

Kac の Graph 表現論の紹介 I

— Root の公理系について —

筑波大 数学 森田 純

0. 内容紹介

近年、有限次元半単純 Lie 代数の無限次元への自然な拡張として、Kac - Moody Lie 代数の概念が導入され、また活発に研究されてきている。有限次元の場合に成り立つ種々の公式なども、かなり一般的に拡張されている。(cf. [3], [5], [6], [7])。また、ブルバキの意味でのルート系の類似も自然に考えることができて、その特徴付けも進められている。(cf. [2], [4])。ここでは、Kac [2] において考察された Graph 表現論に関して、とくに Kac - Moody Lie 代数のルート系について述べることにする。Graph 表現論との対応については、谷崎 [8] を参照されたい。

Kac [2] において、無限ルート系の特徴付けが述べられているが、これはそのままでは不十分であることが判る。本稿では、その誤ちを修正すると共に、見易い形に整えてみた。

§1 において、Kac - Moody Lie 代数に関するいくつかの定義と性質を復習する。一般化されたカルタン行列 A (以下、GCM と呼ぶ) によって定義される Kac - Moody Lie 代数を L と書く。 Δ 及び Δ_+ をそれぞれ L のルート系、 L の正ルート系とする。§2 において、 L から得られる集合 $P(A)$ について考える。この $P(A)$ は、条件 $(X1)$, $(X2)$, $(Y1)$, $(Y2)$ 及び $(Y3)$ を満たす。逆に、これら5つの条件を満たす集合は、丁度ある Kac - Moody Lie 代数から定義される $P(A)$ となることが判る。特に A が与えられたとき、 Δ_+ は $(Y1)$, $(Y2)$ 及び $(Y3)$ によって、一意的に特徴付けられる。

ところで、 Δ は実ルート、虚ルートと呼ばれる2種類のルートをもつ。§3 では、特に虚ルートについて、Kac による特徴付けを紹介する。§4 で、 A が2行2列の場合について、ルートの状態を調べてみよう。§5 では、 A に関するある条件の下で、ルートの属する格子に不変形式が存在することを示す。

1. Kac - Moody Lie 代数

この節では、Kac - Moody Lie 代数と、そのルート系についての復習をしよう。定義は必要最小限度に留める。詳しくは、Kac [2], Lepowsky [3], Moody [4], 小池 [5] 等

を参照されたい。

l を正の整数とし、 $I = \{1, 2, \dots, l\}$ とする。

$A = (a_{ij})$ を $l \times l$ の一般化されたカルタン行列 (GCM) とする——すなわち、 $a_{ij} \in \mathbb{Z}$, $a_{ii} = 2$, $a_{ij} \leq 0$ ($i \neq j$), $a_{ij} = 0 \Leftrightarrow a_{ji} = 0$ 。GCM $A = (a_{ij})$ と標数 0 の体 K に対して、次の生成元と基本関係式によって定義される K 上の Lie 代数を L_1 で表わす。

《生成元》

$$e_1, \dots, e_l, h_1, \dots, h_l, f_1, \dots, f_l$$

《基本関係式》

$$[h_i, h_j] = 0, \quad [e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i$$

$$[h_i, e_j] = a_{ij} e_j, \quad [h_i, f_j] = -a_{ij} f_j$$

$$(\forall i, j \in I)$$

$$(\operatorname{ad} e_i)^{-a_{ij}+1} e_j = 0$$

$$(\operatorname{ad} f_i)^{-a_{ij}+1} f_j = 0$$

$$(\forall i, j \in I, i \neq j)$$

$\alpha_1, \dots, \alpha_l$ を自由生成元とする自由 $\mathbb{Z}$ -加群を、 $\Gamma = \sum_{i \in I} \mathbb{Z} \alpha_i$ とする。 L_1 の生成元に次の様に次数を定義することにより、 L_1 を Γ -次数付き Lie 代数と見なす。

$$\deg(e_i) = \alpha_i, \quad \deg(h_i) = 0, \quad \deg(f_i) = -\alpha_i$$

このとき、 L_1 の部分空間 $\sum_{i \in I} K e_i \oplus K h_i \oplus K f_i$ との共

通部分が $\{0\}$ であるような L_1 の斉次イデアル全体のなす族 $\mathcal{F}$ を考える。 $\mathcal{F}$ に属する2つのイデアルの和も、また $\mathcal{F}$ に属することから、 $\mathcal{F}$ には極大元が唯一つ定まる。これを、 R_1 と書き、 L_1 の根基と呼ぶことがある。(実は、 R_1 は $\{0\}$ であるうという予想があるが、ここではこれ以上の議論はしない。) ここで、 $L = L(A) = L_1 / R_1$ とおき、これを、 K 上に A で定義される Kac-Moody Lie 代数、あるいは単に、Kac-Moody Lie 代数 と呼ぶ。

