

Intersection numbers of loaded (twisted) cycles and the correlation functions of the conformal field theory

三町勝久 (東工大・理)

吉田正章 (九大・数理)

共形場理論に現れる相関関数 $G(z, \bar{z}) = G(z_1, \dots, z_n, \bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$ は, Virasoro 代数 (共形場の対称性) の表現から導かれる複素解析的微分方程式の解 $I_i(z)$ を用いて

$$G(z, \bar{z}) = \sum X_{ij} I_i(z) \overline{I_j(z)}, \quad X_{ij} \in \mathbb{C} \quad (1)$$

と表される一価解析関数である.

ここで, $I_i(z)$ は一般に多価正則な関数であるから, 2 次形式 $G(z, \bar{z})$ が一価関数となるには係数 X_{ij} に強い制限を課す必要がある. そして, 実際には, それだけで, $G(z, \bar{z})$ 全体の定数倍を除き係数 X_{ij} が決定されるだろうというのが共形場理論での基本的な考え方である [BPZ].

このような考えの下, Dotsenko-Fateev は Nuclear Physics **B240**[FS12] (1984), 312-348 において, z が 1 変数で, 理論の微分方程式が 2 階のものと 3 階のものに対して具体的な計算を行い, その有効性を示した.

まず, 理論の微分方程式が 2 階の場合は, ガウスの超幾何微分方程式に相当する場合である. 以下, 便宜上 $0 < z < 1$ とするが, このとき,

$$I_1(z) = \int_1^\infty t^a (t-1)^b (t-z)^c dt,$$

$$I_2(z) = \int_0^z t^a (1-t)^b (z-t)^c dt$$

はその微分方程式の解の基底を与える. ただし, 被積分関数の各因子の偏角はすべてゼロとし, 指数 a, b, c は $a, b, c, a+b+c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ をみたすものとする. そして, この 2 つの関数を用いた 2 次形式

$$s(b)s(a+b+c)|I_1(z)|^2 + s(a)s(c)|I_2(z)|^2 \quad (2)$$

はモノドロミー不変である ([DF1] の (4.18)). ただし, ここで, $s(A) = \sin(\pi A)$ なる略記号を用いた.

次に, 理論の微分方程式が 3 階のとき, 対応する理論の微分方程式を書き下すと

$$z^2(z-1)^2 I''' + (K_1 z + K_2(z-1))z(z-1)I'' \\ + (L_1 z^2 + L_2(z-1)^2 + L_3 z(z-1))I' + (M_1 z + M_2(z-1))I = 0,$$

ただし,

$$K_1 = -g - 3b - 3c, \quad K_2 = -g - 3a - 3c, \\ L_1 = (b+c)(2b+2c+g+1), \quad L_2 = (a+c)(2a+2c+g+1), \\ L_3 = (b+c)(2a+2c+g+1) + (a+c)(2b+2c+g+1) \\ + (c-1)(a+b+c) + (3c+g)(a+b+c+g+1), \\ M_1 = -c(2b+2c+g+1)(2a+2b+2c+g+2), \\ M_2 = -c(2a+2c+g+1)(2a+2b+2c+g+2)$$

であるが, 以下, $0 < z < 1$ および

$$a, b, c, g, 2a+g, 2b+g, 2c+g, a+b+c+g, 2a+2b+2c+g, 2a+2b+2c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

とすると, 解の基底は被積分函数の各因子の偏角をゼロとした

$$I_1(z) = \int_1^\infty dt_1 \int_1^{t_1} dt_2 (t_1 - t_2)^g \prod_{i=1,2} t_i^a (t_i - 1)^b (t_i - z)^c, \\ I_2(z) = \int_1^\infty dt_1 \int_0^z dt_2 (t_1 - t_2)^g t_1^a (t_1 - 1)^b (t_1 - z)^c t_2^a (1 - t_2)^b (z - t_2)^c, \\ I_3(z) = \int_0^z dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 (t_1 - t_2)^g \prod_{i=1,2} t_i^a (1 - t_i)^b (z - t_i)^c$$

