

楯田曲線の conductor

名大 理 谷 野 敏 博

1. C を有理数体 $\mathbb{Q}$ 上定義され、しかもその global minimal Weierstrass model として平面三次曲線

$$y^2 + a_1xy + a_3y + x^3 + a_2x^2 + a_4x + a_6 = 0 \quad a_j \in \mathbb{Z}$$

をとる楯田曲線即ち一次元 Abel 多様体とする。Weil に従い、 C の conductor N を

$$N = \prod_{\text{all prime } p} p^{(\text{ord}_p \Delta + 1 - n_p)}$$

で定義する。ここで Δ は C の判別式、 n_p は重複度を考えない Néron fibre の成分の個数とする、 N の p -exponent は C の p による reduction に応じて、

$$\text{ord}_p \Delta + 1 - n_p = \begin{cases} 0 & \text{for non-degenerate reduction} \\ 1 & \text{for multiplicative} \text{ ————— } \\ 2 & \text{for additive} \text{ ————— } \& p \neq 2, 3 \\ \geq 2 & \text{for additive} \text{ ————— } \& p = 2, 3 \end{cases}$$

となり、しかも C はどこかで degenerate reduction をもつ、i.e. $N \neq 1$

であることが Tate, Ogg により知られている [16]。また, C_ℓ を order ℓ の乗の群とすると, Serre による ramification の measure $\delta(\mathbb{Q}_p, C_\ell) = \delta_p$ ($p \neq \ell$, これは ℓ に依らない [16]) と reduction が non-degenerate, multiplicative, additive に応じて $\varepsilon_p = 0, 1, 2$ となる ε_p を用いて

$$\text{ord}_p \Delta + 1 - \pi_p = \delta_p + \varepsilon_p$$

となる。高次元 Abel 多様体の conductor についても, この δ を用いて同様に定義されている ([17] 参照)。

さて, 与えられた conductor N をもつ楕円曲線の決定という問題を考えてみる。これは一般には困難な問題で, 判別式の形から essential に diophantine 方程式 $y^2 = x^3 + k$ の有理数解の考察に帰することもある。Thue の定理から, k からそんな曲線は有限個である。Ogg は $N = 2^\lambda, 3 \cdot 2^\lambda, 9 \cdot 2^\lambda$ のとき, そんな曲線は order 2 の有理点をもつことを示すことにより, 全ての曲線を決定した。その後 Cochrane は $N = 2^m 3^m$ を扱った。つまり Ogg [14] [15] に依れば曲線が order 2 の有理点をもてば (以下 $C_{\mathbb{Q}, 2} \neq \emptyset$ と書く), あとは diophantine 方程式の取扱いだけになる。このことに注意して以下 $N = 2^m p^m$ ($p \neq 3$, odd prime) の曲線を扱う。

2. C の 2 分乗を $\mathbb{Q}$ に付加した体 $K = \mathbb{Q}(C_2)$ の $\mathbb{Q}$ 上の

p の分岐指数を e_p と書くとき, Ogg [15] 2. と同様な考察で, 2 次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{\pm p})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{\pm 2p})$ のすべての類数が 3 で割り切れないような odd prime p に対して, $N = p \cdot 2^\lambda$ で $e_2 = 1$ or 2 ならば $C_{\mathbb{Q}, 2} \neq 0$ を得る. とくに $\lambda = 1$ のときは Tate の議論により必然的に $C_{\mathbb{Q}, 2} \neq 0$ となる. Ogg 及び後に独立して Neumann [12] は $N = 2^\lambda, 3 \cdot 2^\lambda, 9 \cdot 2^\lambda$ のとき無条件に $C_{\mathbb{Q}, 2} \neq 0$ になることを示したわけである. 他の p に対しては次のことが示される, 即ち

命題 $p \equiv 1$ or $7 \pmod{8}$ で $3 \nmid h(\mathbb{Q}(\sqrt{\pm p}))$ と $3 \nmid h(\mathbb{Q}(\sqrt{\pm 2p}))$ とするとき, $N = p \cdot 2^\lambda$ ($\lambda > 0$) ならば $C_{\mathbb{Q}, 2} \neq 0$ である. 例えば $p = 7$ がある. $p \equiv 3, 5 \pmod{8}$ のときは diophantine 方程式 $y^2 = x^3 + k$ の考察が必要になるのだからないが $p = 5$ などではこの命題にあたるものが言えそうである. しかし Ogg を拡張する次の定理が成立する:

定理 1

$p \equiv 3$ or $5 \pmod{8}$ で $3 \nmid h(\mathbb{Q}(\sqrt{\pm p}))$ かつ $3 \nmid h(\mathbb{Q}(\sqrt{\pm 2p}))$ とするとき, $N = 2p$ の楕円曲線は存在しない.

