$

が得られる。ここで $\mu(\rho, \sigma)$ は Möbius 関数。この式に $\rho = \hat{0}$ を代入することにより

$$\Phi_K = F(\hat{0}) - G(\hat{0}) = - \sum_{\sigma \in X} \mu(\hat{0}, \sigma) F(\sigma) = - \sum_{\sigma \in X} \mu(\hat{0}, \sigma) \Phi_{C_\sigma}$$

が得られる。

証明終

補題3の証明 $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_r) \in \Sigma(G)$ に対して

$$C_\sigma = \{(b_0, b_1, \dots, b_r) \in \Sigma(O) \mid a_i \leq b_i, a_i \equiv b_i \pmod{2} \ (i=0, \dots, r)\}$$

であることに注意する。

(1) 上の注意より任意の $\sigma \in \Sigma(G)$ に対して、 $\sigma' := \sigma + 2\sigma_l \ (l=0, \dots, r)$ が $\Sigma(G)$ に含まれることを示せばよい。 $(\sigma_0 = (1; -), \sigma_1 = (0; n_1), \dots, \sigma_r = (0; n_r))$ であった) そこで

$\phi: \Gamma(\sigma) \rightarrow G$ を torsion free kernel を持つ全射準同型写像とする、ただし、

$$\Gamma(\sigma) = \left\langle c_1, \dots, c_r, a_1, b_1, \dots, a_h, b_h \mid c_i^{m_i} = 1, \prod_{i=1}^r c_i \prod_{j=1}^h [a_j, b_j] = 1 \right\rangle \text{ とする。このとき}$$

$$\Gamma(\sigma') = \left\langle c_1, \dots, c_r, a_1, b_1, \dots, a_h, b_h, a_{h+1}, b_{h+1}, a_{h+2}, b_{h+2} \mid c_i^{m_i} = 1, \prod_{i=1}^r c_i \prod_{j=1}^{h+2} [a_j, b_j] = 1 \right\rangle \ (l=0 \text{ のとき})$$

$$\Gamma(\sigma') = \left\langle c_1, \dots, c_r, c_{t+1}, c_{t+2}, a_1, b_1, \dots, a_h, b_h \mid c_i^{m_i} = c_{t+1}^{n_i} = c_{t+2}^{n_i} = 1, \prod_{i=1}^{t+2} c_i \prod_{j=1}^h [a_j, b_j] = 1 \right\rangle \ (l>0 \text{ のとき})$$

となる。そして、 $\phi: \Gamma(\sigma') \rightarrow G$ を次のように定める：

$$l=0 \text{ のとき } \phi|_{\Gamma(\sigma)} = \phi, \phi'(a_{h+1}) = \phi'(b_{h+1}) = \phi'(a_{h+2}) = \phi'(b_{h+2}) = 1。$$

$$l>0 \text{ のとき } \phi|_{\Gamma(\sigma)} = \phi, \phi'(c_{t+1}) = s, \phi'(c_{t+2}) = s^{-1}, \text{ ただし、} s \text{ は } G \text{ の位数 } n_l \text{ の元。}$$

上で定めた $\phi: \Gamma(\sigma') \rightarrow G$ は torsion free kernel を持つ全射準同型写像なので

$\sigma' = \sigma + 2\sigma_l \in \Sigma(G) \ (l=0, \dots, r)$ が成り立つことがわかる。従って、 $\Sigma(G)$ が closed under cones であることがわかる。