という積分 (セルバーグ型積分) で与えることができ, モノドロミー不変な 2 次形式は, $c(A) = \cos(\pi A)$ および $s(A) = \sin(\pi A)$ という略記号を用いると, 定数倍を除いて

$$s(a+b+c+g)s(a+b+c+\frac{g}{2})s(a+c+g)s(b)s(b+\frac{g}{2})2c(\frac{g}{2}) \times |I_1(z)|^2 \\ + s(a+b+c+g)s(a+c+\frac{g}{2})s(a)s(b)s(c) \times |I_2(z)|^2 \\ + s(a+\frac{g}{2})s(a)s(c+\frac{g}{2})s(c)s(a+c)2c(\frac{g}{2}) \times |I_3(z)|^2 \quad (3)$$

で与えられる ([DF1] の (5.16)). これが Dotsenko-Fateev の計算結果である.

これらを導出するための Dotsenko-Fateev による基本的手筋は次の通りである。まず、Virasoro 代数の表現から導かれる複素解析的微分方程式は、 $0, 1, \infty$ の 3 点を特異点にもつ確定特異点型の常微分方程式であることに注意する。そして、原点における基本的な解（上記の I_j 達は原点における基本的な解）とともに、 1 の近傍における基本的な解をも積分表示により与え、ついで、それらの接続関係を導く。この接続関係がわかれば、2 次形式 (1) がモノドロミー不変になるための条件を X_{ij} のみたす連立一次方程式で表すことができる。あとは、それを解くことにより X_{ij} を決定すればよい。

こう書くと、何も問題が無いようであるが、実はそうでない。

まず、一般には、ここに現れる一次方程式系は過剰決定系であり、その可解性は明らかではない。そして、可解性が保証されたとしても、それを解ききるとなると大変である。

実際、Dotsenko-Fateev は、要所要所で作業仮説を置きながら論を進めている。

そもそも、上の具体例の計算に現れた $I_j(z)$ 達は、原点における局所モノドロミー行列が対角行列になっているので、そのあとに続く議論が格段に易しくなっている。しかし、他の基底に取り替えたらどうなるだろうかなどと考え出すだけで、頭が痛くなる。

そして、彼らは、正直に、「この場合は、とりあえず、矛盾無く係数が求まったようであるが、状況を考えると、どうして矛盾無く求まったのか良くわからない。そして、それを明らかにする、一般的な定理があるに違いない」という趣旨のことを述べている。

ここに、我々の問題意識が生ずる。

ところで、さきほど現れたような積分は、局所系 (local system) 係数のホモロジーとコホモロジーとのペアリングと見なすことで、ねじれドラム理論 (twisted de Rham theory) の枠組みで扱うことが可能となる。

そして、ねじれドラム理論の知見と照らしあわせながら 2 次形式の具体的表示 (2) と (3) を眺めていると、相関函数 (1) は交差数理論に現れる「不変エルミート形式」そのものであり、係数 X_{ij} は函数を背負ったサイクル (loaded cycle) またはねじれサイクル (twisted cycle) の交差数に起源を持つものであると考えたくなる。事実、Dotsenko-Fateev の扱った二つの例に関してそれは正しい。これが今回の主張である [MY].

これらを説明するために、函数を背負ったサイクルとその交差数に関する簡単なまとめから始める。

1 函数を背負ったサイクルとその交差数

まずは基本的な事項の確認から [KY1-2][Y1-2].

いま、 l_j を $t = (t_1, \dots, t_r)$ に関する一次函数とし、 H_j を $l_j = 0$ で与えられる超平面とすると、 $u(t) = \prod_{j=0}^m l_j^{\alpha_j}$ (ただし $\sum_{j=0}^m \alpha_j = 0$) は $T = \mathbb{P}^r(\mathbb{C}) - \bigcup_j H_j$ における多価正則函数である。そして、正則 1-form $\omega = du(t)/u(t)$ を用いた微分方程式

$dL = L\omega$ の局所解のなす層を $\mathcal{L}$, $dL = -L\omega$ の局所解のなす層を $\mathcal{L}^\vee$ とすれば, $\mathcal{L}$ も $\mathcal{L}^\vee$ も局所系 (local system) になっている. $\mathcal{L}$ は $u(t)$ の定義する局所系, $\mathcal{L}^\vee$ は $u(t)^{-1}$ の定義する局所系としばしば呼ばれる. また, この他にも, $\bar{u}(t)$ の定義する局所系 $\bar{\mathcal{L}}$ が, 我々の議論で大きな役割を担っていることを強調したい.

