

經濟論叢

第 163 卷 第 4 号

値引販売慣行の改革方向 (1) 塩 地 洋 1

包括利益と純利益の関係 山 田 康 裕 20

企業不正支出における取締役の法的責任 宮 本 幸 平 31

閉鎖集団における主体の依存関係の均衡 (1) ... 藤 山 英 樹 47

GARCH (p, q) 型 Black-Scholes モデル
による株式オプションプレミアムの推計 足 立 光 生 59

平成11年 4 月

京都大學經濟學會

閉鎖集団における主体の依存関係の均衡（1）*

——進化ゲーム理論によるモデル化——

藤 山 英 樹

I は じ め に

我々は職場であれ学校であれ様々な社会集団に属しながら生活を営んでいる。また、それぞれの社会集団の中では様々な人間関係が形成されている。しかしそのような集団内の人間関係は時として社会的な問題となることがある。学校のクラス内のいじめや、職場での「窓際族」といったものがその例である。このような問題に取り組むときはいかにしてそのような人間関係が形成されてきたかを議論する必要がある。また本稿では人々の間での頼る／頼られるといった依存関係に注目する。ここでは依存関係といってもあまり強い意味は持たない。「じぶんでやるよ」「お任せするか」「ここは任せてもらおう」といった軽い意味であり、集団内での世渡りの仕方の選択といった意味である。このような依存関係は集団内において極めて一般的であるといえよう。しかしながら、このような関係が均衡状態において固定化してゆくならば、集団内において決定的な影響力を及ぼすこととなる。

社会や集団内での主体間の依存関係の考察は他の分野では多くなされている。社会心理学では Riesman [1961] や Moscovici [1981] などに代表される「群

* 本稿は、1998年度日本経済学会の春期大会、第26回数理社会学会大会および経済理論学会第46回全国大会での報告論文を加筆・修正したものである。京都大学の八木紀一郎教授、東洋大学の瀧澤弘和講師をはじめ多くの方より貴重なコメントをいただいた。また、指導教官である大西広教授からは常に研究全体に対して指導および励ましをいただいている。さらに、本稿は旭硝子奨学会からの資金援助による成果でもある。ここに記して感謝の意を表したい。

衆論」, Fromm [1941] の「自由からの逃走」などが挙げられる。社会学においては, Blau [1964] が職場内においての先輩後輩関係という依存関係を先輩の助言や助力と, 新人の尊敬や服従との「社会的交換」によって説明している。また, 政治経済学からの議論としては大西 [1989] が直接的に, 依存関係を取り上げている。しかしながら, 以上の文献は依存関係の生成発展過程を十分に取り上げていない。また, 社会心理学では人々の性格という個人的な資質が最も重要な要因となる。しかしながら, 社会問題として一般に取り上げられる状況では個人的資質よりも社会的な要因がより重要と考えられる。よって, 主体の能力差を強調することは問題の解決に対して必ずしも望ましいとはいえない。

他方, 主体の戦略の生成発展が経済学や生物学では進化ゲームを用いて議論されているが(奥野・松井 [1995], Sethi [1996], Young [1993], Hoekstra et al. [1991]), それらは依存関係を明示的には扱っていない。

そこで本稿では主体の能力差を仮定することなしに, 集団内での依存関係の生成発展を進化ゲームによってモデル化する。より具体的には, 集団内の依存関係の生成発展をランダムマッチングおよび戦略としての依存関係の合理的選択によって表現する。

ランダムマッチングを用いることによって, 集団内で各主体がお互いに軽い接触をしながらお互いの関係を計るという状況が表現できる。さらに各主体の行動が集団内に影響を及ぼすと同時に集団全体の状況が主体の行動に影響を与えるというミクロとマクロのリンクがモデル内で閉じた状態で表現され, この意味で一般均衡理論分析となり, この点についてもランダムマッチングモデルは大きな利点を持つ。

