

円管ポアズイユ流における攪乱の構造

阪大 基礎工 松内一雄

§1. はじめに

1883 年の Reynolds の有名な実験に始まる円管 Poiseuille 流の不安定に関する古典的問題は、今なお、多くの努力にもかかわらず、未解決である。

流れの安定性に関する理論的研究の目的は、次の二つにあると考えられる。

(1) 臨界 Reynolds 数の決定。

(2) 層流が乱流へ移りかわる遷移の初期のメカニズムの究明。

(1) は、安定理論が生れる動機となったものであり、多くの流れにつれて、線形安定理論による臨界 Reynolds 数の決定がなされ、また、非線形性の影響も論じられている。(2) は理論的な成果としては、現在のところ、あまり多いものではないが、実験的な立場からは、二つの流れに関して、興

味ある結果が得られている。ところが、これらの成果は、いずれも、無限小攪乱の増幅という、線形の発生機構が存在する場合であり、今の円管 Poiseuille 流のように線形の波がすべて減衰するような場合には、(1) についてはもちろんのこと、(2) についても、あまり有用な結果は得られていない。実験的に知られている事実を理論的に説明できない原因を、i) 助走流の影響、ii) 3次元攪乱による不安定、iii) 攪乱の振幅の有限性、に求めてきた。しかしながら、i), ii) については否定され、iii) の可能性だけが残っている。また、これには多くの実験による根拠も存在する。円管 Poiseuille 流に対して、上記の目的 (1), (2) に関し、不成功の原因を iii) に求める一つの試みを述べたい。

3.2. 線形理論

波数と Reynolds 数の積 αR の大きな値に対する漸近的な軸対称攪乱のふるまいは Gill^{*} によってまとめられている。それによれば、攪乱の存在場所（いいかえれば、攪乱の振幅が最大となる場所）によって、中心モードと壁モードの二つに分けられる。それらの複素位相速度 C は次のように与えら

* A.E. Gill: J. Fluid Mech., 21 (1965) 145.

れ3。

i) 中心モード

$$C = 1 + 4m e^{-\frac{3}{4}\pi i} (\alpha R)^{-\frac{1}{2}} - i\alpha R^{-1}, \quad (m=1, 2, 3, \dots) \quad (1)$$

ii) 壁モード

$$C = 2^{\frac{3}{2}} z_2 e^{-\frac{\pi}{2}i} (\alpha R)^{-\frac{1}{2}}, \quad (2)$$

$$T = T_1 \cdot \int_{-z_2}^{\infty} A_i(z) dz = 0.$$

両式から、粘性の影響は両モードとも散逸と分散の両者が共存した形で表われ、さらに、中心モードは散逸だけの効果としても表われていることがわかる。以後、簡単に、前者を散逸-分散効果、後者を分散効果と呼ぶことにする、(1), (2) は一つの Fourier 成分の波の位相速度を表わしている。任意の波はこの Fourier 成分の重ね合わせで表わされる。このような一般的な波形の波がどのような方程式で記述されるかを考える。そのために、

$$A(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{A}(\alpha) e^{i\alpha(x-ct)} d\alpha$$

なる重ね合わせを行う。ここで、 x は中心軸に沿って測った座標である。 α の負の値に対しても成り立つように (1), (2) を拡張し、この C を上式に代入して計算すると、

i) 中心モード

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} = \frac{4m}{\sqrt{\pi}R} \int_x^\infty \frac{\partial A}{\partial x'} \frac{dx'}{\sqrt{x-x'}} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \quad (3)$$

ii) 壁モード

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \frac{-2|\xi_8|}{(-\frac{2}{3})!(2R)^{\frac{1}{2}}} \int_{-\infty}^x \frac{\partial A}{\partial x'} \frac{dx'}{(x-x')^{\frac{3}{2}}} \quad (4)$$

を得る。ただし、(4)式の導出に際して、 $\arg \xi_8 \ll \pi/6$ を仮定した。これらの式から、散逸-分散効果によって、中心モードは「下流側」の振幅の変化、壁モードは「上流側」の振幅の変化に関係した非局所的な振舞いを示すことがわかる。上式を解くことにより、任意の波形からの線形攪乱の時間発展が計算できる。