次に, $H_p(T, \mathcal{L})$ と $H_p^{lf}(T, \mathcal{L})$ とを $\mathcal{L}$ 係数の p -次ねじれホモロジー群 (twisted homology group), $\mathcal{L}$ 係数の p -次局所有限ねじれホモロジー群 (locally finite twisted homology group) とし, これらの元を函数を背負ったサイクルとか, ねじれサイクルと呼ぶことにする.

指数 α_j に関する適当な genericity を仮定すれば, Poincaré の双対性は非退化なペアリング

$$I : H_r(T, \mathcal{L}) \times H_r^{lf}(T, \mathcal{L}^\vee) \longrightarrow \mathbb{C},$$

ただし,

$$I \left(\sum_j a_j \rho_j \otimes v_j, \sum_k b_k \sigma_k \otimes v_k^\vee \right) = \sum_{j,k} a_j b_k \sum_{p \in \rho_j \cap \sigma_k} I_p(\rho_j, \sigma_k) v_j(p) v_k^\vee(p)$$

を定義する. ここで, ρ_j, σ_k は r -単体, v_j は ρ_j 上の $\mathcal{L}$ の切断, $v_k^\vee$ は σ_k 上の $\mathcal{L}^\vee$ の切断, $I_p(\rho_j, \sigma_k)$ は通常之位相的な交差数とする. このペアリング I を函数を背負ったサイクルの交差形式という (ペアリングを $\cdot$ で表すことも多い). また, $H_p(T, \mathcal{L})$ を定義する境界作用素 ∂_ω は $\partial_\omega : \rho \otimes u_\rho(t) \rightarrow \partial\rho \otimes u_\rho(t)|_{\partial\rho}$ により与えられる. ただし, ∂ は通常の境界作用素であり, $u_\rho(t)|_{\partial\rho}$ は $u_\rho(t)$ の $\partial\rho$ への制限である.

いっぽう, genericity を仮定したとき, 自然な同型

$$H_p(T, \mathcal{L}) \longrightarrow H_p^{lf}(T, \mathcal{L})$$

が存在するが, この逆写像として与えられる

$$\text{reg}_\omega : H_p^{lf}(T, \mathcal{L}) \longrightarrow H_p(T, \mathcal{L})$$

をサイクルの正則化 (regularization) と呼ぶことにする.

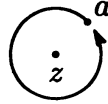
次に, これらを易しい例でおさらいする.

2 ランク 1 の場合

まず $u(t) = t^a(t-1)^b$ および $T = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, $a, b, a+b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ として $\mathcal{L}$ を $u(t)$ により定義される T 上の局所系とする. すなわち, $dL/dt = (\frac{a}{t} + \frac{b}{t-1})L$ の局所解全体を $\mathcal{L}$ とする. このとき, $\mathcal{L}$ を係数とするねじれホモロジー $H_1^{lf}(T, \mathcal{L})$ の階数は 1 であり, 基底として

$$C = \overrightarrow{(0, 1)} \otimes t^a(1-t)^b \quad (4)$$

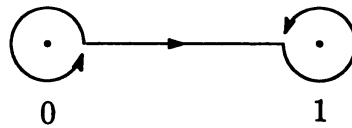
を採ることが出来る．ここで $t^a(1-t)^b$ の各因子の偏角 (argument) は $(0, 1)$ 上でゼロ，すなわち $\arg t = \arg(1-t) = 0$ とする．次に，対応する正則化 (regularization) を考えたい． $S(a; z)$ という記号で点 z を中心，点 a を始点および終点とする円周で，正の方向 (反時計回り) をもったものとする．図示すれば， $S(a; z)$ は