お互いが軽い接触をしながらお互いの関係をはかるという状況の具体的な例は, 新年度のクラス内の状況が挙げられる。また大学や地域のサークル内の新メンバー間の関係もこのような状況であろう。

依存関係を戦略としてとらえその合理的選択を考えることによって, 経済学や生物学でなされてきた戦略の生成発展モデルと依存関係の議論が結びつけら

れ、これまでなされてこなかった依存関係の生成発展モデルが構築可能となる。

さらに本稿では「閉鎖集団」を考察の対象とする。ここで用いている「閉鎖」とは、集団の構成員たる個々の主体が自由にその集団から退出することができない状況を示す。より具体的には次節以降で述べるモデル内で退出という戦略が無いということである。

というのも、「閉鎖集団」でなければ主体が何らかの不満を持つとき、その集団から離脱することによってその不満は解消され、集団内での問題は起こらないこととなるからである。先に挙げた例においては、学校のクラスは通常生徒の意思によって変わることができない。また大学におけるサークルのような組織も生活にしめる比重が大きくなると離脱の機会費用が高くなってゆく¹⁾。

本稿は以下のように構成される。次節において、Hoekstra et al. [1991] によってなされた生物学における性差の発生モデルを我々の前提とする社会的状況に応用できるようにモデル化しなおす。つまり、生物の性的な戦略を、人々の依存関係としての戦略に置き換える。第3節、第4節でそれぞれ Evolutionary Stable Strategy (ESS) と Replicator Dynamics における漸近的安定性の議論をする。

第5節で、我々のモデルで社会状態としての均衡の安定性とその急激な変化が表現されることを見る。第6節で結論と今後の課題を述べる。

II モデル

1 社会状況

前節で示した社会状況をこの節ではさらに詳しく見てゆき、モデル化をおこなう。はじめに、主体間の依存関係をさらに特定化してゆく。我々は次のよう

1) 集団内でその構成員が何らかの不満を持つ時にとりうる行動として、その集団から退出（エクジット）することと、その集団の中で対処（ボイス）することという二つの選択肢が重要となることを Hirshman [1970] は指摘している。ここでは退出が出来ないという状況での戦略の均衡を考察するのである。これらの点を考慮し、進化的枠組みの中で政治経済学を考察したものに八木 [1998] がある。以上の文献では集団からの離脱がかえって社会的な不利益を生み出すことも指摘しているが、この点については本稿では取り扱わず今後の課題とする。

な主体間の相互依存関係を主体のとりうる行動様式としての戦略として取り上げる²⁾。

モデルで用いられる戦略

自立戦略 (これを D_1 と呼ぶ。)

協力戦略 (これを D_2 と呼ぶ。)

相互依存戦略(1) (これを D_3 と呼ぶ。)

相互依存戦略(2) (これを D_4 と呼ぶ。)

また、以下では主体は純粋戦略だけを採用することとする³⁾。

次に社会の状況を以下のように表現する。 x_i , ($i=1, 2, 3, 4$) を戦略 D_i をとる主体の社会全体の中での相対稼度とする。もちろん $\sum x_i=1$ となる。いま各 x_i を要素とするベクトル x を考える。このとき x は戦略の分布としての社会状況を示すこととなる。 x_i は非負であるから結局、存在しうる社会状況 x は単体

$$\Delta: \{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_i \geq 0, \sum_i x_i = 1\} \quad (1)$$

によって表現されることとなる。

2 各行動戦略の利得の特徴づけ

ここでは各戦略の利得の特徴づけを行う。ここで戦略 D_i が採る利得を関数 $F_i(x)$ で表す。はじめに自立戦略 D_1 は社会状況に影響を受けず一定の利得を得ることができると仮定する。

