

On a perfect isometry between principal blocks of finite groups

熊本大学大学院自然科学研究科 (理学系) 渡邊アツミ (Atumi WATANABE)

Department of Mathematics, Faculty of Science, Kumamoto University

1 問題

$(K, \mathcal{O}, k)$ を十分大きな p -モジュラー系, G を有限群とする. G の p -正則元の全体 G_p' で生成される G の正規部分群は $O^p(G)$ に一致する. P を G の Sylow p -部分群とする. P の部分群

$$Q := \langle [T, O^p(N_G(T))] \mid T \leq P \rangle$$

は G の p -超焦点部分群と呼ばれる.

$$Q = P \cap O^p(G)$$

が成り立つ (Puig [7], 証明は [3], 定理 1.33 参照).

Rouquier 予想 (主ブロックの場合) ([8], A.2) Q が可換であるならば G の主ブロック $b(G)$ と $b(N_G(Q))$ は導来同値である.

一般のブロックに対する Rouquier 予想については [12] を参照されたい. [11], §2 より, $Q \leq Z(P)$ ならば $b(G)$ と $b(N_G(P))$ は導来同値であることが予想される. 故に次が予想される.

問題 $Q \leq Z(P)$ ならば $b(G)$ と $b(N_G(P))$ の間に perfect isometry が存在する.

定理 ([11], 定理 3) $Q \leq Z(P)$ かつ Q が巡回群であるならば $b(G)$ と $b(N_G(P))$ の間に isotypy が存在する.

・ Z_p -定理を用いると, $b(G)$ と $b(N_G(P))$ は Rickard equivalent が示される. 上の定理はこの事実を使わずに証明する.

- ・ P が可換である場合は既に証明されている ([10]).
- ・ 上の定理の証明では Puig-Usami の方法 [6], §3 を用いる.

2 Perfect isometry と isotypy

[2] で導入されたブロックの perfect isometry と isotypy の定義を述べる. なおブロックの理論に関する用語と記号は [5], [9] に従う. e を有限群 G のブロック, f を有限群 H のブ

ロックとする. ブロックは $\mathcal{O}$ 上の群環のブロック冪等元を指す. $(KHf)^\circ$ を KHf の反対環とする. $KGe_K(KHf)^\circ$ の一般指標 μ は次の 2 条件を満たすとする:

- (1) 任意の $(g, h) \in G \times H$ に対して $\frac{\mu(g, h)}{|C_G(g)|}, \frac{\mu(g, h)}{|C_H(h)|} \in \mathcal{O}$.
- (2) $\mu(g, h) \neq 0$ ならば g と h は共に p -正則であるか p -非正則である.

$$\mu = \sum_{\zeta \in \text{Irr}(f)} I(\zeta) \zeta, \quad I(\zeta) \in \mathbf{Z}\text{Irr}(e)$$

と書くとき, $\mathbf{Z}$ -線形写像

$$I : R_K(H, f) := \mathbf{Z}\text{Irr}(f) \rightarrow R_K(G, e) \quad (\zeta \mapsto I(\zeta))$$

が全単射の isometry であるならば, I を μ が与える f から e への **perfect isometry** という. このとき任意の $\zeta \in \text{Irr}(f)$ に対して

$$\exists_1 \chi \in \text{Irr}(e) \text{ s. t. } I(\zeta) = \chi.$$

e と f は共通の不足群 P をもつとする. (P, e_P) を極大 b -Brauer pair, (P, f_P) を極大 f -Brauer とする. 各 $u \in P$ に対して e -Brauer 元 $(u, e_u) \in (P, e_P)$, f -Brauer 元 $(u, f_u) \in (P, f_P)$ とする. ここで次の 2 条件を仮定する.

- (1) e と f の Brauer 圏は等しい, つまり $\mathcal{F}_{(P, e_P)}(G, e) = \mathcal{F}_{(P, f_P)}(H, f)$.
- (2) P の各元 u に対して

$$I^{(u)} d_H^{(u, f_u)} = d_G^{(u, e_u)} I^{(1)}$$

を満たす perfect isometry

$$I^{(u)} : R_K(C_H(u), f_u) \rightarrow R_K(C_G(u), e_u)$$

が存在する. 但し $I^{(u)}$ は $K \otimes_{\mathbf{Z}} R_K(C_H(u), f_u)$ から $K \otimes_{\mathbf{Z}} R_K(C_G(u), e_u)$ への写像と見ている. また $d_G^{(u, e_u)}$ は分解写像 (cf. [2]) である. このとき $I = I^{(1)}$ を $\{I^{(u)}\}_{u \in P}$ を local system とする f から e への **isotypy** という.