である．このとき， $C \in H_1^{lf}(T, \mathcal{L})$ の正則化 $\text{reg}C \in H_1(T, \mathcal{L})$ は次の通り．

$$\text{reg}C = \left\{ \frac{1}{1-e(a)} S(\epsilon; 0) + \overrightarrow{[\epsilon, 1-\epsilon]} - \frac{1}{1-e(b)} S(1-\epsilon; 1) \right\} \otimes t^a(1-t)^b. \quad (5)$$

ただし， $t^a(1-t)^b$ の偏角は $[0+\epsilon, 1-\epsilon]$ において $\arg t = \arg(1-t) = 0$ とし，あとは自然に解析接続したものを考える．つまり， $S(\epsilon; 0)$ の上では $\arg t$ が 0 から 2π までの値をとるし， $S(1-\epsilon; 1)$ の上では $\arg(1-t)$ が 0 から 2π までの値をとるものとする．また， $e(a) = \exp(2\pi\sqrt{-1}a)$ とする．ここで現れる有向 path だけを取り出して書けば



であり，正規化 $\text{reg}C$ を表す図としてしばしば用いられるが，実際には (5) を意味しているということに注意しよう． $\text{reg}C$ は $H_1(T, \mathcal{L})$ の基底になっている．

また，係数を $\mathcal{L}^\vee$ に取り替えた $H_1(T, \mathcal{L}^\vee)$ の基底は

$$C^\vee = \overrightarrow{(0, 1)} \otimes t^{-a}(1-t)^{-b} \quad (6)$$

である．

これらの準備の下で，交差数 $\text{reg}C \cdot C^\vee$ の計算を行う．わかりやすくするために絵をも使おうと

$$\begin{aligned} \text{reg}C \cdot C^\vee &= \begin{array}{c} C^\vee \\ \text{reg}C \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{reg}C \\ C^\vee \end{array} \\ &= -\frac{1}{e(a)-1} - 1 + \frac{-1}{e(b)-1} \\ &= -\frac{e(a)e(b)-1}{(e(a)-1)(e(b)-1)} = \frac{\sqrt{-1}}{2} \frac{s(a+b)}{s(a)s(b)}. \end{aligned}$$

ここで $(0, 1)$ をサインカーブのように変形して計算したが、これは好きなようにとれば良く、例えば

$$\begin{aligned} \text{reg} C \cdot C^\vee &= \begin{array}{c} \text{C}^\vee \\ \text{0} \quad \text{reg} C \quad \text{1} \end{array} = -\frac{1}{e(a)-1} + \frac{-e(b)}{e(b)-1} \\ &= -\frac{e(a)e(b)-1}{(e(a)-1)(e(b)-1)} = \frac{\sqrt{-1} s(a+b)}{2 s(a)s(b)} \end{aligned}$$

のようにも計算できる。

3 ランク 2 の場合

指数を $a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ として $T = \mathbb{P}^1(\mathbb{C}) \setminus \{0, 1, z, \infty\}$ における多価正則函数 $u(t) = t^a(t-1)^b(t-z)^c$ を固定する。そして、 $u(t)$ によって決まる局所系を $\mathcal{L}$ とするなどいままですりとして、以下、便宜上 $0 < z < 1$ とする。このとき、局所有限ホモロジー $H_1^{lf}(T, \mathcal{L})$ のランクは 2 であり、例えば、

$$\begin{aligned} C_1 &= \overrightarrow{(1, \infty)} \otimes t^a(t-1)^b(t-z)^c, \\ C_2 &= \overrightarrow{(0, z)} \otimes t^a(1-t)^b(z-t)^c \end{aligned}$$

はその基底を与える。ただし、第 2 成分の多価函数の因子の偏角は第 1 成分の path 上でそれぞれゼロとする。以下、偏角の指定の仕方はランク 1 の場合に説明した通りであるので、逐次但し書きをしないことにするが、誤解は起きないであろう。