Ogg は [15] で実際 $N \neq 10, 22$ を示した. 他のこのような p として 37, 43, 67, 197, 227 等がある. この証明は上の注意の $C_{\mathbb{Q}, 2} \neq 0$ が essential であり, 次にあげる diophantine 方程式の結果 (のいくつか) を必要とするが, 方法は Ogg と同

様である。併し $p \equiv 1 \text{ or } 7 \pmod{8}$ に対してはこの定理が成り立たないことはよく知られている。例えば $N=14$ の曲線は実際存在する (e.g. [6])。

3. ここでは $N = 2^m p^n$ (p は任意の odd prime) を扱う。
 $\ast_3$
 1 でみたように $n = 1 \text{ or } 2$ である。 (m, n は positive としている)
 次の弱い結果を証明することができる。

定理 2

$p \equiv 3 \text{ or } 5 \pmod{8}$ で $N = 2^m p^n$ ($p \neq 3, m, n > 0$) のとき order 2 の有理点をもつ楕円曲線は Ankeny-Artin-Chowla の予想のもとで全て effective に決定される。とくに $p=2$ or $p=4$ が square のときはこの予想の仮定を取り除けるから $p=3, 5, 11, 13, \dots^{(*)}$ に対しては全て effective に決まる。

⑤ ここに言う Pell 方程式に関するよく知られた予想は $p \equiv 3 \pmod{4}$ の時でも analogous な予想がある ([8] Chap. 8)。ここではもちろんそれも含んでいる。予想が確かめられている p についてはこの結果は有効である。“effective” という意味はもちろん曲線の方程式が具体的に好きなだけ求められるということである。

(*) $p=3$ で $n=1, 2$ が OI の結果である。

order 2 の有理点をもつ曲線は $y^2 + x^3 + a_2x^2 + a_4x = 0$, $a_i \in \mathbb{Z}$
 minimal at all $p \neq 2$, 同時に $l^2 | a_2$, $l^4 | a_4$ とならない
 といった書き方ができ, しかも N を割る素因子と Δ を割る
 素因子は同一ということから $\Delta = 2^4 a_4^2 (a_2^2 - 4a_4) = \pm 2^\mu p^\nu$
 を満たす (a_2, a_4) が全て求められれば, 後は Néron [11] の
 p.124-125 により (C-type の決定にはいさゝかめんどうなもの
 があるが) 定理 2 は証せられる。この pairs (a_2, a_4) の決
 定に以下の結果を用いる。

命題

(i) $x^2 - 1 = 2^\alpha p^\beta$ の整数解は $p \equiv 3 \text{ or } 5 \pmod{8}$ のとき,
 trivial な $\alpha\beta = 0$ も含めて $(|x|, 2^\alpha p^\beta) = (2, 3), (3, 2^3), (5, 2^3)$
 $(7, 2^4 3), (9, 2^4 5), (17, 2^5 3^2)$ に限り, $p \equiv 1 \text{ or } 7 \pmod{8}$ のと
 き non-trivial な解は $\beta = 1$ で $p = 2^{\alpha-2} \pm 1$ ($\alpha \geq 5$) で与えら
 れる。

(ii) $x^2 + 1 = 2^\alpha p^\beta$ の non-zero 整数解は $p \equiv 3 \pmod{4}$
 のとき, trivial な解 $|x| = 1$ に限り, $p \equiv 1 \pmod{4}$ のとき,
 更に $\alpha = 0, \beta = 1$ 又は $\alpha = 1, \beta = 1, 2 \text{ or } 4$ になる。とくに $\beta = 4$
 になるのは $p = 13, |x| = 239$ だけである。

(iii) $2x^2 + 1 = p^\alpha$ ($\alpha > 0$) の整数解は $p \equiv 7 \text{ or } 5 \pmod{8}$ の
 とき存在しない。 $p \equiv 1 \text{ or } 3 \pmod{8}$ のとき, $(|x|, p^\alpha) = (11, 3^5)$
 を除いて $\alpha = 1 \text{ or } 2$ になる。