3 定理の証明の流れ

[11], §4 に従って定理の証明の流れをたどる.

$$b := b(G), \quad b_0 := b(N_G(P)), \quad H := O^p(G).$$

仮定から $Q \leq Z(P)$ で Q は H の巡回 Sylow p -部分群である.

$$E = (N_H(P)C_G(P))/C_G(P)$$

とおく. E は $N_G(P)/C_G(P)$ における正規 p -補群である.

- 1) ([11], 定理 1) G と $N_G(P)$ の Frobenius 圏は同じ, つまり $\mathcal{F}_P(G) = \mathcal{F}_P(N_G(P))$.
 2) ([11], 命題 2) $P = Q \quad R, R = C_P(E)$.
 3) ([11], 命題 3) $E = N_H(Q)/C_H(Q)$.

$$e := |E|, m := \frac{|Q| - 1}{e}.$$

$\mathcal{M}$ を Q の非自明な 1 次指標の E -軌道の完全代表系とする.

$$:= \sum_{x \in E} \mu^x \quad (\mu \in \mathcal{M}).$$

[4] より

$$\text{Irr}(b(H)) = \{\chi_1 = 1_H, \chi_2, \quad, \chi_e; \chi \quad (\mu \in \mathcal{M})\}$$

と記述される, 但し

$$\begin{cases} \chi_j(\rho) = \epsilon_j, \\ \chi(\rho) = \epsilon(\quad), \\ ((\neq 1) \in Q, \rho \in (C_H(\quad))_{p'}) ; \epsilon_1 = 1, \epsilon_j = -1 (j = 2), \epsilon = -1 \end{cases}$$

なお $m = 1$ のとき χ は χ_i と区別しない.

- 4) ([11], 命題 3) $b(H)$ のすべての既約指標は G へ拡張可能である.

を P の指標と見るとき, $N_G(P)$ -安定である, 故に G -安定である. 指標の construction ([1]) 1_G は次を満たす:

$$1_G = (e - 1)1_G + \sum_{j=2}^e \epsilon_j \hat{\chi}_j + \epsilon \hat{\chi} \quad (\mu \in \mathcal{M})$$

を満たす χ_j の拡張 $\hat{\chi}_j$ と χ の拡張 $\hat{\chi}$ が存在する ([11], (7)). 以上から

5)

$$\text{Irr}(b) = \{\hat{\chi}_j \lambda, \hat{\chi} \lambda' \mid 1 \leq j \leq e; \mu \in \mathcal{M}; \lambda, \lambda' \in \text{Irr}(R)\}.$$

$$L := N_G(P)/O_{p'}(C_G(P)) = (Q \rtimes E) \quad R$$

とおく. $\mathcal{O}N_G(P)b_0 = \mathcal{O}L$ である. b と $b(L)$ の間に isotypy が存在することを示せばよい. $\text{Irr}(b(L)) = \{\hat{\zeta}_j \lambda, \hat{\zeta} \lambda' \mid 1 \leq j \leq e; \mu \in \mathcal{M}; \lambda, \lambda' \in \text{Irr}(R)\}$, 但し $\hat{\zeta}_j, \hat{\zeta}$ は

$$1_L = (e - 1)1_L + \sum_{j=2}^e \hat{\zeta}_j + \hat{\zeta} \quad (\mu \in \mathcal{M}) \text{ を満たす.}$$

6) ([11], 命題 5) P は可換と仮定する. $\chi_2, \quad, \chi_e$ を適当に並べ替えることにより ($m = 1$ のときは $\chi_2, \quad, \chi_e, \chi$ を適当に並べ替えることにより) bijective isometry

$$\hat{I}: \mathcal{R}_K(L, b(L)) \rightarrow \mathcal{R}_K(G, b) \quad (\hat{I}(\hat{\zeta}_j \lambda) = \epsilon_j \hat{\chi}_j \lambda, \hat{I}(\hat{\zeta} \lambda) = \epsilon \hat{\chi} \lambda)$$

は isotypy である ([6] を用いる).

$$b_v := b(C_G(v)) \quad (v \in P).$$

を R の任意の元とする. 仮定から $C_G(\) = C_H(\)C_R(\)$ で, $C_G(\)$ は Sylow p -部分群 $C_P(\)$ と p -超焦点部分群 Q を持つことが示せる. 従って $\text{Irr}(b(\))$ は

$$\begin{aligned} \text{Irr}(b(\)) &= \{ \hat{\chi}_j \lambda \mid 1 \leq j \leq e, \lambda \in \text{Irr}(C_G(\)/C_H(\)) \} \\ &\cup \{ \hat{\chi} \lambda \mid \mu \in \mathcal{M}, \lambda \in \text{Irr}(C_G(\)/C_H(\)) \}, \end{aligned}$$

但し $\hat{\chi}_j, \hat{\chi} \in \text{Irr}(b(\))$ はそれぞれ $\chi_j, \chi \in \text{Irr}(b(C_H(\)))$ の $C_G(\)$ への拡張で

$$1_{C_G(\)} = (e-1)1_{C_G(\)} + \sum_{j=2}^e \epsilon_j \hat{\chi}_j + \epsilon \hat{\chi}, \quad \epsilon_j, \epsilon = 1$$