(2) $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_r) \in \Sigma(G)$ に対して C_σ は上記の形をしているので

$$\begin{aligned} \Phi_{C_\sigma}(x_0, x_1, \dots, x_r) &= \sum_{(b_0, b_1, \dots, b_r) \in C_\sigma} x_0^{b_0} x_1^{b_1} \dots x_r^{b_r} = \sum_{k_0, k_1, \dots, k_r=0}^{\infty} x_0^{a_0+2k_0} x_1^{a_1+2k_1} \dots x_r^{a_r+2k_r} \\ &= \sum_{k_0=0}^{\infty} x_0^{a_0+2k_0} \sum_{k_1=0}^{\infty} x_1^{a_1+2k_1} \dots \sum_{k_r=0}^{\infty} x_r^{a_r+2k_r} = \frac{x_0^{a_0}}{1-x_0^2} \frac{x_1^{a_1}}{1-x_1^2} \dots \frac{x_r^{a_r}}{1-x_r^2} \end{aligned}$$

証明終

以上の準備の下で (II) 式の証明を述べる。

(II) 式の証明 補題1より $\Sigma(G)$ の極小元全体の集合は有限集合となる。 $\rho_1, \dots, \rho_m$ を

$\Sigma(G)$ の極小元全体とする。そして

$$X := \{\rho_{i_1} \vee \rho_{i_2} \vee \dots \vee \rho_{i_n} \mid \{\rho_{i_1}, \rho_{i_2}, \dots, \rho_{i_n}\} \text{は} \{\rho_1, \dots, \rho_m\} \text{の部分集合}\}$$

とおくと X は join-closed な有限集合となる。従って、この X は補題 2 の仮定を満たし、さらに

$$\Sigma(G) = \bigcup_{\sigma \in X} C_\sigma$$

を満たす。(⊃)は補題 3 (1) より得られる。(⊂)は X が $\Sigma(G)$ の極小元全体を含むことから得られる。) よって補題 2 より

$$\Phi_{\Sigma(G)} = - \sum_{\sigma \in X} \mu(\hat{0}, \sigma) \Phi_{C_\sigma}$$

が得られ、さらに補題 3 (2) より (II) 式が得られる。

証明終

参考文献

- [1] R.S.Kulkarni, Symmetries of surfaces, Topology **26**, No.2 (1987) pp.195-203.
- [2] C.Maclachlan and A.Miller, Generating functions for finite group actions on surfaces. Math. Proc.Camb.Phil.Soc.**124** (1998) pp.21-49.
- [3] R.P.Stanley, Enumerative combinatorics Vol.I, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 49 (Cambridge University Press)

付 録 1

Möbius関数 ([3, p.116]) locally finite な半順序集合 Σ 上の Möbius関数 $\mu : \text{Int}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{Z}$ とは

$$\mu(x, x) = 1 \quad \text{for all } x \in \Sigma$$

$$\mu(x, y) = - \sum_{x \leq z < y} \mu(x, z) \quad \text{for all } x < y \text{ in } \Sigma$$

で定まる関数 $\mu(x, y)$ のことをいう。ただし、 $\text{Int}(\Sigma)$ は Σ の区間 $[x, y] (= \{z \in \Sigma \mid x \leq z \leq y\})$ 全体の集合とし (空集合は区間に含めない)、 $\mu([x, y])$ を単に $\mu(x, y)$ と書く。また、半順序集合 Σ が locally finite であるとは任意の区間 $[x, y]$ が有限集合である場合をいう。

Möbiusの反転公式 ([3, p.116]) Σ を任意の cone $C_x (= \{y \in \Sigma \mid x \leq y\})$ が有限集合となる半順序集合とする。 f, g を Σ 上の複素数値関数とする。このとき

$$g(x) = \sum_{x \leq y} f(y) \text{ for all } x \in \Sigma \quad \Leftrightarrow \quad f(x) = \sum_{x \leq y} \mu(x, y) g(y) \text{ for all } x \in \Sigma$$

付 録 2 (Kulkarni の定理の証明)

以下では[1]に沿ってKulkarniの定理の証明を述べる。([2]の記号、定義とは異なる部分がある)