さて、 C_1, C_2 の正則化は次で与えられる。

$$\begin{aligned} \text{reg} C_1 &= \left\{ \frac{1}{e(b)-1} S(1+\epsilon; 1) + \overrightarrow{[1+\epsilon, R]} - \frac{1}{e(-a-b-c)-1} S(R; 0) \right\} \\ &\quad \otimes t^a(t-1)^b(t-z)^c \quad (R > 1, \epsilon > 0), \\ \text{reg} C_2 &= \left\{ \frac{1}{e(a)-1} S(\epsilon; 0) + \overrightarrow{[\epsilon, z-\epsilon]} - \frac{1}{e(c)-1} S(z-\epsilon; z) \right\} \\ &\quad \otimes t^a(1-t)^b(z-t)^c \quad (\epsilon > 0). \end{aligned}$$

ただし、 $S(R; 0)$ は無限遠点を囲む円周と見なしていることに注意しよう。

これらの準備のもとで交点数の計算をすると,

$$\begin{aligned} Int &= \begin{pmatrix} \text{reg} C_1 \cdot C_1^\vee & \text{reg} C_1 \cdot C_2^\vee \\ \text{reg} C_2 \cdot C_1^\vee & \text{reg} C_2 \cdot C_2^\vee \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{-1}}{2} \begin{pmatrix} \frac{s(a+c)}{s(b)s(a+b+c)} & 0 \\ 0 & \frac{s(a+c)}{s(a)s(c)} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる.

ところで, サイクル C_i 上の積分で表示された函数 $I_i(z)$ に対して,

$$F(z, \bar{z}) = (\overline{I_1(z)}, \overline{I_2(z)}) H \begin{pmatrix} I_1(z) \\ I_2(z) \end{pmatrix}, \quad H = Int^{-1}$$

はモノドロミー不変である ($\bar{\mathcal{L}}$ は $\bar{u}(t)$ で定義される局所系であるが, $a, b, c \in \mathbb{R}$ より $\mathcal{L}^\vee \simeq \bar{\mathcal{L}}$, つまり, $\mathcal{L}^\vee$ の場合に出てくるモノドロミー行列 $M^\vee$ と $\bar{\mathcal{L}}$ の場合に出てくるモノドロミー行列 $\bar{M}$ とが等しいことに注意する). したがって,

$$H = Int^{-1} = \frac{2}{\sqrt{-1}} \begin{pmatrix} \frac{s(b)s(a+b+c)}{s(a+c)} & 0 \\ 0 & \frac{s(a)s(c)}{s(a+c)} \end{pmatrix}$$

を用いれば,

$$I_1(z) = \int_1^\infty t^a (t-1)^b (t-z)^c dt,$$

$$I_2(z) = \int_0^z t^a (1-t)^b (z-t)^c dt$$

として

$$F(z, \bar{z}) = \frac{2s(a+c)}{\sqrt{-1}} \{s(b)s(a+b+c)|I_1(z)|^2 + s(a)s(c)|I_2(z)|^2\}.$$

がモノドロミー不変な函数であることがわかる.

これが (2) の正体である.

4 ランク 3 の場合

さて、多重積分の場合である。

局所系 $\mathcal{L}$ を決める $T = \mathbb{P}^2(\mathbb{C}) \setminus \{t_1 - t_2 = 0, t_i = 1 - t_i = z - t_i = 0 (i = 1, 2)\}$ 上の多価函数 $u(t) = (t_1 - t_2)^g \prod_{i=1,2} t_i^a (t_i - 1)^b (t_i - z)^c$ を固定し、便宜上 $0 < z < 1$ として、さらに

$$a, b, c, g, 2a + g, 2b + g, 2c + g, a + b + c + g, 2a + 2b + 2c + g, 2a + 2b + 2c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$$

という仮定をおく。

このとき、標準的な方向を備えた

$$D_1^{(1)} = \{(t_1, t_2); 1 < t_1, 1 < t_2 < t_1\}, D_1^{(2)} = \{(t_1, t_2); 1 < t_2, 1 < t_1 < t_2\},$$

$$D_2^{(1)} = \{(t_1, t_2); 1 < t_1, 0 < t_2 < 1\}, D_2^{(2)} = \{(t_1, t_2); 1 < t_2, 0 < t_1 < 1\},$$

$$D_3^{(1)} = \{(t_1, t_2); 0 < t_1 < 1, 1 < t_2 < t_1\},$$

$$D_3^{(2)} = \{(t_1, t_2); 0 < t_2 < 1, 1 < t_1 < t_2\}$$

という $\mathbb{R}^2$ の領域を用いて

$$C_1^{(1)} = D_1^{(1)} \otimes (t_1 - t_2)^g \prod_{i=1,2} t_i^a (t_i - 1)^b (t_i - z)^c,$$

$$C_1^{(2)} = D_1^{(2)} \otimes (t_2 - t_1)^g \prod_{i=1,2} t_i^a (t_i - 1)^b (t_i - z)^c,$$