仮定1: 自立戦略 D_1 の利得の独立性

$$F_1(x) = \alpha \quad \forall x \in \Delta \quad (2)$$

2) ここで用いる各戦略に対する名称は全く便宜的なものであって定義以上の意味は全く含まれない。

3) 実際上の集団内での主体の行動も依存関係においては混合戦略をとると考えるよりも純粋戦略をとると考える方がもっともらしいであろう。

ここで α は正の定数である。

次に相互依存戦略(1)および(2)の利得の特徴づけをおこなう。相互依存戦略(1)および(2)の違いはお互いの役割の違いを示す。例えば相互依存戦略(1)が常にリーダーシップを発揮してゆく親分戦略で相互依存戦略(2)が親分戦略に従属してゆく子分戦略といったものである。それぞれの利得は、あくまでも相互依存戦略(1)および(2)の相対頻度、つまり x_3 と x_4 のみに依存すると仮定する。つまり、この仮定によって相互依存戦略(1)および(2)の相互の補完性が非常に高いことを表現する。またその補完性という意味から相互依存戦略(1)と(2)のマッチングの利得がそれら同じ戦略どうしのマッチングの利得よりも常に厳密に大きくなるとする。つまり、以下の関係が成立する。ここで、 ϕ_{ij} は戦略 D_i が戦略 D_j に出会ったときの利得を示す。

仮定2：相互依存戦略(1)および(2)の利得の独立性

$\phi_{33}, \phi_{34}, \phi_{43}, \phi_{44}$ はすべて正の定数であり、以下の式が成立する。

$$F_3(x) = x_3\phi_{33} + x_4\phi_{34} \quad (3)$$

$$F_4(x) = x_3\phi_{43} + x_4\phi_{44} \quad (4)$$

仮定3：相互依存戦略(1)および(2)における異なる戦略のマッチングの利得の優位性

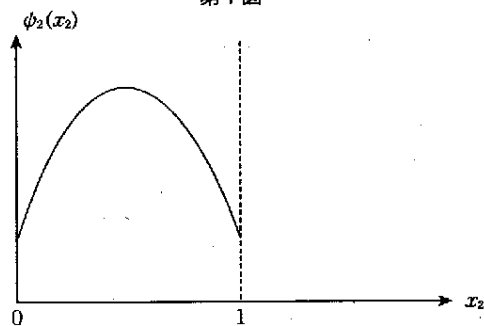
$$\phi_{43} > \phi_{33} \quad \phi_{43} > \phi_{44} \quad (5)$$

$$\phi_{34} > \phi_{33} \quad \phi_{34} > \phi_{44} \quad (6)$$

は常に成立している。

次に協力戦略の特徴づけをおこなう。協力戦略も先と同様に協力戦略の相対頻度のみにその利得が依存すると仮定する。また協力戦略の相対頻度が非常に小さいときはその利得は小さく、また相対頻度が非常に大きいときもその利得は小さいと仮定する。これは相対頻度が小さいときはその規模の経済が生かせず、相対頻度が大きいときは協力戦略を採る主体内での調整コストが非常に大きくなりかえって規模の不経済を起こすという想定からである。さらに単純化

第1図



のために利得関数の描く曲線は厳密に上に凸で区間 $[0, 1]$ の内点で最大値をとるとする。つまり、以下の関係が成立する。

仮定4：協力戦略の利得の独立性および形状

$$F_2(x) = \phi(x_2)$$

ここで、 $\phi(x_2)$ は連続で厳密に上に凸の関数であり定義域 $[0, 1]$ の内点で最大値をとるものとする。(第1図を参照のこと)。

この節を終えるに当たって、以上の利得関数の特徴づけと社会状況の関係をもう1度確認しておく。ここでは集団内から2つの主体がランダムにマッチングされそこで主体は何らかの戦略をとることによって、主体が集団内で適応してゆくもしくは世渡りしていくという状況が示される。自立戦略は全くマッチングの相手にも集団内での状況にも影響を受けないという点に特徴を持つ。相互依存戦略(1)および(2)はマッチングした相手によって利得が変化するという点で特徴を持つ。協力戦略はマッチングした相手には影響を受けないが集団内での状況に利得が依存するという特徴を持つ。この特徴は協力戦略では常に協力戦略をとる主体で構成する集団で物事に対処するという仮定から導かれる。