記号 G を位数 d の有限群、 δ を d の素因数全部の集合、 G_p を G の p Sylow 部分群、 G_p の位数を p^{n_p} 、 G の p -巾指数を p^{e_p} (すなわち、 G_p に含まれる元の位数の最大値が p^{e_p}) とする。さらに、 $p \in \delta$ に対して

$$f_p = \begin{cases} n_p - e_p & p \text{ が奇素数 または } p=2 \text{ かつ } n_2 = e_2 \text{ のとき} \\ n_2 - e_2 - 1 & p=2 \text{ かつ } n_2 > e_2 \text{ のとき} \end{cases}$$

$$N = \prod_{p \in \delta} p^{f_p}$$

とおく。

定義 有限群 G がタイプ I であるとは (1) G の 2 Sylow 部分群 G_2 が巡回群である、または (2) 集合 $\{x \in G_2 \mid |x| < 2^{e_2}\}$ ($|x|$ は元 x の位数) が G_2 の指数 2 の部分群にならない、のいずれかの条件を満たす場合をいう。 G がタイプ II であるとはタイプ I でない場合をいう。

注意 上記の定義より G がタイプ II ならば G_2 は非巡回群でありかつ次の性質を満たす全射準同型写像 $\varphi: G_2 \rightarrow \mathbb{Z}_2 = \{0, 1\}$ が存在する: $\varphi^{-1}(1)$ は位数 2^{e_2} の元からなり、 $\varphi^{-1}(0)$ は位数 $< 2^{e_2}$ の元からなる。

定理 G を有限群とし、

$$S = \begin{cases} \{g \mid g \geq 2, g \equiv 1 \pmod{N}\} & G \text{ がタイプ I のとき} \\ \{g \mid g \geq 2, g \equiv 1 \pmod{2N}\} & G \text{ がタイプ II のとき} \end{cases}$$

とおく。このとき、

(a) 種数 $g (\geq 2)$ の向き付け可能な閉曲面 Σ_g が G -作用を許すとき $g \in S$ 、

(b) 高々有限個の g を除き $g \in S$ ならば Σ_g は G -作用を許す
が成り立つ。

(a) の証明 前半では Σ_g が G -作用を許す場合、 G のタイプにかかわらず $g \equiv 1 \pmod{N}$ が成り立つことを示す。後半では Σ_g が G -作用を許し、さらに G がタイプ II のときには $g \equiv 1 \pmod{2N}$ が成り立つことを示す。

最初に G が p 群の場合を考察する。 Σ_g が G -作用を許すとする。分岐指数が p^j の分岐点 (Σ_g/G 上の点) が a_j 個あるとする ($j=1, \dots, e_p$) と分岐被覆 $\Sigma_g \rightarrow \Sigma_g/G$ に対する Riemann-

Hurwitz の関係式は

$$2-2g = p^{n'}(2-2h) - \sum_{j=1}^{e_p} (p^j-1)p^{n'-j}a_j \quad \dots \quad (*)$$

となる、ただし、 h は Σ_g/G の種数。

・ p が奇素数の場合 (*)式の右辺は $p^{n'-e_p}$ で割り切れるので $2-2g$ も $p^{n'-e_p} = p^{f_p}$ で割り切れる。従って、 $g \equiv 1 \pmod{p^{f_p}}$ が成り立つ。

・ $p=2$ かつ $n_2 > e_2$ の場合 (*)式の右辺は $2^{n_2-e_2}$ で割り切れるので $2-2g$ も $2^{n_2-e_2} = 2^{f_2+1}$ で割り切れる。従って、 $g \equiv 1 \pmod{2^{f_2}}$ が成り立つ。

・ $p=2$ かつ $n_2 = e_2$ の場合 この場合、(*)式が成立するためには a_{n_2} は偶数でなければならない。(*)式の両辺を2で割った式

$$1-g = 2^{n_2}(1-h) - \sum_{j=1}^{n_2-1} (2^j-1)2^{n_2-j-1}a_j - (2^{n_2}-1)\frac{a_{n_2}}{2}$$