§3. 非線形理論

ここでの問題は、振幅が有限になったときに、(3), (4)がいかにより修正されるかを示すことである。このことを中心モードについてだけ説明することにする。壁モードは同様にして得られる。非線形攪乱を支配する方程式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial t} + \beta \left(\frac{|\alpha|}{R} \right)^{\frac{1}{2}} (\gamma \tilde{\xi} - 8 \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial y} - 4 \frac{\partial^2 \tilde{\xi}}{\partial y^2}) + \frac{\alpha^2}{R} \tilde{\xi} \\ = 2\beta \left(|\alpha| R \right)^{\frac{1}{2}} \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \xi'}{\partial y} - \frac{\partial \psi'}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

と書ける。ただし、 ψ , ξ' はそれぞれ攪乱の流れ関数、攪乱

の渦度を径方向の座標 r で割ったものである。その他の量および関係は以下で与えられている。

$$\begin{cases} \mathcal{F}\{f(\alpha)\} = \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha, \\ \zeta' = 4i\alpha R \frac{\partial^2 \psi'}{\partial y^2} - \beta (|\alpha|R)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{y} \frac{\partial^2 \psi'}{\partial x^2}, \\ y = \beta (|\alpha|R)^{\frac{1}{2}} r^2, \quad \beta = \exp(-\pi i \operatorname{sgn} \alpha / 4), \\ \tilde{\zeta} = \mathcal{F}\{\zeta'(x)\}. \end{cases} \quad (6)$$

(5) 式の左辺の第二項が散逸-分散項であり、第三項が散逸項、右辺は非線形項である。 ψ' のオーダーを ϵ とすると、散逸-分散項のオーダーは $\epsilon R^{\frac{1}{2}}$ 、非線形項は $\epsilon^2 R^{\frac{1}{2}}$ のオーダーである。したがって、 ψ' は次のように展開できると考えられる、

$$\psi' = \epsilon \psi_1 + \epsilon^2 R^{\frac{1}{2}} \psi_2 + \dots + C.C. \quad (7)$$

また、

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \phi_1(y) A(x, t), \\ \psi_2 &= \phi_2(y) \bar{\delta}(\alpha) \{A(x, t)\}^2 / 2, \end{aligned} \quad (8)$$

とおき、さらに、 $A(x, t)$ が次の方程式に支配されると仮定する。

$$\frac{\partial A}{\partial t} = R^{-\frac{1}{2}} p(\alpha) \frac{\partial A}{\partial x} + \epsilon R^{\frac{1}{2}} \delta(\alpha) \frac{1}{2} \frac{\partial A^2}{\partial x} \quad (9)$$

ただし、 $p(\alpha) = 2\sqrt{2} (1 + i \operatorname{sgn} \alpha) |\alpha|^{-\frac{1}{2} m}$ ($m=1, 2, 3, \dots$) で $\delta(\alpha)$ は α の未知関数である。(7), (8), (9) を (5) に代入して整理すると

$$O(\epsilon R^{\frac{1}{2}}): \quad \mathcal{L}[\zeta_1] = 0,$$

$$O(\epsilon^2 R^{\frac{3}{2}}): \quad \bar{g}(\alpha) \mathcal{L}[\zeta_2] = -\frac{\beta}{4} |\alpha|^{\frac{1}{2}} \{ g(\alpha) \zeta_1 - 2\beta |\alpha|^{\frac{1}{2}} \times (4 \frac{d\zeta_1}{dy} - \frac{1}{2} 4 \zeta_1 - \frac{d^2 \zeta_1}{dy^2}) \}. \quad (10)$$

そこで、

$$\begin{pmatrix} \phi_1'' \\ \phi_2'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} e^{-\frac{y}{2}}, \quad \psi = \phi_1 + \phi_2^*,$$

$$\mathcal{L} \equiv y \frac{d^2}{dy^2} + (2-y) \frac{d}{dy} + m - 1.$$

operator $\mathcal{L}$ の代りに self-adjoint operator を用いて (10) を書き改め、第2の式の両辺に ζ_1 をかけて積分すると、

$$g(\alpha) = \frac{\ell}{m} (1 - i \operatorname{sgn} \alpha) |\alpha|^{\frac{1}{2}}, \quad \bar{g}(\alpha) = i\alpha, \quad (11)$$

$$\ell(m) = \sqrt{2} \int_0^\infty \zeta_1 \left(\frac{d^2 \psi}{dy^2} \zeta_1 + \frac{1}{2} 4 \zeta_1 - 4 \frac{d\zeta_1}{dy} \right) y e^{-y} dy,$$

