

古典量子チャネルに対する光変調 方式の情報伝送効率について

Al-jaroudi Nadeer, 菊池慶一, 渡邊 昇, 大矢雅則

東京理科大学理工学部情報科学科

〒278-8510 千葉県野田市山崎2641

e-mail:watanabe@is.noda.sut.ac.jp

1. 序章

Ohyaによって定式化された相互エントロピーは入力状態の情報がどれだけ出力系に正しく伝えられたかを表わす量であり、量子通信過程において非常に有用な量である。Ohya相互エントロピーを用いると量子通信路容量が定められる。通信路容量はチャネルが入力の情報量を最大でどれだけ正確に出力系に伝達することができるか計るための尺度であり、チャネルの設計に関して重要な基準となっている。

本論文では以上のことをふまえて、2章において、文献[1,9]に従って量子チャネル、量子チャネルの数学的構成法、そして減衰過程に対応する光チャネルの数理モデルの構成法について述べ、3章において、文献[1,3,5,9]に従って量子系のエントロピー、量子相互エントロピー、そして量子通信路容量について述べ、4章において、本研究で用いた光変調方式、C-Qチャネルの通信路容量について説明し、5章において、C-Qチャネル通信路容量の数値計算を行い、最後に6章では、まとめについて述べる。

2. 量子チャネル

$\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2$ をそれぞれ入力側, 出力側のヒルベルト空間とし, $\mathbf{B}(\mathcal{H}_k)$ を $\mathcal{H}_k$ 上の有界線形作用素の全体, $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_k)$ を $\mathcal{H}_k$ 上の密度作用素の全体とする ($k=1, 2$). $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1)$ から $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_2)$ への写像 Λ^* を量子チャネル (quantum channel) あるいは単にチャネル (channel) といい, アフィン性 (すなわち, $\sum_n \lambda_n = 1$ ならば $\Lambda^*\left(\sum_n \lambda_n \rho_n\right) = \sum_n \lambda_n \Lambda^*(\rho_n)$, $\forall \rho_n \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_1)$) を満たす Λ^* を線形 (linear) な量子チャネルという. さらに, $\mathbf{B}(\mathcal{H}_2)$ から $\mathbf{B}(\mathcal{H}_1)$ への写像 Λ が Λ^* の共役写像 (dual map) であるとは, 任意の $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_1)$ と任意の $A \in \mathbf{B}(\mathcal{H}_2)$ に対して, $\text{tr} \Lambda^*(\rho) A = \text{tr} \rho \Lambda(A)$ が成り立つものをいうが, この Λ が完全正写像であるとき, Λ^* を完全正チャネル (CPチャネル) と呼ぶ. なお, Λ が完全正写像であるとは, 任意の $n \in \mathbb{N}$ と任意の $A_j \in \mathbf{B}(\mathcal{H}_2)$ と任意の $B_k \in \mathbf{B}(\mathcal{H}_1)$ に対して,

$$\sum_{j,k=1}^n B_j^* \Lambda(A_j^* A_k) B_k \geq 0$$

を満たす場合をいう.

以下では, 文献[1,9]に従って量子チャネルの数学的構成法について簡単に説明する. 入力系と出力系のヒルベルト空間 $\mathcal{H}_1$ と $\mathcal{H}_2$ に加えて, 外部効果を記述する二つのヒルベルト空間 $\mathcal{K}_1, \mathcal{K}_2$ を用意する. ここで, $\mathcal{K}_1$ は雑音系のヒルベルト空間を表し, $\mathcal{K}_2$ は損失系のヒルベルト空間を表すものとする.

写像 a^*, π^*, γ^* は各々, 次のように定められる:

- (1) a^* は $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}_2)$ から $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_2)$ への完全正チャネルであり $a^*(\sigma) = \text{tr}_{\mathcal{K}_2} \sigma$, $\sigma \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}_2)$ と表せる.
- (2) π^* は $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1)$ から $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}_2)$ への完全正チャネルである.
- (3) γ^* は $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1)$ から $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1)$ への完全正チャネルであり, 定義より, 任意の $\rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_1)$ と任意の $Q \in \mathbf{B}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1)$ に対して

$$\text{tr} \gamma^*(\rho) Q = \text{tr}_{\mathcal{H}_1} \rho \gamma(Q) = \text{tr}_{\mathcal{H}_1} \rho \left(\text{tr}_{\mathcal{K}_1} \varsigma Q \right) = \text{tr}_{\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1} (\rho \otimes \varsigma) Q$$

となるから, $\gamma^*(\rho) = \rho \otimes \varsigma$ と表せる. 以上のことより,

完全正チャネル Λ^* は

$$\Lambda^*(\rho) = a^* \circ \pi^* \circ \gamma^*(\rho) = \text{tr}_{\mathcal{K}_2} \pi^*(\rho \otimes \varsigma), \quad \rho \in \mathfrak{S}(\mathcal{H}_1)$$

と書き表されるのである. 従って, 雑音状態 ς と合成系間の完全正チャネル π^* がわかれば, 光通信系のCPチャネル Λ^* が構成できたことになる.