から $g \equiv 1 \pmod{2^{n_2-e_2}}$ 、つまり $g \equiv 1 \pmod{2^{f_2}}$ が得られる。

次に G が一般の群の場合を考察する。任意の $p \in \delta$ に対して G_p を G の p Sylow 部分群とすると Σ_g は G_p -作用も許すので上記の議論から $g \equiv 1 \pmod{p^{f_p}}$ が成り立つ。従って、 G のタイプにかかわらず $g \equiv 1 \pmod{\prod_{p \in \delta} p^{f_p}}$ 、つまり $g \equiv 1 \pmod{N}$ が成り立つことがわかる。

次に G がタイプ II の群のときに $g \equiv 1 \pmod{2N}$ が成り立つことを示す。 G のタイプは G_2 のみから、 N の因子 p^{f_p} は G_p のみから定まるので G がタイプ II の2群の場合に $g \equiv 1 \pmod{2^{f_2+1}}$ を示せばよい。従って、以下では G をタイプ II の2群とし、そして $g \not\equiv 1 \pmod{2^{f_2+1}}$ を仮定して矛盾を導く。 $g \not\equiv 1 \pmod{2^{f_2+1}}$ は $2^{n_2-e_2} \mid (g-1)$ と同値であることに注意すると(*)式が成立するためには a_{e_2} は奇数でなければならない。一方、上記の分岐指数に関する条件を満たす G -作用が存在するための必要十分条件は G が次の条件を満たす生成元系を持つことである。

生成元 $u_1, v_1, \dots, u_h, v_h, x_{1,1}, \dots, x_{1,a_1}, \dots, x_{e_2,1}, \dots, x_{e_2,a_{e_2}}$

$$\text{関係式} \quad \prod_{i=1}^h [u_i, v_i] \prod_{j=1}^{e_2} \prod_{k=1}^{a_j} x_{j,k} = x_{j,k}^{2^j} = 1$$

G がこの生成元系を持つとする。 G はタイプ II の群なので上記の注意の条件を満たす全

射準同型写像 $\varphi: G_2 \rightarrow \mathbf{Z}_2 = \{0, 1\}$ が存在する。ところが a_{e_2} が奇数なので

$\varphi(\prod_{i=1}^h [u_i, v_i] \prod_{j=1}^{e_2} \prod_{k=1}^{a_j} x_{j,k}) \neq 0$ となり矛盾。以上の考察より $g \equiv 1 \pmod{2^{f_2+1}}$ が得られた。

(a)の証明終

(b)の証明 $\Delta = \{q \mid q: \text{素数巾}, G \text{ は位数 } q \text{ の元を含む}\} = \{q_1, \dots, q_m\}$ とおく。

証明の方針 十分大きな $g \in S$ に対して Riemann-Hurwitz の関係式

$$2 - 2g = d \left(2 - 2h - \sum_{n \in \Delta} a_n \left(1 - \frac{1}{n} \right) \right) \quad \dots \quad (**)$$

を満たす非負の整数の組 $(h, a_n (n \in \Delta))$ を考える。 (h, a_n) から定まる Fuchs 群

$$\Gamma = \left\langle u_1, v_1, \dots, u_h, v_h, x_{q_1,1}, \dots, x_{q_1,a_{q_1}}, \dots, x_{q_m,1}, \dots, x_{q_m,a_{q_m}} \left| \prod_{i=1}^h [u_i, v_i] \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^{a_{q_j}} x_{q_j,k} = x_{q_j,k}^{q_j} = 1 \right. \right\rangle$$

から G への torsion free kernel を持つ全射準同型写像が存在することを示す。

まず $g \in S$ を十分大きくとると(**)式は、与えられた定数より大きい整数解 (h, a_n) を持つことを示す。(**)式を次のように変形する。

$$\sum_{n \in \Delta} (n-1) \frac{d}{n} a_n + 2dh = 2(g-1) + 2d \quad \dots \quad (***)$$