L にも L_1 から誘導された Γ -次数付き Lie 代数の構造が入る。 e_i, h_i, f_i の L における像をも、同じ e_i, h_i, f_i で表わす。各 $\alpha \in L$ に対して、 L の次数 α の元全体のなす部分空間を L_α とする。 $H = L_0$ とおく。実は、 $H = K h_1 \oplus \cdots \oplus K h_\ell$ である。 Γ の 0 ではない元 α に対して、 $L_\alpha \neq \{0\}$ なるとき、 α を L の ルート と呼ぶ。 L のルート全体の集合を Δ で表わし、 L のルート系という。このとき、定義により、 $L = H \oplus \sum_{\alpha \in \Delta} L_\alpha$ を得る。さらに、 Δ は $\Gamma_+ \cup (-\Gamma_+)$ に含まれることが判る。ここに、 $\Gamma_+ = \{ \alpha = \sum_{i \in I} k_i \alpha_i \in \Gamma_+ \mid k_i \geq 0, \alpha \neq 0 \}$ とする。 $\Delta_+ = \Delta \cap \Gamma_+, \Delta_- = \Delta \cap (-\Gamma_+)$ とおき、それぞれ L の正ルート系、負ルート系と呼ぶ。

$\Delta_- = -\Delta_+$ なので、ルート系 Δ を調べるには、正ルート

系 Δ_+ について調べれば十分である。

各ルート $\alpha = \sum_{i \in I} k_i \alpha_i$ に対して、 L_α は次の様な元で張られることが判る。

$$[e_{i_1}, [e_{i_2}, \dots, [e_{i_{r-1}}, e_{i_r}] \dots]] \quad (\alpha \in \Delta_+ \text{ のとき})$$

$$[f_{i_1}, [f_{i_2}, \dots, [f_{i_{r-1}}, f_{i_r}] \dots]] \quad (\alpha \in \Delta_- \text{ のとき})$$

ここに、 e_j または f_j は $|k_j|$ 回出てくる。とくに、 $L_{\alpha_i} = K e_i$, $L_{-\alpha_i} = K f_i$ である。 $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_\ell\}$ とおき、これらを単純ルートと呼ぶ。

さて、各 $i \in I$ に対して、 e_i, h_i, f_i で生成される L の部分代数を U_i で表わす。各 U_i は、 $\mathfrak{sl}(2, K)$ と同型である。

補題 1. i を 1 つ固定する。このとき、 L の部分空間 $\sum_{\alpha \in \Delta_+ - \{\alpha_i\}} L_\alpha$ は有限次元既約 U_i -加群の直和となる。

証明 $\Delta_+ - \{\alpha_i\}$ を、 α_i を法とした同値類に分けたときの代表元 $\{\beta_t\}_{t \in T}$ を固定する。 β_t の属する同値類を $\Delta_+(\beta_t)$ と書く。このとき、 $\sum_{\alpha \in \Delta_+ - \{\alpha_i\}} L_\alpha = \sum_{t \in T} (\sum_{\alpha \in \Delta_+(\beta_t)} L_\alpha)$ であり、各 $\sum_{\alpha \in \Delta_+(\beta_t)} L_\alpha$ は、有限次元 U_i -加群となる。従って、 $\sum_{\alpha \in \Delta_+ - \{\alpha_i\}} L_\alpha$ は、有限次元既約 U_i -加群の直和となる。 (証明終)

補題 2. $\alpha \in \Delta_+ - \Pi$ とする。このとき、 $\alpha - \alpha_i$

$\in \Delta_+$ となる $\alpha_i \in \Pi$ が存在する。

証明 $L_\alpha \neq \{0\}$ なので、 L_α を張る元で 0 でないもの $[e_{i_1}, [e_{i_2}, \dots, [e_{i_{r-1}}, e_{i_r}] \dots]]$ が存在する。
 このとき、 $[e_{i_2}, \dots, [e_{i_{r-1}}, e_{i_r}] \dots]$ は、 $L_{\alpha - \alpha_{i_1}}$ の 0 でない元である。よって、 $\alpha - \alpha_{i_1}$ は Δ_+ の元である。
 (証明終)