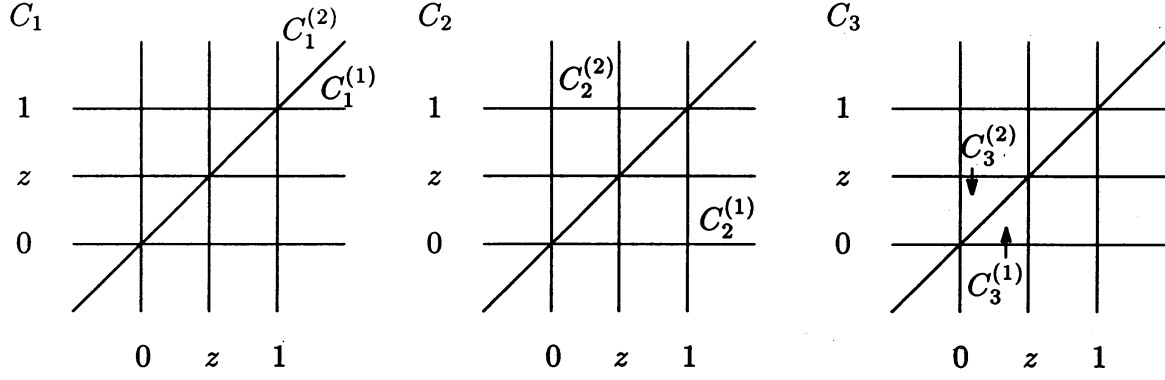
$$C_2^{(1)} = D_2^{(1)} \otimes (t_1 - t_2)^g t_1^a (t_1 - 1)^b (t_1 - z)^c t_2^a (1 - t_2)^b (z - t_2)^c,$$

$$C_2^{(2)} = D_2^{(2)} \otimes (t_2 - t_1)^g t_2^a (t_2 - 1)^b (t_2 - z)^c t_1^a (1 - t_1)^b (z - t_1)^c,$$

$$C_3^{(1)} = D_3^{(1)} \otimes (t_1 - t_2)^g \prod_{i=1,2} t_i^a (1 - t_i)^b (z - t_i)^c,$$

$$C_3^{(2)} = D_3^{(2)} \otimes (t_2 - t_1)^g \prod_{i=1,2} t_i^a (1 - t_i)^b (z - t_i)^c$$

という T 上の背負ったサイクルを定義する。ここでもそれぞれの多価函数の各因子の偏角は対応する領域上でゼロである。このとき $C_i^{(j)}$ ($i = 1, 2, 3, j = 1, 2$) は $H_2^{lf}(T, \mathcal{L})$ の基底を与えるが、さらに $C_i = \frac{1}{2}(C_i^{(1)} - C_i^{(2)})$ ($i = 1, 2, 3$) とおくと、これは t_1, t_2 への作用に関する $\mathfrak{S}_2$ -不変な部分空間 $H_2^{lf}(T, \mathcal{L})^{\mathfrak{S}_2}$ の基底を与えている。ここで σ_1 を $\mathfrak{S}_2$ の生成元としたとき、 $\sigma_1(D_i^{(1)}) = -D_i^{(2)}$ より $\sigma_1(C_i^{(1)}) = -C_i^{(2)}$ であることに注意