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1) & \xrightarrow{\Lambda^*} & \mathfrak{S}(\mathcal{H}_2) \\
\gamma^* \downarrow & & \uparrow a^* \\
\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1) & \xrightarrow{\pi^*} & \mathfrak{S}(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}_2)
\end{array}$$

図 2.1 チャネル $a^*, \pi^*, \gamma^*, \Lambda^*$

次に文献[1,9]に従って減衰過程に対応する光チャネルの数値モデルの構成法について説明する．雑音源は真空状態 $\varsigma_0 = |0\rangle\langle 0|$ によって記述されているものとする．さらに $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1$ から $\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}_2$ への変換 V_0 を次のように定める；

$$V_0(|n\rangle \otimes |0\rangle) \equiv \sum_{j=0}^n c_j^{(n)} |j\rangle \otimes |n-j\rangle$$

ここで,

$$c_j^{(n)} \equiv \sqrt{\frac{n!}{j!(n-j)!}} \alpha^j (-\beta)^{n-j}$$

となる． V_0 を用い, $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{K}_1)$ から $\mathfrak{S}(\mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{K}_2)$ へのCPチャネル π_0^* を

$$\pi_0^*(\cdot) = V_0(\cdot) V_0^*$$

で定める．従って, 入力状態 ρ に対するチャネル Λ_0^* は

$$\Lambda_0^*(\rho) = \text{tr}_{\mathcal{K}_2} V_0(\rho \otimes \varsigma) V_0^*$$

と定められる[1]．なお, $\eta = \alpha^2$ とおき, この η をチャネルの透過率

(1光子がチャネルを通過できる確率) という．このとき, $c_j^{(n)}$ は

$$c_j^{(n)} = \sqrt{\frac{n!}{j!(n-j)!}} \eta^j (1-\eta)^{n-j}$$

と表すこともできる．この Λ_0^* を減衰チャネルという．さらに, より一般の雑音のある量子チャネルの研究も行われている[7]．

3. 量子系の相互エントロピーと量子通信路容量

量子系のエントロピーの定式化は 1930年頃 von Neumann によって, 密度作用素 ρ で表される状態に対して

$$S(\rho) = -\text{tr} \rho \log \rho \quad (3.1)$$

で与えられた[1,4,9,10]．すなわち, ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ のあるCONSを $\{x_n\}$ とすると,

$$S(\rho) = -\sum_n \langle x_n, \rho \log \rho x_n \rangle$$

で定められ, これは $\text{CONS}\{x_n\}$ の選び方に依存しない. ところで, $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ のスペクトルは離散的であるから, そのスペクトル分解は, 一意に,

$$\rho = \sum_n \lambda_n P_n$$

と書ける. ここで λ_n は ρ の固有値, P_n は λ_n に関する固有空間への $\mathcal{H}$ からの射影作用素である. 従って, 各 λ_n に縮退がなければ, P_n の値域の次元は 1 である (これを, $\dim P_n = 1$ と書く). ある固有値 λ_n が縮退している場合は, $\dim P_n \geq 2$ であるが, この P_n は 1 次元射影作用素に更に分解される:

$$P_n = \sum_{j=1}^{\dim P_n} E_j^{(n)}. \quad (3.2)$$

ここで $E_j^{(n)}$ は 1 次元射影作用素で, ρ の λ_n に関する固有ベクトルを $x_j^{(n)}$ ($j=1, \dots, \dim P_n$) とすると $E_j^{(n)} = |x_j^{(n)}\rangle\langle x_j^{(n)}|$ である. これらの 1 次元射影 $\{E_j^{(n)}\}$ の添字 j, n を適当に付け変えて,

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots, \quad (3.3)$$

$$E_n \perp E_m \quad (n \neq m), \quad (3.4)$$

$$\rho = \sum_n \lambda_n E_n \quad (3.5)$$

と書き表し, この分解を Schatten 分解 (von Neumann-Schatten 分解) とよぶことにする[11]. なお, 式 (3.3) において, 重複度が 2 以上の固有値はその回数だけ繰り返し現われている. たとえば, λ_1 の重複度が 2 のときは, $\lambda_1 = \lambda_2$ である. また, 単純 (固有値が縮退していない) でない固有値に対する分解 (3.2) は一意でないことから, すべての固有値が単純でなければ, 分解 (3.5) も一意でない. 以下, とくに断らない限り ρ と σ は $\mathfrak{S}(\mathcal{H})$ の元とし, $\rho = \sum_n \lambda_n E_n$ と書けば, これは (3.3)~(3.5) を満たす Schatten 分解とする.

次に量子相互エントロピーについて説明する. 入力状態 ρ の Schatten 分解を

$$\rho = \sum_k \lambda_k E_k$$

とする. 初期状態 ρ と終状態 $\Lambda^* \rho$ の間に存在する相関を顕示する合成状態 σ_E は $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$ 上に

$$\sigma_E = \sum_n \lambda_n E_n \otimes \Lambda^* E_n \quad (3.6)$$

と定められている[1]. ただし, この分解は $E = \{E_n\}$ の選び方に依存するので添え字 E を付してある. このとき, 量子相互エントロピーは次の条件を満たさなければならない:

- 1) もし, チャンネル Λ^* が恒等変換 id であれば相互エントロピーは von Neumann エントロピーに一致する. すなわち, $I(\rho; id) = S(\rho)$.

2) 系が古典系であれば量子相互エントロピーは古典系の相互エントロピーに一致する.

3) 基本不等式 $0 \leq I(\rho; \Lambda^*) \leq \min\{S(\rho), S(\Lambda^* \rho)\}$ を満たす.

この三つの条件を満たすものとして, 入力状態 ρ とチャネル Λ^* に関する相互エントロピー (情報量) は,

$$I(\rho; \Lambda^*) = \sup_E S(\sigma_E, \sigma_0) \quad (3.7)$$

で定められている[1]. ここで, 右辺の上限は入力状態 ρ のSchatten 分解に対して取っている. また, σ_0 は,

$$\sigma_0 = \rho \otimes \Lambda^* \rho, \quad (3.8)$$

$S(\sigma_E, \sigma_0)$ は次の式で与えられる2つの状態 σ_E, σ_0 に関する相対エントロピーである[4].

$$S(\sigma_E, \sigma_0) \equiv \text{tr} \sigma_E (\log \sigma_E - \log \sigma_0) \quad (3.9)$$

この量子相互エントロピーは, 初期状態 ρ がチャネル Λ^* によって $\Lambda^* \rho$ に変換されたとき, ρ の有する情報のどれほどが終状態 $\Lambda^* \rho$ に正しく伝えられたかを表す量である. さらに相互エントロピーは次の基本的不等式を満たす.

