

氏 名	安 倍 齊 あ べ ひとし
学 位 の 種 類	理 学 博 士
学 位 記 番 号	論 理 博 第 145 号
学位授与の日付	昭 和 41 年 6 月 21 日
学位授与の要件	学 位 規 則 第 5 条 第 2 項 該 当
学 位 論 文 題 目	On meromorphic and circumferentially mean univalent functions (有理型円周的平均単葉函数について)
論文調査委員	(主 査) 教 授 小 堀 憲 教 授 小 松 醇 郎 教 授 溝 畑 茂

論 文 内 容 の 要 旨

ドイツの L. Bieberbach が1922年に、正則函数の零点の分布に関する研究、すなわち函数 $f(z)$ が単位円 $K(0; 1) = \{z \mid |z| < 1\}$ で正則であるとき、方程式 $f(z) = 0$ の根の分布に関する研究を始めたのがきっかけとなって、 a を一般の複素数としたときの方程式 $f(z) = a$ の根を研究することが問題となり、さらに、 $f(z) = a$ の根の個数が p を越さない場合、というふうに、根の個数を制限した場合に、函数 $f(z)$ に、どのような特徴が現われるか、という問題が生じ、これが p 葉函数へと発展したのである。

ポーランドの M. Biernacki は、方程式

$$f(z) - Re^{i\varphi} = 0, \quad (R > 0),$$

の根の個数を $n(R, \varphi)$ と表わした。この個数を R の函数として研究するのではなくて、その平均値 $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} n(R, \varphi) d\varphi$ を研究した。そして、特に

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} n(R, \varphi) d\varphi \leq p$$

の場合に、興味ある結果を得た。そして Biernacki は、この場合には「円周的平均 p 葉」であると名づけた。したがって、 $p=1$ の場合が「円周的平均単葉」なのである。

主論文においては、主として、この「円周的平均単葉函数」が対象となっているが、さらに、この結果を、特殊な形の「円周的平均 p 葉函数」へ広げることができることを示している。

単位円 $K(0; 1)$ において、展開の形が

$$\frac{1}{2} + a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

で与えられる函数族に対しては、これの函数が円周的平均単葉である場合に、単位円 $K(0; 1)$ のこの函数族に属する函数 $w = f(z)$ による像としてできる領域に属さない点を w_c とすれば

$$\max |w_c| - \min |w_c| \leq 4$$

がなりたつことを証明している。そして、これから直接に導き出される結果を、いくつか示しているが、

そのなかには、L. Bieberbach や P. Montel などが異なる方法で導き出したものも含まれている。

さらに、申請者は、この方法を、単位円 $K(0; 1)$ で有理型ではあるが、原点における展開の形が

$$z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

である函数族へ利用して、興味ある結果を得ている。この函数族に属する函数の1つを $f(z)$ とし、これの $K(0; 1)$ にある極を z_∞ で示すと

$$\max |w_c| - \min |w_c| \leq \frac{4}{1 - |z_\infty|^2}$$

であることを示し、「 $f(z)$ の値域は、円板 $\{w | |w| < \delta\}$ または $\{w | |w| > \delta^{-1}\}$ を蔽う」ことを示している。この δ というのは

$$\delta = \frac{-2}{1 - |z_\infty|^2} + \sqrt{\frac{4}{(1 - |z_\infty|^2)^2} + 1}$$

のことである。

さらに、申請者は、この結果を、単位円 $K(0; 1)$ で有理型であって、原点における展開が

$$z^p + a_{p+1} z^{p+1} + a_{p+2} z^{p+2} + a_{p+3} z^{p+3} + \cdots$$

で与えられる函数族にあてはめて、

i) この函数族に属する函数の値域は円板

$$|w| < \frac{|z_\infty|^p}{(1 + |z_\infty|)^{2p}} \text{ を } p \text{ 回蔽うている。}$$

$$\text{ii) } |a_{p+1}| \leq p \left(|z_\infty| + \frac{1}{|z_\infty|} \right)$$

という2つの結果を得ている。さらに、この函数族に属する函数 $f(z)$ に対する $|f(z)|$ の評価を与えている。この評価は、精密という点からみると、見劣りがするけれども、方法が初等的であるのに、結果が良いので、魅力がある。

参考論文は、主として純粋な p 葉函数を対象とし、函数が定義されている領域を、複連結のものとしている。この種の研究は、現在進行中のものであるが、 $|f(z)|$, $|f'(z)|$ の評価が与えられていて、興味深いものがある。

論文審査の結果の要旨

単位円 $K(0; 1)$ において有理型である函数の単葉性に関する研究と平行して、正則な函数の単葉性を、平均単葉性や円周的平均単葉性といった、ゆるい条件でおきかえて研究が進められてきたが、申請者は、両者を総合して、単位円 $K(0; 1)$ で、有理型で、しかも円周的平均単葉の場合を取り上げた。

この目的を達成するために樹立した主定理ともいべき結果は

$$\max |w_c| - \min |w_c| \leq 4$$

であるが、この結果そのものが、興味あるものであり、また有力なものであって、利用価値が高い。申請者も示しているように、直接の結果として、Bieberbach や Montel が異なる原理にもとづいて樹立したものを1つの原理で統一している。これの証明方法も、申請者の研究内容の広さと深さとを、よく示している。

この結論を得るために、申請者は、補助定理として、単位円 $K(0; 1)$ の函数

$$f(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n + \cdots$$

による像領域 $D(f)$ の補集合 $C[D(f)]$ の超越直径 $\tau(f)$ と、 $C[D(f)]$ を正の実軸に関する円対称化を行なったものの超越直径 $\tau^*(f)$ との間に、 $\tau(f) \geq \tau^*(f)$ がなりたつことを証明しているが、これは重要な結果である。これも応用範囲の広い結果であるが、申請者は、これから主定理を導き出したのであるから、「超越直径」という概念と、「円対称化」という概念とを、みごとに利用したものとして、方法論的にみて、高く評価されてよい。

導き出された諸定理も、正則函数の場合に証明された結果の有理型函数への拡張があり、また、ただの「単葉」という条件で導き出されたもの、あるいは「平均単葉」という条件で導き出されたものなどが、「円周的平均単葉函数」に対してもなりたつこと、あるいはこれだけにしかなりたたない結果などを導き出している。

また、有理型函数の場合に、古くから企てられていたけれども、成功することの少なかった、極と値域の範囲との関係についても、申請者の研究の手がのびている。新しい結果、それも精密なものを得ているが、その努力は賞讃されてよい。

なお、申請者は、研究に不便な環境にありながらも、刻苦勉強して、上に述べたような結果を得ている。このことは、称えられてよいと考える。

以上のことから、本論文は理学博士の学位論文として価値があるものと認める。