となり、 $g(\alpha)$, $\bar{g}(\alpha)$ が決定される。(11) の関係を使い、演算 $\mathcal{A}$ を施すと、 $A(x, t)$ の Fourier 変換 $\hat{A}(\alpha, t)$ を支配する方程式が得られる。さらに、 $A(x, t)$ に戻せば

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \int_{x'}^{\infty} \left(\frac{4m}{\sqrt{\pi R}} \frac{\partial A}{\partial x'} + \epsilon \frac{\ell}{m \sqrt{2\pi}} \frac{\partial^2 A^2}{\partial x'^2} \right) \frac{dx'}{\sqrt{x'-x}} + \frac{1}{R} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} \quad (12)$$

なる方程式が得られる。この方程式は (3) を拡張した、弱い非線形擾乱の時間発展を記述する方程式になっている。ただし、ここでの x は単位で進む座標より測ったものであり、最後の散逸項は、簡略化の為に、導出の過程は省略した。

同様な方法は、壁モードへも適用できる。その結果、非線形項の係数をきめる定積分は恒等的に零になり、この場合には、非線形的作用は現われてこないことがわかる。

§4. まとめ

§3 において、有限振幅をもつ攪乱の時間発展を記述する方程式を導いた。この方程式の初期値問題は遷移の初期の様子を知るうえで重要である。ところが、(12)の任意の初期波形から出発する解を解析的に求めることは、ほとんど絶望的である。そこで、簡単に非線形の役割を知るために、周期的な波で、かつ定常なものが存在するかを考えてみる。もし、このような解が存在すれば、非線形相互作用による不安定のメカニズムが存在することになる。(12)の解のうちで $\xi = x - st$ だけによっているような解をさがすことにする。この解の中で周期的な波を考え、物理的な根拠はあまりないのであるが、この周期解の第二高調波までをとる近似を行うと、波長を 2ℓ とする波は

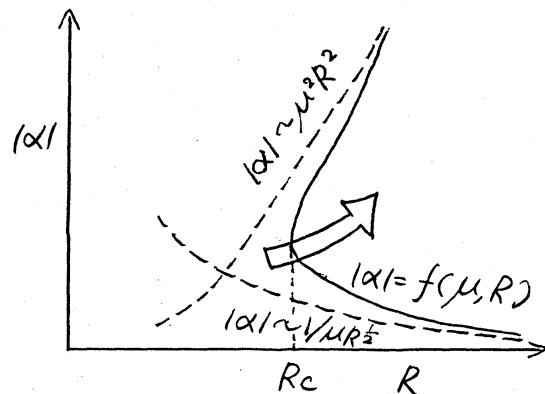
$$S(3\sqrt{2} \frac{V}{\ell^2} + \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\ell}}) + 1 + \frac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \frac{V}{\ell\sqrt{\ell}} = -\lambda^2 \frac{4\pi^2}{\ell^2} A_1^2, \quad (13)$$

$$\sqrt{2} \frac{S^2}{\ell} + \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \frac{S}{\sqrt{\ell}} - \frac{1+2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \frac{V}{\ell\sqrt{\ell}} - 2\sqrt{2} \frac{V^2}{\ell^3} = 0,$$

なる関係を満たすときその存在が可能である。ただし、

$$\lambda = \frac{\epsilon l}{4\sqrt{2}m^2} R = \frac{l}{4\sqrt{2}m^2} \mu R^{\frac{1}{2}}, \quad \nu = \frac{1}{4m} \sqrt{\frac{\pi}{R}},$$

とおいた。ここで、 μ は速度攪乱の小ささを示す無次元パラメータであり、 ϵA_1 が基本波の振幅（流れ関数について）である。(13)より C を消去すれば、二つの漸近枝 $|\alpha| (= \pi/l) \sim 1/\mu R^{\frac{1}{2}}$, $|\alpha| \sim \mu^2 R^2$ （数係数を省略）をもつ $|\alpha| = f(\mu, R)$ の関係が得られる。この関係の概略を図に描くと次のように



矢印は $\mu \rightarrow 0$ に対する R_c の変化の方向を表わしている

なり、 μ を与えると R は最小値 R_c をもつ。また μ を小さくするにつれて、この R_c は増大する。以上のことから、非線形が不安定の役割をもつこと、さらにこの効果は、非線

形の効果が小さくなるにつれて、安定領域を増大させ、無限小振幅になった時、不安定領域は消失することがわかる。

以上、非常に荒っぽい議論により、非線形的作用が不安定に影響することを導いた。まだ、数多くの明らかにすべき問題点が残っている。特に、(12)に対する初期値問題は、今後に残された重要な課題である。