2. 抽象的正ルート系

§1 にあるように、 $\Gamma = \sum_{i \in I} \mathbb{Z} \alpha_i$ を、自由生成元 $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$ をもつ自由 $\mathbb{Z}$ -加群とし、 $\Gamma_+ = \{\alpha = \sum_{i \in I} k_i \alpha_i \in \Gamma \mid k_i \geq 0, \alpha \neq 0\}$ とする。 $\Gamma^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(\Gamma, \mathbb{Z})$ を Γ の双対空間とする。 Γ^* の部分集合 X と Γ の部分集合 Y のなす対 $\Phi = (X, Y)$ が、格子 Γ における、抽象的正ルート系であるとは、次の条件 (X1), (X2), (Y1), (Y2), 及び (Y3) が満たされるときに言う。

(X1) X は l 個の相異なる元 $\phi_1, \dots, \phi_l$ からなり、添字集合 I により、名前が付けられている。

$$(X2) \quad \phi_i(\alpha_i) = 2 \quad (\forall i \in I)$$

$$(Y1) \quad \Pi \subseteq Y \subseteq \Gamma_+$$

(Y2) 各 $i \in I$ と、各 $\alpha \in Y - \{\alpha_i\}$ に対して、次の 2 条件 (*), (**) をみたす非負整数 $p = p(i, \alpha)$, $q = q(i, \alpha)$ が存在する。

$$(*) \quad p - q = \phi_i(\alpha)$$

$$(**) \quad \alpha + k\alpha_i \in Y \Leftrightarrow -p \leq k \leq q \quad (k \in \mathbb{Z})$$

(Y3) $\alpha \in Y - \Pi$ に対して、 $\alpha - \alpha_i \in Y$ なる $\alpha_i \in \Pi$ が存在する。

L を GCM A で定義される Kac - Moody Lie 代数とし、 Δ_+ を L の正ルート系とする。 $\varphi_1, \dots, \varphi_l$ を、 $\varphi_i(\alpha_j) = a_{ij}$ で定義される Γ^* の元とする。 $\Xi = \{\varphi_1, \dots, \varphi_l\}$ とおき、 $P(A) = (\Xi, \Delta_+)$ とする。各 $\alpha = \sum_{i \in I} k_i \alpha_i \in \Gamma$ に対し、 $ht(\alpha) = k_1 + \dots + k_l$ とおき、 α の高さという。

命題 1. $P(A)$ は、抽象的正ルート系となる。

証明 補題 1, 2 により、(Y2), (Y3) が成り立つ。他の条件は、定義より容易に確かめられる。(証明終)

各抽象的正ルート系 Ξ に対して、 $C_\Xi = (c_{ij})$, $c_{ij} = \phi_i(\alpha_j)$ とおく。

定理 1 Ξ を抽象的正ルート系とする。

(1) C_Ξ は、GCM である。

(2) $\Xi = P(C_\Xi)$ 。

証明 (1) $\phi_i(\alpha_j) \in \mathbb{Z}$, $\phi_i(\alpha_i) = 2$ は定義から明らかである。相異なる $i, j \in I$ に対して、 $\alpha_j - \alpha_i \notin Y$ である。よって、(Y2) により、 $p(i, \alpha_j) = 0$ かつ、

$\phi_i(\alpha_j) = -f(i, \alpha_j) \leq 0$ を得る。一方、 $i \neq j$ に対し
 (2) $\phi_i(\alpha_j) = 0$ は、 $\alpha_i + \alpha_j \notin Y$ と同値である。
 従って、 $\phi_i(\alpha_j) = 0$ と $\phi_j(\alpha_i) = 0$ は同値である。

(2) これは、次の命題 2 により導びかれる。

命題 2 $\Phi = (X, Y)$, $\Phi' = (X', Y')$ を、それぞれ
 格子 Γ , Γ' における抽象的正ルート系とする。 $C_\Phi =$
 $C_{\Phi'}$ と仮定する。このとき、 $\lambda(\Phi) = \Phi'$ となる同型
 射 $\lambda: \Gamma \rightarrow \Gamma'$ が存在する。