3 いくつかの補題

次節以降で用いる基礎的な補題をこの小節であげておく。はじめに社会状態が $x \in \Delta$ である時に混合戦略 $y \in \Delta$ がとる期待利得関数を

$$F(y, x) = \sum_i y_i F_i(x) \quad \text{ただし } x, y \in \Delta \quad (7)$$

で定義する⁴⁾。これより社会全体としての平均利得 $F(x, x)$ が

$$F(x, x) = \sum_i x_i F_i(x) \quad \text{ただし } x \in \Delta \quad (8)$$

として与えられる。ここで、戦略の組 (x^*, x^*) が上記の利得関数 F においてナッシュ均衡であるとき、「戦略 x^* はナッシュ均衡である。」と呼ぶことにする⁵⁾。これより補題を述べてゆくが1つめは一般によく知られた補題である⁶⁾。これは証明なしであげる。

基礎補題

$x^* \in \Delta$ がナッシュ均衡である。 $\iff$

すべての $x_i^* > 0$ である i にたいして $F_i(x^*) = F(x^*, x^*)$ もしくは
すべての $x_i^* = 0$ である i にたいして $F_i(x^*) \leq F(x^*, x^*)$

次に相互依存戦略(1)および(2)に対する利得の基礎的な性質を示しておく。これも定義から直接導くことが出来るので証明は省略する。

補題1：相互依存戦略(1)および(2)に対する利得の基礎的な性質

$$(1) \quad x_3 > 0, x_4 > 0, F_3(x) = F_4(x) \implies \begin{matrix} x_3 = \phi_{44} - \phi_{34} \\ x_4 = \phi_{33} - \phi_{43} \end{matrix}$$

(2) $F_3(x) = F_4(x)$ 上において、 $F_3(x)$ は x_3 の厳密な増加関数

(3) $F_3(x) = F_4(x)$ 上において、 $F_4(x)$ は x_4 の厳密な増加関数

4) モデルでは主体は純粋戦略しか取らないという仮定をしているが、ここでは次で見る社会全体の平均利得を定義するために $F(y, x)$ をここで定義する。

5) つまり、全ての $x \in \Delta$ に対して、 $F(x^*, x^*) \geq F(x, x^*)$ が成立する。このようにナッシュ均衡を定義するのは、以後の議論でESSを求める時にこれを用いるからである。

6) Mas-Colell et al. [1995] 命題 8. D. 1 を参照のこと。また、Hoekstra et al. [1991] もこの補題のことを「基礎補題 (fundamental lemma)」と呼んでいる。

$$(4) \quad x_3 > 0, x_4 = 0 \implies F_3(x) < F_4(x)$$

$$(5) \quad x_3 = 0, x_4 > 0 \implies F_3(x) > F_4(x)$$

III 依存ゲームのゲーム理論的分析

この説では前節までで定義された行動様式を選択としての依存ゲームにおいて、ナッシュ均衡の存在可能な領域を明らかにし、さらにESSであるための十分条件を示す⁷⁾。

1 依存ゲームにおけるナッシュ均衡成立のための条件

この節では、依存ゲームにおけるナッシュ均衡成立のための必要条件を見てゆく。先の基礎補題と補題1から次の命題が導かれる。

命題1：ナッシュ均衡の必要条件1

依存ゲームの全てのナッシュ均衡において、相互依存戦略(1)および(2)の比は常に一定である。つまり、いま、 x^* がナッシュ均衡であるとする

$$x^* \in \Delta_{\text{cons}} \equiv \left\{ x \in \Delta \mid \frac{x_3}{x_4} = \frac{\phi_{44} - \phi_{34}}{\phi_{33} - \phi_{43}} \text{ または } x_3 = x_4 = 0 \right\} \quad (9)$$