<定理6.1> 相互エントロピーは次の基本的不等式を満たす.

$$0 \leq I(\rho; \Lambda^*) \leq \min\{S(\rho), S(\Lambda^* \rho)\}$$

次に, 文献[3,5,9]に従って, 量子通信路容量について説明する. ある条件を満たす入力状態の集合を $\mathcal{S} \subset \mathfrak{S}(\mathcal{H})$ とする. この $\mathcal{S}$ に対して, 量子チャネル Λ^* の量子通信路容量は,

$$C_q(\Lambda^*) = \sup\{I(\rho; \Lambda^*); \rho \in \mathcal{S}\}$$

で定められている[2,3,5,6,9].

古典-量子チャネル $\Lambda^* \circ \Xi^*$, 古典-量子-量子チャネル $\tilde{\Xi}^* \circ \Lambda^* \circ \Xi^*$ に対しても, 以下のように通信路容量が定義される.

$$C_{cq}^{P_0}(\Lambda^* \circ \Xi^*) = \sup \left\{ \sum_k \lambda_k S(\Lambda^* \circ \Xi^*(\delta_k), \Lambda^* \circ \Xi^*(p)); p \in P_0 \right\}$$

$$C_{cq qc}^{P_0}(\tilde{\Xi}^* \circ \Lambda^* \circ \Xi^*) = \sup \left\{ \sum_k \lambda_k S(\tilde{\Xi}^* \circ \Lambda^* \circ \Xi^*(\delta_k), \tilde{\Xi}^* \circ \Lambda^* \circ \Xi^*(p)); p \in P_0 \right\}$$

ここで P_0 は入力状態のある集合を表している.

4. 光変調方式Mに対するC-Qチャネル通信路容量

この章では、本研究で用いた光変調方式について説明する．ここでは簡単のため入力信号を0または1の2元信号とする．

1) OOK (オン・オフキーイング; On - Off - Keying) 方式

次のような光の量子状態に変換する方法を PAM 変調方式という．

$$0 \rightarrow |0\rangle\langle 0| \quad 1 \rightarrow |\theta\rangle\langle \theta|$$

ここで、 $|0\rangle$ は真空状態ベクトルを表し、 $|\theta\rangle$ は $|\theta\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\theta|^2\right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\theta^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$ で表されるコヒーレント状態ベクトルである．

2) PPM (パルス位置変調; Pulse Position Modulation) 方式

次のような光の量子状態に変換する方法を PPM 変調方式という．

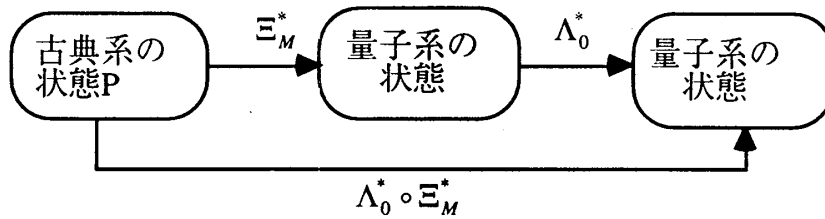
$$0 \rightarrow |0\rangle\langle 0| \otimes |\theta\rangle\langle \theta| \quad 1 \rightarrow |\theta\rangle\langle \theta| \otimes |0\rangle\langle 0|$$

3) PWM (パルス幅変調; Pulse Width Modulation) 方式

次のような光の量子状態に変換する方法を PWM 変調方式という．

$$0 \rightarrow |0\rangle\langle 0| \otimes |\theta\rangle\langle \theta| \quad 1 \rightarrow |\theta\rangle\langle \theta| \otimes |\theta\rangle\langle \theta|$$

本研究では、次のようなC-Qチャネルの通信路容量を相互エントロピーを用いて求めている．



古典系の状態は M という光変調方式によって定まる古典-量子チャネル Ξ_M^* で量子系の状態に移される。さらに量子系の状態は減衰チャネル Λ_0^* で量子系の状態に移される。 $p = \lambda_0 \delta_0 + \lambda_1 \delta_1$ $\left(\lambda_0 + \lambda_1 = 1, \delta_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \delta_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right)$ とすると各光変調方式 M に対する古典-量子チャネル Ξ_M^* は次のように定まる。

- | | |
|--|---|
| 1) $\Xi_{OOK}^*(\delta_0) = 0\rangle\langle 0 $ | $\Xi_{OOK}^*(\delta_1) = \theta\rangle\langle \theta $ |
| 2) $\Xi_{PPM}^*(\delta_0) = 0\rangle\langle 0 \otimes \theta\rangle\langle \theta $ | $\Xi_{PPM}^*(\delta_1) = \theta\rangle\langle \theta \otimes 0\rangle\langle 0 $ |
| 3) $\Xi_{PWM}^*(\delta_0) = 0\rangle\langle 0 \otimes \theta\rangle\langle \theta $ | $\Xi_{PWM}^*(\delta_1) = \theta\rangle\langle \theta \otimes \theta\rangle\langle \theta $ |

入力状態 $p = \lambda_0 \delta_0 + \lambda_1 \delta_1$ のとき, 古典-量子-量子チャネル $\Lambda_0^* \circ \Xi_M^*$ の通信路容量は次のように定められている.