これらの交差数を計算すると

$$\begin{aligned}
 Int &= (\text{reg} C_i \cdot C_j^\vee) \\
 &= -\frac{1}{8} \begin{pmatrix} \frac{s(a+c)s(a+c+\frac{g}{2})}{s(b+\frac{g}{2})s(b)s(a+b+c+g)s(a+b+c+\frac{g}{2})2c(\frac{g}{2})} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s(a+c+g)s(a+c)}{s(a)s(b)s(c)s(a+b+c+g)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{s(a+c+\frac{g}{2})s(a+c+g)}{s(a+\frac{g}{2})s(c+\frac{g}{2})s(a)s(c)2c(\frac{g}{2})} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{s(a+c+\frac{g}{2})s(a+c+g)}{s(a+\frac{g}{2})s(c+\frac{g}{2})s(a)s(c)2c(\frac{g}{2})} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{s(a+c+\frac{g}{2})s(a+c+g)}{s(a+\frac{g}{2})s(c+\frac{g}{2})s(a)s(c)2c(\frac{g}{2})} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{s(a+c+\frac{g}{2})s(a+c+g)}{s(a+\frac{g}{2})s(c+\frac{g}{2})s(a)s(c)2c(\frac{g}{2})} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

であるから、サイクル C_i 上の積分を $I_i(z)$ とすれば

$$\begin{aligned}
 F(z, \bar{z}) &= (\overline{I_1(z)}, \overline{I_2(z)}, \overline{I_3(z)}) H \begin{pmatrix} I_1(z) \\ I_2(z) \\ I_3(z) \end{pmatrix} \\
 &= -\frac{8}{s(a+c)s(a+c+\frac{g}{2})s(a+c+g)} \\
 &\quad \times \left[s(a+b+c+g)s(a+b+c+\frac{g}{2})s(a+c+g)s(b)s(b+\frac{g}{2})2c(\frac{g}{2}) \times |I_1(z)|^2 \right. \\
 &\quad + s(a+b+c+g)s(a+c+\frac{g}{2})s(a)s(b)s(c) \times |I_2(z)|^2 \\
 &\quad \left. + s(a+\frac{g}{2})s(a)s(c+\frac{g}{2})s(c)s(a+c)2c(\frac{g}{2}) \times |I_3(z)|^2 \right] \quad (7)
 \end{aligned}$$

がモノドロミー不変な二次形式, これが (3) の正体である.

最後に注意を与える. (7) のモノドロミー不変性を保証するには, そもそも $H_2^{lf}(T, \mathcal{L})^{\oplus 2}$ が z への基本群 $\pi_1(\mathbb{C} \setminus \{0, 1\})$ の作用で閉じていることを確かめねばならないが, これは [M] の結果を用いれば確かめることが出来る.

参考文献

- [BPZ] A.A.Belavin, A.M.Polyakov, and A.B.Zamolodchikov : Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory, Nucl. Phys. **B241** (1984), 333-380.
- [DF1] V.I.S.Dotsenko and V.A.Fateev : Conformal algebra and multipoint correlation functions in 2D statistical models, Nuclear Physics, **B240**[FS12] (1984), 312-348.
- [DF2] V.I.S.Dotsenko and V.A.Fateev : Four-point correlation functions and operator algebra in 2D conformal invariant theories with central charge $C \leq 1$, ibid., **B251**[FS13] (1985), 691-734.
- [KY1] M.Kita and M.Yoshida : Intersection theory for twisted cycles, Math. Nachr. **166** (1994), 287-304.
- [KY2] M.Kita and M.Yoshida : Intersection theory for twisted cycles II, Math. Nachr. **168** (1994), 171-190.
- [M] K.Mimachi : Monodromy representations associated with a Selberg type integral, preprint.
- [MY] K.Mimachi and M.Yoshida : Intersection numbers of twisted cycles and the correlation functions of the conformal field theory, preprint.
- [Y1] M.Yoshida : *Hypergeometric Functions, My Love*, Vieweg, 1997.
- [Y2] M.Yoshida : Intersection theory for twsted cycles III —Determinant formulae, Math. Nachr. **214** (2000), 173-185.

Katsuhisa Mimachi
Department of Mathematics
Tokyo Institute of Technology
Oh-okayama, Meguro-ku,
Tokyo 152-8551

Masaaki Yoshida
Department of Mathematics
Kyushu University
Ropponmatsu, Fukuoka 810-8560
Japan