証明：

x^* をいま依存のゲームにおけるナッシュ均衡とする。

場合1： x_3^* と x_4^* がともに0とすると、直接 x^* が Δ_{cons} に含まれることがわかる。

場合2： x_3^* と x_4^* がともに正であるとする。このとき前節の基礎補題より、 $F_3(x^*) = F_4(x^*)$ となる。

したがって、補題1より、

$$\frac{x_3}{x_4} = \frac{\phi_{44} - \phi_{34}}{\phi_{33} - \phi_{43}}$$

であることがわかる。

7) 以後前節で定義されたゲームを単に「依存ゲーム」として表現する。

場合3: $x_i^* > 0$ かつ, $x_j^* = 0$ ただし ($i \neq j$ で $i, j \in \{3, 4\}$) とする。基礎補題より $F_i(x^*) \geq F_j(x^*)$ であり, 他方補題1からは $F_i(x^*) < F_j(x^*)$ が導かれる。これは矛盾である。

(証明終)

Δ_{cons} は第2図における三角形 ABC で表される。第2図において正四面体 ADEC は各頂点から向かい合う面までの距離が1となっており, 単体 Δ を示している。つまり, 正四面体内の点の各面までの距離が, 集団内におけるそれぞれの戦略の占める割合を示しているのである。ここでは点 A においては全ての主体が協力戦略すなわち $x_2 = 1$ であり, 点 D において全ての主体が相互依存戦略(1)すなわち $x_3 = 1$ であり, 点 E において全ての主体が相互依存戦略(2)すなわち $x_4 = 1$ であり, 点 C において全ての主体が自立戦略すなわち $x_1 = 1$ である。

同様にナッシュ均衡を支持する戦略の利得は全て等しいことから次の命題が導かれる。これは証明を省略する。

命題2: ナッシュ均衡の必要条件2

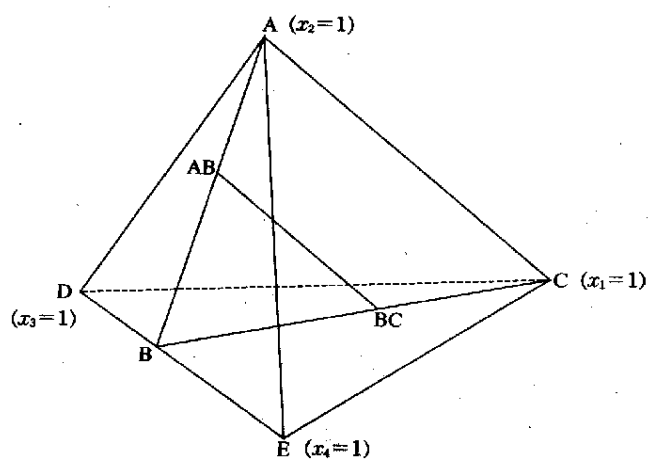
いま単体 Δ_{cons} 上において $\min\{F_3 = F_4\} < F_1 < \max\{F_3 = F_4\}$ であるとする。このとき, 依存ゲームにおける全てのナッシュ均衡 x^* は $x_3^* = x_4^* = 0$ もしくは $x_1^* = 0$ となる。より具体的に第2図を用いて述べれば, 全てのナッシュ均衡 x^* は領域 $[B, AB] \cup [A, C] \cup [AB, BC]$ に含まれる。ただし第2図においては

$$x \in [AB, BC] \Rightarrow F_1(x) = F_3(x) = F_4(x) \quad (10)$$

が成立していると仮定している。

「いま単体 Δ_{cons} 上において $\min\{F_3 = F_4\} < F_1 < \max\{F_3 = F_4\}$ であるとする。」と仮定した理由を説明する。というのもこの状況におけるナッシュ均衡の分析は部分的に, $\min\{F_3 = F_4\} > F_1$ や $F_1 > \max\{F_3 = F_4\}$ といった他の条件の場合のナッシュ均衡の分析を含んでいるからである。