証明 $l = \text{rank } \Gamma = \text{rank } \Gamma'$ とおく。 $C_\Phi = C_{\Phi'}$
 なので、 $\phi_i(\alpha_j) = \phi'_i(\alpha'_j)$ である。ここで、 $\phi_i \in X$,
 $\phi'_i \in X'$, $\alpha_j \in \Pi$, 及び、 $\alpha'_j \in \Pi'$ である。 λ を
 $\lambda(\alpha_i) = \alpha'_i$ で定義する。このとき、 $\phi'_i = \phi_i \cdot \lambda^{-1}$
 である。 $Y_n = \{\alpha \in Y \mid \text{ht}(\alpha) \leq n\}$, $Y'_n = \{\alpha \in Y' \mid$
 $\text{ht}(\alpha) \leq n\}$ とおく。 $n = 1$ のとき、 $\lambda(Y_1) = Y'_1$
 $= \Pi'$ である。 $n > 1$, $\lambda(Y_{n-1}) = Y'_{n-1}$ と仮定する。
 $\alpha \in Y_n$ とする。 (Y3) により、 $\alpha - \alpha_i \in Y_{n-1}$
 なる $\alpha_i \in \Pi$ が存在する。このとき、(Y2) により、
 $\lambda(\alpha) \in Y'_n$ を得る。従って、 $\lambda(Y_n) \subseteq Y'_n$ 。
 同様にし、 $\lambda^{-1}(Y'_n) \subseteq Y_n$ 。ゆえに、 $\lambda(Y) = Y'$
 となる。(証明終) $\square$

さらに、Lie 代数の理論なしで、次の 2 つの結果を導び

命題3

$\Phi = (X, Y)$ を、抽象的正ルート系とする。
このとき、 $\mathbb{Z}\alpha_i \cap Y = \{\alpha_i\}$ が各 i について成り立つ。

証明

$\alpha_i \in \Pi$ とする。 $m \leq 0$ ならば $m\alpha_i$ $\notin Y$ である。 $m \in \mathbb{Z}_{>1}$ なる m に対して、 $m\alpha_i \in Y$ と仮定する。(Y2) により、 $\alpha_i, \dots, m\alpha_i \in Y$ 。従って、 $p(i, m\alpha_i) = m - 1$ となる。このとき、(Y2) により、 $m - 1 \geq p(i, m\alpha_i) - q(i, m\alpha_i) = \phi_i(m\alpha_i) = 2m$ 。これより、 $m \leq -1$ となり、矛盾である。(証明終)

すべての $\alpha \in \Gamma$ に対して、 $w_i(\alpha) = \alpha - \phi_i(\alpha)\alpha_i$ で定義される Γ の自己準同型を w_i とする。 $w_i^2 = \text{id}$ である。

命題4

$\Phi = (X, Y)$ を、抽象的正ルート系とする。
このとき、 $Y - \{\alpha_i\}$ は、 w_i -不変である。

証明

$\beta \in Y - \{\alpha_i\}$ とする。このとき、 $w_i(\beta) = \beta - \phi_i(\beta)\alpha_i = \beta + (q - p)\alpha_i$ 。(Y2) により、 $w_i(\beta) \in Y$ である。もし、 $w_i(\beta) = \alpha_i$ ならば、 $\beta = w_i^{-1}(\alpha_i) = -\alpha_i \notin Y$ となり矛盾である。よって、 $w_i(\beta) \in Y - \{\alpha_i\}$ となる。(証明終)

3. 奥ルートと虚ルート

すべての w_i によって生成される $GL(\Gamma)$ の部分群を

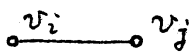
W で表わし、Weyl 群と呼ぶ。 $\Delta^{\text{re}} = W(\Pi)$, $\Delta^{\text{im}} = \Delta - \Delta^{\text{re}}$ とおく、その元を実ルート、虚ルートと呼ぶ。

$\Delta_+^{\text{im}} = \Delta_+ \cap \Delta^{\text{im}}$ とする。

各 $\alpha = \sum_{i \in I} k_i \alpha_i \in \Gamma$ に対して、 $I(\alpha) = \{i \in I \mid k_i \neq 0\}$ とおく。このとき、次の様な図形 S_α を考える。

《頂点》 $i \in I(\alpha)$ に対して、頂点 v_i をつくる。

《辺》 $i \neq j$ に対して、 $\phi_i(\alpha_j)$ ならば、 v_i と v_j を結ぶ。



ここで、 $M = \{ \alpha \in \Gamma_+ \mid \phi_i(\alpha) \leq 0, S_\alpha = \text{connected} \}$

とおく。Kac [2] により、次が与えられた。

命題 5 $\Delta_+^{\text{im}} = \bigcup_{w \in W} (wM)$ 。

(証明は略する。)

4. 例

A を、 2×2 の GCM とする。すなわち、

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -m \\ -m & 2 \end{pmatrix}, \quad m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$$