(***)式を h, a_n の方程式とみなした場合、左辺の係数の最大公約数は $n_2 = e_2$ のとき N 、 $n_2 > e_2$ または $2 \mid d$ のとき $2N$ となる。(***)式が整数解を持つためには右辺は左辺の係数の最大公約数で割り切れなければならない。つまり、 $g \equiv 1 \pmod{N}$ でなければならない。 $g \equiv 1 \pmod{N}$ を満たす十分大きな g に対しては(***)式は非負の整数解を持つ。従って、必要ならば g をさらに大きくとることにより(***)式の与えられた定数より大きい整数解を作ることができる。

以下では g を $g \in S$ を満たす十分大きな整数とし、(このとき(***)式の整数解 (h, a_n) は十分大きい) (h, a_n) が定める Fuchs 群 Γ から G への torsion free kernel を持つ全射準同型写像 $\varphi: \Gamma \rightarrow G$ を構成する。

STEP1 $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_s\}$ を G の生成元系とする。このとき

$$\begin{aligned} \varphi(u_1) &= \varphi(v_1) = \tilde{e}_1, \dots, \varphi(u_s) = \varphi(v_s) = \tilde{e}_s, \\ \varphi(u_{s+1}) &= \hat{e}_1, \varphi(v_{s+1}) = \hat{e}_2, \dots, \varphi(u_h) = \hat{e}_{2(h-s)-1}, \varphi(v_h) = \hat{e}_{2(h-s)} \end{aligned}$$

と定める。 $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots, \hat{e}_{2(h-s)-1}, \hat{e}_{2(h-s)})$ は証明の最後で定める)

STEP2 $q_i (\in \Delta)$ が奇素数巾の場合

(i) a_{q_i} が偶数のとき $\varphi(x_{q_i,1}), \dots, \varphi(x_{q_i,a_{q_i}})$ を $\alpha, \alpha^{-1}, \alpha, \alpha^{-1}, \dots, \alpha, \alpha^{-1}$ と定める、ただし、 $\alpha (\in G)$ は位数 q_i の任意の元。

(ii) a_{q_i} が奇数のとき $\varphi(x_{q_i,1}), \dots, \varphi(x_{q_i,a_{q_i}})$ を $\alpha^2, \alpha^{-1}, \alpha^{-1}, \alpha, \alpha^{-1}, \alpha, \alpha^{-1}, \dots, \alpha, \alpha^{-1}$ と定める、ただし、 $\alpha (\in G)$ は位数 q_i の任意の元。

STEP3 $q_i (\in \Delta)$ が2巾の場合

(i) $n_2 = e_2$ のとき (すなわち G_2 は巡回群)

$$(n-1)\frac{d}{n} : \begin{cases} \text{奇数} & n = 2^{e_2} \text{のとき} \\ \text{偶数} & \text{その他の } n \in \Delta \text{のとき} \end{cases}$$

となるので(***)式より $a_{2^{e_2}}$ が偶数であることがわかる。

$a_{2^{j_1}}, \dots, a_{2^{j_l}} (j_1, \dots, j_l < e_2)$ が奇数、残りの $a_{2^j} (j < e_2)$ は偶数とする。まず、各 $i (1 \leq i \leq l)$ に対して $\varphi(x_{2^{j_i},1}), \dots, \varphi(x_{2^{j_i},a_{2^{j_i}}})$ を $\alpha_i, \alpha_i, \alpha_i^{-1}, \alpha_i, \alpha_i^{-1}, \dots, \alpha_i, \alpha_i^{-1}$ と定める、ただし、 $\alpha_i (\in G)$ は位数 2^{j_i} の任意の元。次に $\varphi(x_{2^{e_2},1}), \dots, \varphi(x_{2^{e_2},a_{2^{e_2}}})$ を $\beta_1, \beta_1', \beta_2, \beta_2', \dots, \beta_l, \beta_l', \beta_1, \beta_1^{-1}, \dots, \beta_l, \beta_l^{-1}$ と定める、ただし、 $\beta_i, \beta_i' (\in G)$ は $\alpha_i^{-1} = \beta_i \beta_i'$ を満たす位数 2^{e_2} の元。この条件を満たす β_i, β_i' の存在は、位数 2^{e_2} の巡回群において、位数 $< 2^{e_2}$ の任意の元は位数 2^{e_2} の2元の積として表される、ことから保証される。最後に a_{2^j} が偶数となる $\varphi(x_{2^j,1}), \dots, \varphi(x_{2^j,a_{2^j}})$ は $\alpha, \alpha^{-1}, \alpha, \alpha^{-1}, \dots, \alpha, \alpha^{-1}$ と定める、ただし、 $\alpha (\in G)$ は位数 2^j の任意の元。