$\mathcal{S} = \{p \mid p = \lambda_0 \delta_0 + \lambda_1 \delta_1; \lambda_0 + \lambda_1 = 1; \lambda_0, \lambda_1 \in [0, 1]\}$ に対して

$$C_{cqq}^{\mathcal{S}}(\Lambda_0^* \circ \Xi_{OOK}^*) = \sup \left\{ \sum_k \lambda_k S(\Lambda_0^* \circ \Xi_{OOK}^*(\delta_k), \Lambda_0^* \circ \Xi_{OOK}^*(p)); p \in \mathcal{S} \right\}$$

$$C_{cqq}^{\mathcal{S}}(\Lambda_0^* \circ \Xi_{PPM}^*) = \sup \left\{ \sum_k \lambda_k S(\Lambda_0^* \circ \Xi_{PPM}^*(\delta_k), \Lambda_0^* \circ \Xi_{PPM}^*(p)); p \in \mathcal{S} \right\}$$

$$C_{cqq}^{\mathcal{S}}(\Lambda_0^* \circ \Xi_{PWM}^*) = \sup \left\{ \sum_k \lambda_k S(\Lambda_0^* \circ \Xi_{PWM}^*(\delta_k), \Lambda_0^* \circ \Xi_{PWM}^*(p)); p \in \mathcal{S} \right\}$$

5. C-Qチャネル通信路容量の数値計算

この章では各変調方 M に対して入力状態が $p = \lambda_0 \delta_0 + \lambda_1 \delta_1$ とチャネル $\Lambda_0^* \circ \Xi_M^*$ のそれぞれの Ohya 相互エントロピーを計算し, それぞれの変調方式 M を用いたときの情報伝送の効率を量子通信路容量を用いて比較する. なお, 光変調方式の効率は文献[12]などでなされている.

1) OOK について: 入力状態が $p = \lambda_0 \delta_0 + \lambda_1 \delta_1$ のとき

$$\Xi_{OOK}^*(p) = \lambda |0\rangle\langle 0| + (1-\lambda) |\theta\rangle\langle \theta|$$

となる. このとき, 次の定理が知られている[4,9].

<定理5.1> 任意の非直交ベクトルの組 $|x\rangle, |y\rangle \in \mathcal{H}$ によって与えられた状態 ρ

$$\rho = \lambda |x\rangle\langle x| + (1-\lambda) |y\rangle\langle y| \quad (\forall \lambda \in [0, 1])$$

の von Neumann 分解は一意である.

この定理より, $\Xi_{OOK}^*(p) = \lambda |0\rangle\langle 0| + (1-\lambda) |\theta\rangle\langle \theta|$ は, 次のように一意の非縮退シャッテン分解ができる.

$$\Xi_{OOK}^*(p) = \mu_0 E_0 + \mu_1 E_1 = \mu_0 |\mu_0\rangle\langle \mu_0| + \mu_1 |\mu_1\rangle\langle \mu_1|$$

ここで, $\Xi_{OOK}^*(p)$ の固有値 μ_0 と μ_1 は,

$$\mu_0 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sqrt{1 - 4\lambda(1-\lambda)(1 - \exp(-|\theta|^2))} \right\}$$

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sqrt{1 - 4\lambda(1-\lambda)(1 - \exp(-|\theta|^2))} \right\}$$

$\mathcal{H}_0$ を $|0\rangle$ と $|\theta\rangle$ から生成される $\mathcal{H}$ の閉部分空間とすると, $\mathcal{H}_0$ から $\mathbf{C}^2$ へのユニタリー作用素 U

$$U|0\rangle = |y_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^2 \quad U|\theta\rangle = |y_1\rangle = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^2$$

が存在する. ここで,

$$u_0 = \langle y_0, y_1 \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\theta|^2\right) \quad u_1 = \sqrt{1 - \exp(-|\theta|^2)} \exp(i\omega_0)$$

である. また, 透過率 η をもった減衰過程のチャネル Λ_0^* に対する出力状態は,

$$\Lambda_0^* \circ \Xi_{OOK}^*(p) = (1-\lambda)|0\rangle\langle 0| + \lambda|\sqrt{\eta}\theta\rangle\langle\sqrt{\eta}\theta|$$

となる. このとき, $\mathcal{H}_{\theta_\eta}$ を $|0\rangle$ と $|\theta_\eta\rangle$ から生成される $\mathcal{H}$ の閉部分空間とすると, $\mathcal{H}_{\theta_\eta}$ から $\mathbf{C}^2$ へのユニタリー作用素 V :

$$V|0\rangle = |z_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^2, \quad V|\theta\rangle = |z_1\rangle = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \in \mathbf{C}^2$$

が存在する. ここで,

$$v_0 = \langle z_0, z_1 \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\theta_\eta|^2\right) \quad v_1 = \sqrt{1 - \exp(-|\theta_\eta|^2)} \exp(i\omega_1)$$

である. さらに, $\Lambda_0^* \circ \Xi_{OOK}^*(p)$ の固有値は,

$$v_0 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sqrt{1 - 4\lambda(1-\lambda)(1 - \exp(-|\theta_\eta|^2))} \right\},$$

$$v_1 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sqrt{1 - 4\lambda(1-\lambda)(1 - \exp(-|\theta_\eta|^2))} \right\}$$

である. 以上のことから, 量子系の相互エントロピーは,

$$I(p; \Lambda_0^* \circ \Xi_{OOK}^*) = S(\Lambda_0^* \circ \Xi_{OOK}^*(p))$$

で一意に求められる. また,

$$S(\Lambda_0^* \circ \Xi_{OOK}^*(p)) = - \sum_{k=0}^1 v_k \log v_k$$

である.