を満たす. $G = \langle \text{Op}(G), \ \rangle = \langle H, \ \rangle$ とおく. $\hat{\chi}_j|_{C_{G\sigma}(\)}, \hat{\chi}|_{C_{G\sigma}(\)}$ は既約で

$$1_{C_{G\sigma}(\)} = (e-1)1_{C_{G\sigma}(\)} + \sum_{j=2}^e \epsilon_j \hat{\chi}_j|_{C_{G\sigma}(\)} + \epsilon \hat{\chi}|_{C_{G\sigma}(\)}.$$

G に 6) とその証明を適用して次を得る.

7) ([11], 系 2) $\in R$ とする. $\chi_2, \dots, \chi_e$ を適当に並べ替えることにより ($m=1$ のときは $\chi_2, \dots, \chi_e, \chi$ を適当に並べ替えることにより) 次が成り立つ.

$$\hat{\chi}_j(\rho) = \epsilon_j, \quad \hat{\chi}(\rho) = \epsilon(\rho) \quad (\forall (\neq 1) \in Q; \forall \rho \in C_G(\)_{p'}),$$

$$\hat{\chi}_j(\rho) = \epsilon_j \epsilon_j \hat{\chi}_j(\rho), \quad \hat{\chi}(\rho) = \epsilon \epsilon \hat{\chi}(\rho) \quad (\forall \rho \in C_G(\)_{p'}).$$

8) ([11], 命題 6) 定理の仮定と以上の記号の下, bijective isometry

$$\hat{I} : \mathcal{R}_K(L, b(L)) \rightarrow \mathcal{R}_K(G, b)$$

$$(\hat{I}(\hat{\zeta}_j \lambda) = \epsilon_j \hat{\chi}_j \lambda, \quad \hat{I}(\hat{\zeta} \lambda) = \epsilon \hat{\chi} \lambda)$$

は perfect isometry である.

$\in R$ に対して, perfect isometry $\hat{I}_{(\)} : \mathcal{R}_K(C_L(\), b(C_L(\))) \rightarrow \mathcal{R}_K(C_G(\), b)$ を

$$\hat{I}_{(\)}(\hat{\zeta}_j \lambda) = \epsilon_j \hat{\chi}_j \lambda, \quad \hat{I}_{(\)}(\hat{\zeta} \lambda) = \epsilon \hat{\chi} \lambda$$

とする. 但し χ_j の番号付けは 7) に従う. 一方 $\in P \setminus R$ とする. このとき $C_L(\) = C_P(\)$, $C_G(\) = C_H(\)C_R(\)$. 仮定から $C_G(\)$ は p -冪零である.

$$\hat{I} : \mathcal{R}_K(C_L(\), b(C_L(\))) \rightarrow \mathcal{R}_K(C_G(\), b)$$

を自明な perfect isometry とする.

9) $\hat{I}$ は $\{\hat{I}_{\langle v \rangle}\}_{\langle v \rangle \in P}$ を local system とする isotypy である.

参考文献

- [1] M. Broue and L. Puig, Characters and local structure in G -algebras, *J. Algebra*, **63**(1980), 306-317.
- [2] M. Broue, Isometries parfaites, types de blocs, categories derivees, *Asterisque*, **181-182**(1990), 61-92.
- [3] D. A. Craven, "The theory of fusion systems, " Cambridge studies in Advanced mathematics, **131**, 2011.
- [4] E. C. Dade, Blocks with cyclic defect groups, *Ann. Math.* **84**(1966), 20-48.
- [5] H. Nagao and Y. Tsushima, " Representation theory of finite groups", Academic Press, 1989.
- [6] L. Puig and Y. Usami, Perfect isometries for blocks with abelian defect groups and Klein four inertial quotients, *J. Algebra* **160** (1993), 192-225.
- [7] L. Puig, The hyperfocal subalgebra of a block, *Invent. math.*, **141**(2000), 365-397.
- [8] R. Rouquier, Block theory via stable and Rickard equivalences, *Modular representation theory of finite groups* (Charlottesville, VA, 1998), 101-146, de Gruyter, Berlin, 2001.
- [9] J. Thevenaz, " G -algebras and modular representation theory", Clarendon Press, Oxford, 1995.
- [10] A. Watanabe, On perfect isometries for blocks with abelian defect groups and with cyclic hyperfocal subgroups, *Kumamoto J. Math.*, **18**(2005), 85-92.
- [11] A. Watanabe, On blocks of finite groups with central hyperfocal subgroups, 2011.
- [12] 渡邊アツミ, 有限群のブロックの超焦点部分群と超焦点部分代数, 代数学シンポジウム (岡山, 2011) 報告.