(ii) $n_2 > e_2$ かつ G がタイプIIのとき

$a_{2^{e_2}}$ が偶数ならば位数 2^{e_2} の元が生成する巡回群に対して(i)で用いた方法を適用することにより φ を定めることができるので、以下では $a_{2^{e_2}}$ が偶数であることを示す。

G がタイプIIなので $g \equiv 1 \pmod{2N}$ 、特に $g \equiv 1 \pmod{2^{n_2-e_2}}$ が成り立つ。(***)式の右辺第1項は $2^{n_2-e_2+1}$ で割り切れるので左辺第1項も $2^{n_2-e_2+1}$ で割り切れなければならない。ところが

$$(n-1)\frac{d}{n} : \begin{cases} \text{ちょうど } 2^{n_2-e_2} \text{で割り切れる} & n = 2^{e_2} \text{のとき} \\ 2^{n_2-e_2+1} \text{で割り切れる} & \text{その他の } n \in \Delta \text{のとき} \end{cases}$$

なので(***)式が成り立つためには $a_{2^{e_2}}$ が偶数でなければならない。

(iii) $n_2 > e_2$ かつ G がタイプ I のとき

(iii-1) $a_{2^{e_2}}$ が偶数のとき (i) で用いた方法により φ を定めればよい。

(iii-2) $a_{2^{e_2}}$ が奇数のとき $g \equiv 1 \pmod{N}$ かつ $g \not\equiv 1 \pmod{2N}$ が成り立つ (もし $g \equiv 1 \pmod{2N}$ が成り立つならば(ii)の議論により $a_{2^{e_2}}$ が偶数となる)。 G_2 の位数 $< 2^{e_2}$ の元全体が生成する部分群を P とおく。 P は G_2 の正規部分群であり、 G_2/P は基本 Abel 群 $\mathbf{Z}_2 \times \cdots \times \mathbf{Z}_2$ に同型となる (G_2/P が可換であることは G_2/P の元の位数が 1 または 2 であることからわかる)。

・ $P = G_2$ の場合 位数 2^{e_2} の任意の元 α は位数 $< 2^{e_2}$ の元 $\beta_1, \dots, \beta_l$ の積として表される。

例えば、 $\beta_1, \dots, \beta_l$ の位数が $2^{j_1}, \dots, 2^{j_l}$ ($j_1 < \cdots < j_l < e_2$) であるとする。このとき

$\varphi(x_{2^{e_2},1}) = \alpha^{-1}$ 、 $\varphi(x_{2^{e_2},1}) = \beta_1, \dots, \varphi(x_{2^{e_2},1}) = \beta_l$ と定める。このように φ を定めると未決定

の $\varphi(x_{2^{e_2},2}), \dots, \varphi(x_{2^{e_2},a_{2^{e_2}}})$ の個数 $a_{2^{e_2}} - 1$ は偶数なので(i)で用いた方法により φ を定める

ことができる。($j_1 < \cdots < j_l$ でない場合も同様)

・ $P \neq G_2$ の場合 G はタイプ I (そして G_2 が非巡回群) なので $[G_2 : P] \neq 2$ 、つまり、 $[G_2 : P] \geq 4$ 。よって

$$G_2/P \cong \mathbf{Z}_2 \times \cdots \times \mathbf{Z}_2 \quad \left(\frac{1}{2}[G_2 : P] (\geq 2) \text{ 個の直積} \right)$$