2) PPM方式について: 入力状態が $p = \lambda_0\delta_0 + \lambda_1\delta_1$ のとき

$$\begin{aligned} \Xi_{PPM}^*(p) &= \lambda|0\rangle\langle 0| \otimes |\theta\rangle\langle\theta| + (1-\lambda)|\theta\rangle\langle\theta| \otimes |0\rangle\langle 0| \\ &= \lambda|0\rangle \otimes |\theta\rangle\langle 0| \otimes \langle\theta| + (1-\lambda)|\theta\rangle \otimes |0\rangle\langle\theta| \otimes \langle 0| \end{aligned}$$

となる. 定理5.1より, $\Xi_{PPM}^*(p) = \lambda|0\rangle \otimes |\theta\rangle\langle 0| \otimes \langle\theta| + (1-\lambda)|\theta\rangle \otimes |0\rangle\langle\theta| \otimes \langle 0|$ は,

次のように一意の非縮退シャッテン分解ができる.

$$\Xi_{PPM}^*(p) = \mu_0 E_0 + \mu_1 E_1 = \mu_0 |\mu_0\rangle\langle\mu_0| + \mu_1 |\mu_1\rangle\langle\mu_1|$$

ここで、 $\Xi_{PPM}^*(p)$ の固有値 μ_0 と μ_1 は、次のようなる.

$$\mu_0 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sqrt{1 - 4\lambda(1-\lambda)(1 - \exp(-2|\theta|^2))} \right\}$$

$$\mu_1 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sqrt{1 - 4\lambda(1-\lambda)(1 - \exp(-2|\theta|^2))} \right\}$$

$\mathcal{H}_0$ を $|0\rangle \otimes |\theta\rangle$ と $|\theta\rangle \otimes |0\rangle$ から生成される $\mathcal{H}$ の閉部分空間とすると、 $\mathcal{H}_0$ から $\mathbb{C}^2$ へのユニタリー作用素 U

$$U|0\rangle \otimes |\theta\rangle = |y_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \quad U|\theta\rangle \otimes |0\rangle = |y_1\rangle = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

が存在する. ここで,

$$u_0 = \langle y_0, y_1 \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\theta|^2\right) \quad u_1 = \sqrt{1 - \exp(-|\theta|^2)} \exp(i\omega_0)$$

である. また、透過率 η をもった減衰過程のチャネル Λ_0^* に対する出力状態は,

$$\Lambda_0^* \circ \Xi_{PPM}^*(p) = \lambda |0\rangle\langle 0| \otimes |\sqrt{\eta}\theta\rangle\langle\sqrt{\eta}\theta| + (1-\lambda) |\sqrt{\eta}\theta\rangle\langle\sqrt{\eta}\theta| \otimes |0\rangle\langle 0|$$

となる. このとき、 $\mathcal{H}_{\theta_\eta}$ を $|0\rangle \otimes |\sqrt{\eta}\theta\rangle$ と $|\sqrt{\eta}\theta\rangle \otimes |0\rangle$ から生成される $\mathcal{H}$ の閉部分空間とすると、 $\mathcal{H}_{\theta_\eta}$ から $\mathbb{C}^2$ へのユニタリー作用素 V :

$$V|0\rangle \otimes |\sqrt{\eta}\theta\rangle = |z_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, \quad V|\sqrt{\eta}\theta\rangle \otimes |0\rangle = |z_1\rangle = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

が存在する. ここで,

$$v_0 = \langle z_0, z_1 \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\theta_\eta|^2\right) \quad v_1 = \sqrt{1 - \exp(-|\theta_\eta|^2)} \exp(i\omega_1)$$

である. さらに、 $\Lambda_0^* \circ \Xi_{PPM}^*(p)$ の固有値は,

$$v_0 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sqrt{1 - 4\lambda(1-\lambda)(1 - \exp(-2|\theta_\eta|^2))} \right\}$$

$$v_1 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sqrt{1 - 4\lambda(1-\lambda)(1 - \exp(-2|\theta_\eta|^2))} \right\}$$

である. 以上のことから、量子系の相互エントロピーは,

$$I(p; \Lambda_0^* \circ \Xi_{PPM}^*(p)) = S(\Lambda_0^* \circ \Xi_{PPM}^*(p))$$

で一意に求められる. また,

$$S(\Lambda_0^* \circ \Xi_{PPM}^*(p)) = -\sum_{k=0}^1 v_k \log v_k$$

である。

3) PWMについて： 入力状態が $p = \lambda_0 \delta_0 + \lambda_1 \delta_1$ のとき

$$\begin{aligned}\Xi_{PWM}^*(p) &= \lambda|0\rangle\langle 0| \otimes |\theta\rangle\langle \theta| + (1-\lambda)|\theta\rangle\langle \theta| \otimes |\theta\rangle\langle \theta| \\ &= \lambda|0\rangle \otimes |\theta\rangle\langle 0| \otimes \langle \theta| + (1-\lambda)|\theta\rangle \otimes |\theta\rangle\langle \theta| \otimes \langle \theta|\end{aligned}$$

となる。定理5.1より、 $\Xi_{PWM}^*(p) = \lambda|0\rangle \otimes |\theta\rangle\langle 0| \otimes \langle \theta| + (1-\lambda)|\theta\rangle \otimes |\theta\rangle\langle \theta| \otimes \langle \theta|$ は、次のように一意の非縮退シャッテン分解ができる。

$$\Xi_{PWM}^*(p) = \mu_0 E_0 + \mu_1 E_1 = \mu_0 |\mu_0\rangle\langle \mu_0| + \mu_1 |\mu_1\rangle\langle \mu_1|$$