第2図



三角形 ABC が Δ_{cons} である。

線分 $[AB, BC]$ 上では $F_1(x) = F_3(x) = F_4(x)$ である。

第1表

領域	存在する戦略
点A	協力戦略
点C	自立戦略
線分 $[A, C]$ の内点	協力戦略および自立戦略
点 AB	協力戦略および相互依存戦略(1)および(2)
点 BC	自立戦略および相互依存戦略(1)および(2)
線分 $[AB, AC]$ の内点	4つの全ての戦略
点 B	相互依存戦略(1)および(2)
線分 $[AB, B]$ の内点	協力戦略および相互依存戦略(1)および(2)

これより、ナッシュ均衡が存在可能な領域が単体 Δ 上の線分 $[A, C]$, 線分 $[AB, BC]$, 線分 $[AB, B]$ 上に限られることがわかった。それぞれの領域におけるナッシュ均衡の成立のための必要十分条件は定義に戻って確認すればよい。つまり、それぞれの領域において存在する戦略が全て同じ利得を得てかつ、存

在しない戦略以上の利得を得ていれば良い。

各点および線分上で存在する戦略は以下の第1表の通りである。以後も記述の簡便化のため第2図上の各点および線分を用いてそれぞれの命題を記述する。適宜表に戻って確認されたい。(次稿へ続く。)

参考文献

- Blau, P. M. [1964] *Exchange and Power in Social Life*, New York, John Wiley & Sons. (間場寿一ほか訳『交換と権力—社会仮定の弁証法社会学—』新曜社, 1974年)。
- Bomze, I. [1986] "Non-cooperative Two-person Games in Biology: A Classification," *International Journal of Game Theory*, 15, pp. 31-57.
- Fromm, E. [1941] *Escape from Freedom*, New York, Henry Holt and Company. (日高六郎訳『自由からの逃走』東京創元社, 1951年)。
- Harsanyi, J. C. and R. Selten [1988] *A General Theory of Equilibrium Selection in Games*, Cambridge, MA, The MIT Press.
- Hirschman, A. O. [1970] *Exit, Voice, and Loyalty: Responses to Decline in Firms, Organizations, and States*, Cambridge, Harvard University Press. (三浦隆之訳『組織社会の論理構造—告発・退出・ロイヤリティー』ミネルヴァ書房, 1975年)。
- Hoekstra, R. F., Y. Iwasa, and F. J. Weissing [1991] "The Origin of Isogamous Sexual Differentiation," *Game Equilibrium Models I*, ed. by R. Selten, Berlin, Springer Verlag.
- Hofbauer, J., P. Schuster, and K. Sigmund [1979] "A Note on Evolutionary Stable Strategies and Game Dynamics," *Journal of Theoretical Biology*, 81, pp. 609-612.
- 正高信男 [1998] 『いじめを許す心理』岩波書店。
- Mas-Colell, A., M. D. Whinston, and J. R. Green [1995] *Microeconomic Theory*, New York, Oxford University Press.
- Moscovici, S. [1981] *L'Âge des Foules: Un Traité Historique de Psychologie des Masses*, Paris, Librairie Arthème Fayard. (古田幸男訳『群衆の時代』法政大学出版局, 1984年)。
- 大西 広 [1989] 『「政策科学」と統計的認識論』昭和堂。
- 奥野(藤原)正寛・松井彰彦 [1995] 「文化の接触と進化」『経済研究』第46巻2号,

岩波書店, 97-114ページ。

Riesman, D. [1961] *The Lonely Crowd: A Study of the Changing American Character*, New Haven, Yale University Press. (加藤秀俊訳『孤独な群衆』みすず書房, 1964年)。

Sethi, R. [1996] "Evolutionary Stability and Social Norms," *Journal of Economic Behavior and Organization*, 29, pp. 113-140.

八木紀一郎 [1998] 「進化的政治経済学と市民社会論」『経済セミナー』2月号。

Young, P. [1993] "The Evolution of Conventions," *Econometrica*, 61, pp. 57-84.

Weibull, J. W. [1995] *Evolutionary Game Theory*, Cambridge, MA, MIT Press.