となる。 G_2/P の異なる 2 つの生成元 $\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2$ ($\bar{\alpha}_1, \bar{\alpha}_2$ は G_2 の元 α_1, α_2 が定める G_2/P の元)

の積 $\bar{\alpha}_1 \bar{\alpha}_2$ はまた生成元となるので、まず $\varphi(x_{2^{e_2},1}) = \alpha_1, \varphi(x_{2^{e_2},2}) = \alpha_2, \varphi(x_{2^{e_2},3}) = (\alpha_1 \alpha_2)^{-1}$

と定める。このように φ を定めると未決定の $\varphi(x_{2^{e_2},4}), \dots, \varphi(x_{2^{e_2},a_{2^{e_2}}})$ の個数 $a_{2^{e_2}} - 3$ は偶数なので(i)で用いた方法により φ を定めることができる。

以上で定めた φ は積の順序の交換を行うと $\prod \prod \varphi(x_{q_j,k}) = 1$ を満たす。従って、

$\prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^{a_{q_j}} \varphi(x_{q_j,k})$ は G の交換子群に含まれる。STEP1 で未決定であった $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \dots$,

$\hat{e}_{2(h-s)-1}, \hat{e}_{2(h-s)}$ を $\varphi(\prod_{i=1}^h [u_i, v_i] \prod_{j=1}^m \prod_{k=1}^{a_{q_j}} x_{q_j,k}) = 1$ が成り立つように定める。 (b) の証明終

付 録 3

例 1 G が位数 p (奇素数) の巡回群 $\mathbf{Z}_p$ の場合の母関数 $q_G(z)$ ([2, p.23 および p.34]) .

このとき、 $O(G) = \{p\}$ 、 $n_0(G) = 1$ 、 $q_0 = p$ 、 $q_1 = \frac{p-1}{2}$ であり、

$$\Phi_{\Sigma(G)}(x_0, x_1) = \frac{x_0}{1-x_0} + \frac{x_1^2}{(1-x_0)(1-x_1)} \quad , \quad q_G(z) = \frac{z^p + z^{p-1} - z^{\frac{3p-1}{2}}}{z^{p-1}(1-z^p)(1-z^{\frac{p-1}{2}})} .$$

例 2 G が位数 2 の巡回群 $\mathbf{Z}_2$ の場合の母関数 $q_G(z)$ ([2, p.23 および p.34]) .

このとき、 $O(G) = \{2\}$ 、 $n_0(G) = 1$ 、 $q_0 = 2$ 、 $q_1 = \frac{1}{2}$ であり、

$$\Phi_{\Sigma(G)}(x_0, x_1) = \frac{x_0}{1-x_0} + \frac{x_1^2}{(1-x_0)(1-x_1^2)} \quad , \quad q_G(z) = \frac{1+z-z^2}{(1-z^2)(1-z)} .$$

例 3 G が位数 $2p$ (p : 奇素数) の二面体群 $D_p = \langle x, y | x^p = y^2 = 1, yxy = x^{-1} \rangle$ の場合の母関数 $q_G(z)$ ([2, p.32]) .

このとき、 $O(G) = \{2, p\}$ 、 $n_0(G) = 1$ 、 $q_0 = 2p$ 、 $q_1 = \frac{p}{2}$ 、 $q_2 = p-1$ であり、

$$\Phi_{\Sigma(G)}(x_0, x_1, x_2) = -x_0 - x_1^2 - \frac{1}{1-x_2} + \frac{1}{(1-x_0)(1-x_1^2)(1-x_2)} ,$$

$$q_G(z) = z^{1-2p} \left(-z^{2p} - z^p - \frac{1}{1-z^{p-1}} + \frac{1}{(1-z^{2p})(1-z^p)(1-z^{p-1})} \right) .$$