ここで、 $\Xi_{pwm}^*(p)$ の固有値 μ_0 と μ_1 は、次のようになる。

$$\begin{aligned}\mu_0 &= \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sqrt{1 - 4\lambda(1-\lambda)(1 - \exp(-|\theta|^2))} \right\} \\ \mu_1 &= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sqrt{1 - 4\lambda(1-\lambda)(1 - \exp(-|\theta|^2))} \right\}\end{aligned}$$

$\mathcal{H}_0$ を $|0\rangle \otimes |\theta\rangle$ と $|\theta\rangle \otimes |\theta\rangle$ から生成される $\mathcal{H}$ の閉部分空間とすると、 $\mathcal{H}_0$ から $\mathbb{C}^2$ へのユニタリ作用素 U :

$$U|0\rangle \otimes |\theta\rangle = |y_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2 \quad U|\theta\rangle \otimes |\theta\rangle = |y_1\rangle = \begin{pmatrix} u_0 \\ u_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

が存在する。ここで、

$$u_0 = \langle y_0, y_1 \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\theta|^2\right) \quad u_1 = \sqrt{1 - \exp(-|\theta|^2)} \exp(i\omega_0)$$

である。また、透過率 η をもった減衰過程のチャネル Λ_0^* に対する出力状態は、

$$\Lambda_0^* \circ \Xi_{PWM}^*(p) = \lambda|0\rangle\langle 0| \otimes |\sqrt{\eta}\theta\rangle\langle \sqrt{\eta}\theta| + (1-\lambda)|\sqrt{\eta}\theta\rangle\langle \sqrt{\eta}\theta| \otimes |\sqrt{\eta}\theta\rangle\langle \sqrt{\eta}\theta|$$

となる。このとき、 $\mathcal{H}_{\theta_\eta}$ を $|0\rangle \otimes |\sqrt{\eta}\theta\rangle$ と $|\sqrt{\eta}\theta\rangle \otimes |\sqrt{\eta}\theta\rangle$ から生成される $\mathcal{H}$ の閉部分空間とすると、 $\mathcal{H}_{\theta_\eta}$ から $\mathbb{C}^2$ へのユニタリ作用素 V :

$$V|0\rangle \otimes |\sqrt{\eta}\theta\rangle = |z_0\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2, \quad V|\sqrt{\eta}\theta\rangle \otimes |\sqrt{\eta}\theta\rangle = |z_1\rangle = \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^2$$

が存在する。ここで

$$v_0 = \langle z_0, z_1 \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}|\theta_\eta|^2\right) \quad v_1 = \sqrt{1 - \exp(-|\theta_\eta|^2)} \exp(i\omega_1)$$

である。さらに

$\Lambda_0^* \circ \Xi_{PWM}^*(p) = \lambda|0\rangle\langle 0| \otimes |\sqrt{\eta}\theta\rangle\langle \sqrt{\eta}\theta| + (1-\lambda)|\sqrt{\eta}\theta\rangle\langle \sqrt{\eta}\theta| \otimes |\sqrt{\eta}\theta\rangle\langle \sqrt{\eta}\theta|$ の固有値は、

$$v_0 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \sqrt{1 - 4\lambda(1-\lambda)(1 - \exp(-|\theta_\eta|^2))} \right\}$$

$$v_1 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \sqrt{1 - 4\lambda(1-\lambda) \left(1 - \exp(-|\theta_\eta|^2) \right)} \right\}$$