とする。このとき、今まで述べてきた集合は、具体的に次の様になる。ただし、 0 は除かれているものとする。

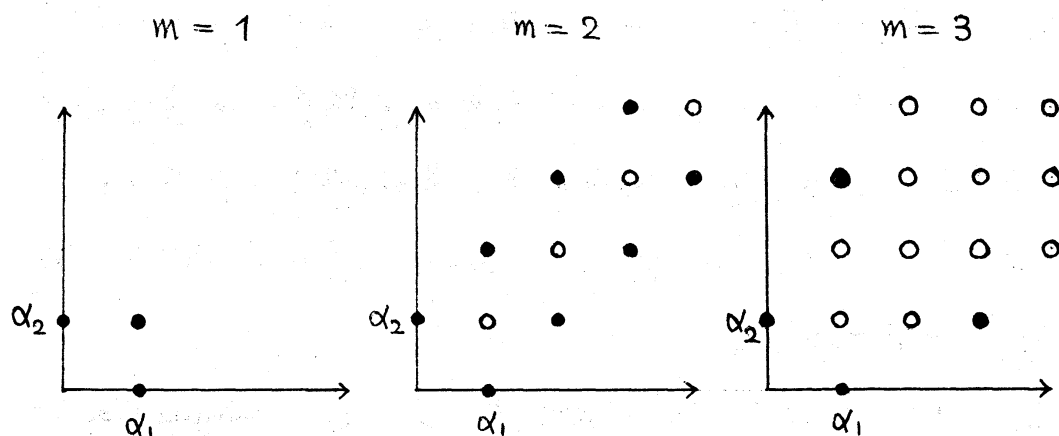
$$\Delta = \{ k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 \in \Gamma \mid k_1^2 - m k_1 k_2 + k_2^2 \leq 1 \}$$

$$\Delta^{\text{re}} = \{ \quad \quad \quad \mid \quad \quad \quad = 1 \}$$

$$\Delta^{\text{im}} = \{ \quad \quad \quad \mid \quad \quad \quad < 0 \}$$

$$M = \{ k_1 \alpha_1 + k_2 \alpha_2 \in \Gamma_+ \mid 2k_1 \leq m k_2, 2k_2 \leq m k_1 \}$$

いくつかの例で、実際に図で表わしてみよう。黒丸はルート、白丸は虚ルートを表わす。



5. 不変双一次形式

GCM. A が対称化可能であるとは、次をみたす行列 B, D が存在するときにいう。

(i) $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_\ell)$: 非退化対角行列, $d_i > 0$

(ii) $B = (b_{ij})$: 対称行列, $b_{ij} \leq 0$ ($i \neq j$)

(iii) $A = D \cdot B$

このとき、 $(\alpha_i, \alpha_j) = b_{ij}$ と定義することにより、

Γ 上に1つの双一次形式 $(,)$ が与えられる。

命題 6 $(,)$ は W -不変である。

証明 $(w_k \alpha_i, w_k \alpha_j) = (\alpha_i - a_{ki} \alpha_k, \alpha_j - a_{kj} \alpha_k)$
 $= (\alpha_i, \alpha_j) - a_{ki} b_{kj} - a_{kj} b_{ik} + a_{ki} a_{kj} b_{kk}$
 $= (\alpha_i, \alpha_j) - d_k b_{kj} b_{ki} - d_k b_{kj} b_{ki} + d_k b_{ki} \cdot d_k b_{kj} \cdot 2 d_k^{-1}$

$$= (\alpha_i, \alpha_j) \quad (\text{証明終})$$

従って、この命題の系として、次の命題を得る

命題 7

(1) $\alpha \in \Delta^{\text{re}}$ ならば、 $(\alpha, \alpha) > 0$ である。

(2) $\alpha \in \Delta^{\text{im}}$ ならば、 $(\alpha, \alpha) \leq 0$ である。

注意 Kac [2] の議論では、(Y3) に関する考察が欠けていることを、注意しておく。

参考文献

- [1] Bourbaki, N. : "Groupes et algèbres de Lie,"
Chap. 4-6, Hermann, Paris, 1968.
- [2] Kac, V. G. : Infinite root systems, representations of
graphs and invariant theory, Inventiones Math.,
56(1980), 57-92.
- [3] Lepowsky, J. : "Lectures on Kac-Moody Lie algebras,"
Paris Univ., 1978.
- [4] Moody, R. V. : Root systems of hyperbolic type,
Advance Math., 33(1979), 144-160.

さらに、本報告集からの引用として、次の4つを挙げておく。

- [5, 岩堀-小池], [6, 成瀬], [7, 田中], [8, 谷崎]