である。以上のことから、量子系の相互エントロピーは、

$$I(p; \Lambda_0^* \circ \Xi_{PWM}^*) = S(\Lambda_0^* \circ \Xi_{PWM}^*(p))$$

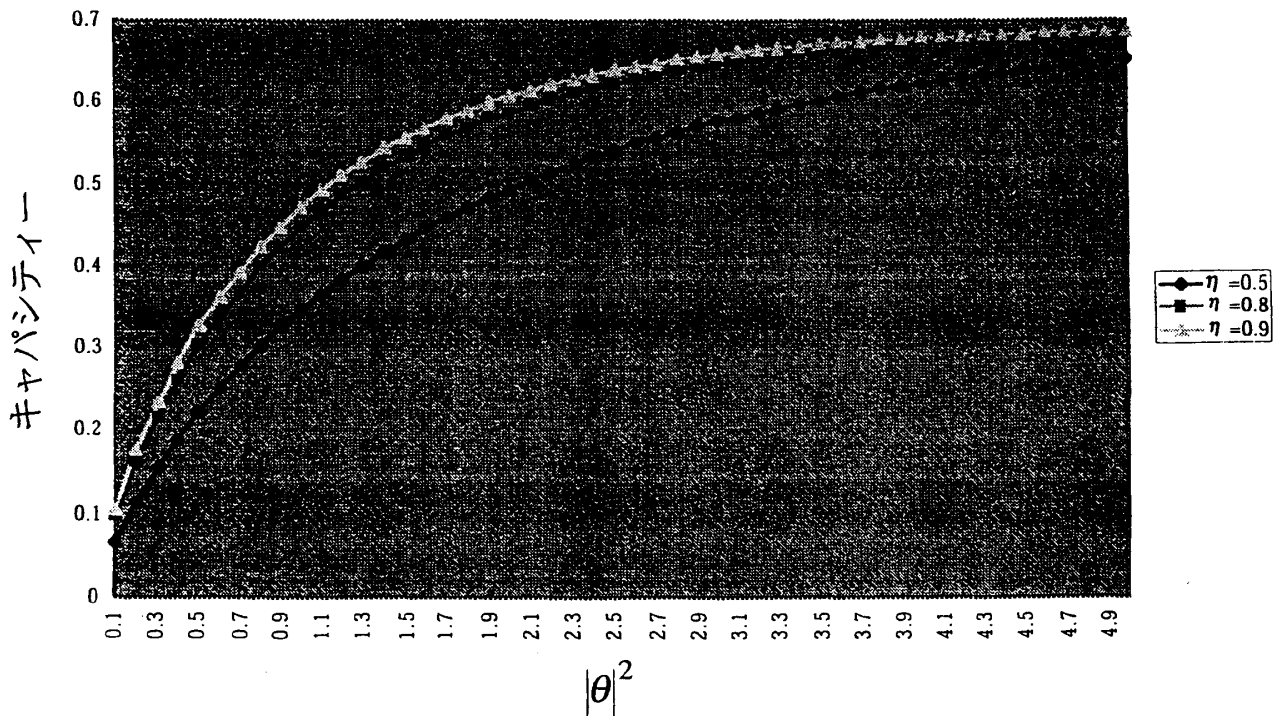
で一意に求められる。また、

$$S(\Lambda_0^* \circ \Xi_{PWM}^*(p)) = - \sum_{k=0}^1 v_k \log v_k$$

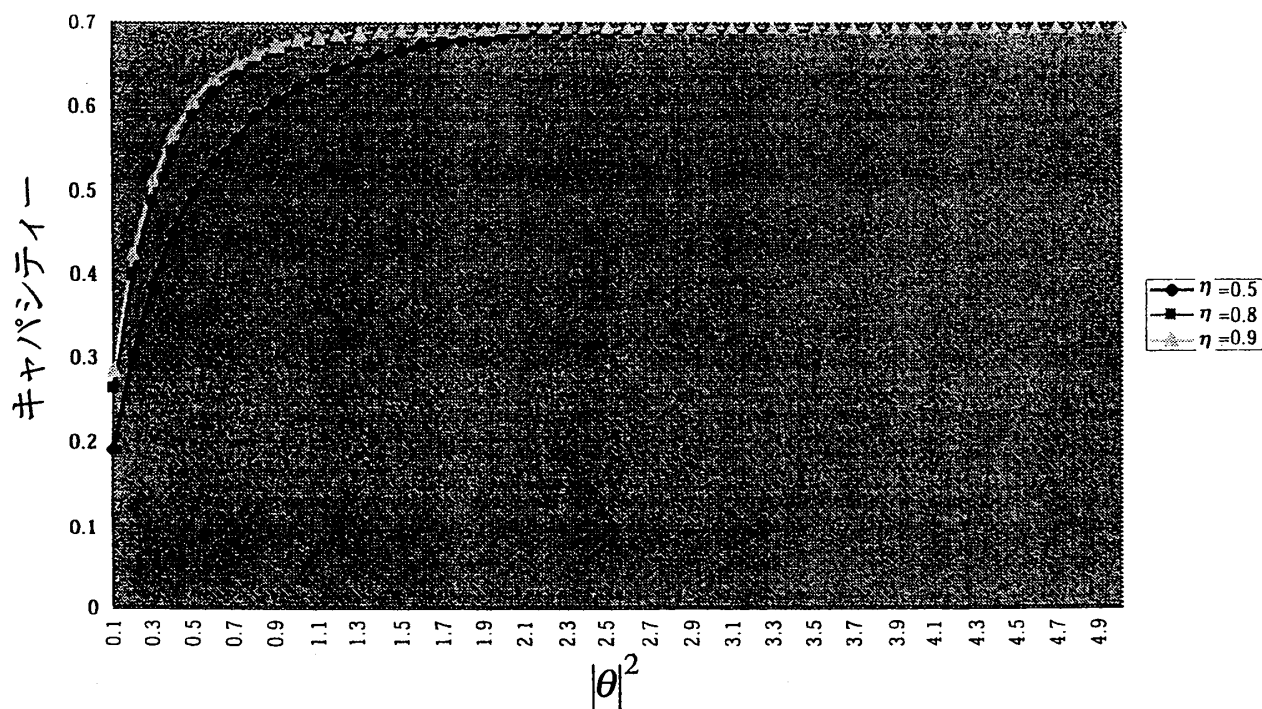
である。

次にOhya相互エントロピーを用いて各チャネル $\Lambda_0^* \circ \Xi_M^*$ の量子通信路容量を計算し、得られた結果を次のグラフで示す。各グラフの横軸は光子の平均エネルギー $|\theta|^2$ ，縦軸は量子通信路容量を表す。 η は減衰チャネルの透過率を表す。

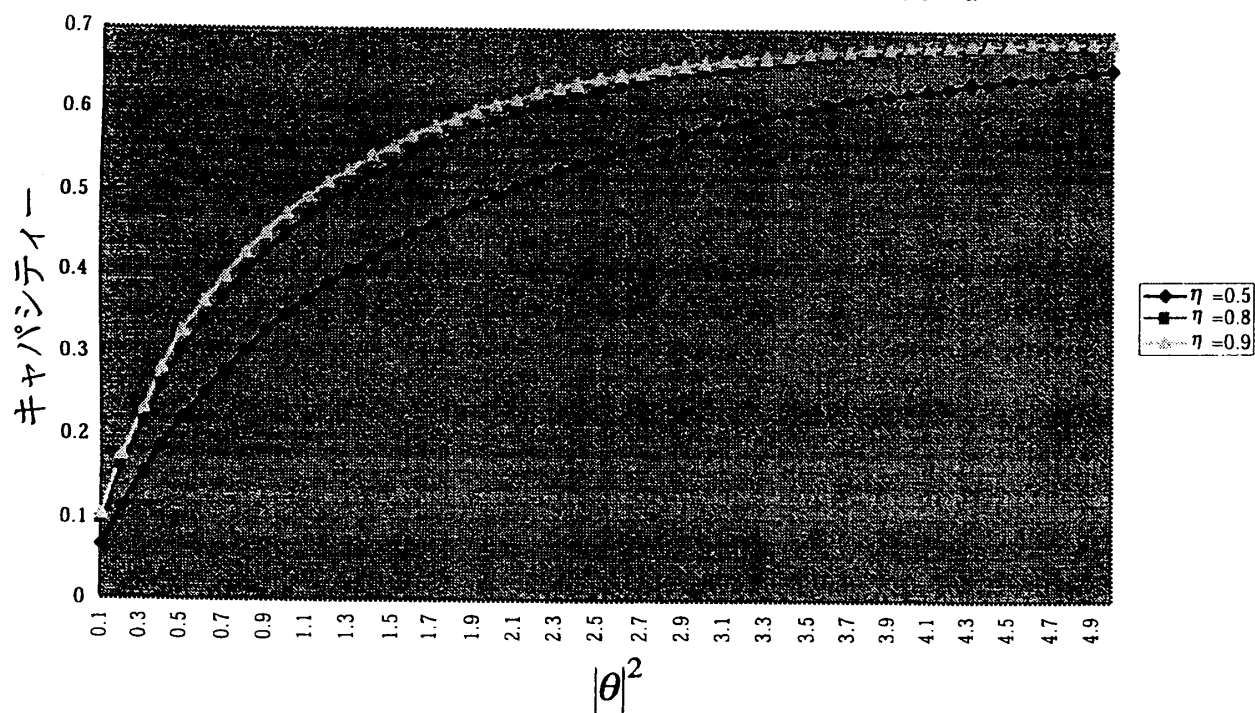
C-Qチャネルのキャパシティー (OOK方式)



C-Qチャネルのキャパシティー (PPM方式)



C-Qチャネルのキャパシティー (PWM方式)



6. まとめ

入力状態 $p = \lambda_0 \delta_0 + \lambda_1 \delta_1$ のとき, 各光変調方式 M で定まる $C-Q$ チャネルの出力状態は次のようになった.

$$\Lambda_0^* \circ \Xi_{OOK}^*(p) = \lambda |0\rangle\langle 0| + (1-\lambda) |\sqrt{\eta}\theta\rangle\langle\sqrt{\eta}\theta|$$

$$\Lambda_0^* \circ \Xi_{PPM}^*(p) = \lambda |0\rangle\langle 0| \otimes |\sqrt{\eta}\theta\rangle\langle\sqrt{\eta}\theta| + (1-\lambda) |\sqrt{\eta}\theta\rangle\langle\sqrt{\eta}\theta| \otimes |0\rangle\langle 0|$$

$$\Lambda_0^* \circ \Xi_{PWM}^*(p) = \lambda |0\rangle\langle 0| \otimes |\sqrt{\eta}\theta\rangle\langle\sqrt{\eta}\theta| + (1-\lambda) |\sqrt{\eta}\theta\rangle\langle\sqrt{\eta}\theta| \otimes |\sqrt{\eta}\theta\rangle\langle\sqrt{\eta}\theta|$$

以上の計算より, 次のことが分かった.

1) チャネルの透過率 η を良くすると正しく伝えられる情報の量は増大する.

$$2) C_{cqq}^{\mathcal{S}}(\Lambda_0^* \circ \Xi_{PPM}^*) > C_{cqq}^{\mathcal{S}}(\Lambda_0^* \circ \Xi_{OOK}^*)$$

同じ $|\theta|^2$ に対して PPM の量子通信路容量は OOK の量子通信路容量よりも大きい.

$$3) C_{cqq}^{\mathcal{S}}(\Lambda_0^* \circ \Xi_{OOK}^*) = C_{cqq}^{\mathcal{S}}(\Lambda_0^* \circ \Xi_{PWM}^*)$$

PWM の量子通信路容量は OOK の量子通信路容量に等しい.

参考文献

- [1] M.Ohya : "On compound state and mutual information in quantum information theory", IEEE Trans. Inf Theory 29, pp.770-774, 1983.
- [2] 大矢雅則 : " 量子通チャネルの伝送容量について" , 信学論 (A), J81-A, 12, pp. 1638-1643, 1998.
- [3] M.Ohya : "Fundamentals of quantum mutual entropy and capacity", quant-ph/ 9808051, e-print, 1998.
- [4] M.Ohya and D.Petz : "Quantum Entropy and its Use", Springer Verlag, 1993.
- [5] M.Ohya, D.Petz and N.Watanabe : "On capacities of quantum channels", Probability and Mathematical Statistics, 17, 179-196, 1998
- [6] M.Ohya, D.Petz and N.Watanabe : "Numerical computation of quantum capacity". Internatoinal Journal of Theoretical Physics.
- [7] 大矢雅則, 渡邊昇 : " 量子論的通信過程における数理モデルの構成とその解析" , 電子情報通信学会誌(A), J67-A, No.6, pp.548- 552, 1984.

- [8] M.Ohya and N.Watanabe : "Quantum capacity of noisy quantum channel", Quantum Communication and measurement, 3, pp. 213-220, 1997
- [9] 大矢雅則, 渡邊昇 ; " 量子通信理論の基礎" ,牧野出版 , 1998.
- [10] J.von Neumann : "Mathematische Grundlagen derQuantenmechanik" , Springer-Verlag, Berlin, 1932.
- [11] R. Schatten: "Norm Ideals of Completely Continuous Operators" , Springer-Verlag, Berlin, New York,1960.
- [12] N.Watanabe : "Efficiency of optical modulations for photon number states", Quantum probability and Related Topics 6,489-4981991.