(iv) $2x^2 - 1 = p^\alpha$ ($\alpha > 0$) の整数解は $p \equiv 3$ or $5 \pmod{8}$ のとき存在しない。

(v) $| \pm p^\alpha - x^2 | = 2^\beta$ の整数解は trivial な $(\pm p^\alpha, x) = (1, 3), (-1, 1)$ を除いて, Ankeny-Artin-Chowla の予想とその analogy が成り立つ p に対して, $p \equiv 3 \pmod{8}$ のとき, $\alpha = \beta = 1$; $(\pm p^\alpha, x) = (3, 2), (3^2, 1), (3^3, 5), (3^4, 7), (-3, 1), (-3^3, 5)$, $p \equiv 5 \pmod{8}$ のとき $\alpha = 1, \beta = 0$; $\alpha = 1, \beta = 2$; $(\pm p^\alpha, x) = (5^2, 3), (5^3, 11)$ で与えられる。

(vi) $p x^2 - y = \pm 2^\alpha$, $y = \pm 2^\beta$ の整数解は $2|x, 4|y$ となるが, $p \equiv 3$ or $5 \pmod{8}$ ならば, $p \neq 3, 5$ では存在しないし, $p = 3$ のとき $(x, y) = (1, 4), (1, 1), (1, 2), (1, -1)$, $p = 5$ のとき $(1, 4), (1, 1)$ に限るからである。

(注) (iv)-(vi) で $p \equiv 1 \sim 7 \pmod{8}$ に対しては容易だが, このとき全整数解がわかれば all p に定理 2 は成り立つ。(v) で予想の部分は $x^2 + 2 = p^\alpha$, $x^2 + 4 = p^\alpha$ の考察から induce されていき, 前者の不定方程式が予想の analogy に対応することはいずれ Katsuna [5] に依る。

命題は congruent な方法と $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}]$ での分解, および [8] 等にある Nagell, Cassels, Ljunggren, Hemer らの miscellaneous な結果を用いて示される。

$p = 5$ としは特に, $N = 5 \cdot 2^\lambda$, $C_{0,2} \neq 0$ となる楕円曲線は

$2 \leq \lambda \leq 7$ で互いに non-isomorphic なもの 56 種計算された。

実際には $N = 5 \cdot 2^\lambda$ の曲線はこれで尽きるものと思われる。

4. conductor と保型関数の理論を結ぶものとして、 $\mathbb{Q}$ 上の楕円曲線はすべて Shimura curve の Jacobi 多様体であるといふ Weil の予想 [19] [3] がある。詳しくかくと C の zeta 関数 (の主要部) を $L(s) = \sum a_n n^{-s}$ とかくと $f(z) = \sum a_n e^{2\pi i n z}$ は $\Gamma_0(N)$ の weight 1 の cusp form になり、 C は $\Gamma_0(N)$ に対応する Jacobi 多様体の単純成分に isogenous になるというのである。ここで N はもちろん C の conductor である。だから特に $g \in 2$ の Jacobian J_N の genus とする場合。

1) $g=0$ となる $N = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 16, 18, 25$ による曲線は存在しない。

2) $g=1$ となる $N = 11, 14, 15, 17, 19, 20, 21, 24, 27, 32, 36, 49$ による曲線は J_N に isogenous になる

が予想される。1) 2) の多くの N について 1), 2) は check されているが一般にはほとんど何も知られていないが $N = 2^\lambda$ については Miyawaki の結果がある [7]。われわれの立場で計算した曲線と Fricke [2] の曲線に実際 isomorphic になることを見ることはこの check の一例である。 $N = 24, 32, 36$ は Ogg も注意しており、3 で得られる $N = 20$ の曲線の 1 つである

$y^2 + x^3 + 2x^2 + 5x = 0$, 1 で注意したように $y^2 = x^3 + t$ から得られる $N=27$ の $y^2 + y + x^3 = 0$, などでは事実そうになっている。

定理 2 における order 2 以外の有理点をもつ場合の考察も ([10] などを用いて) 可能であるし, $N = 2^m p^n q^l (p \neq q)$ に対しても同様の結果が得られるであろう。また素数中 conductor で order 2 以外の order 有限な有理点をもつ曲線は Miyawaki [7]² により 全て決定されているが有限 order の点を持たない時の決定はだいぶ困難であろうと思われる。そして 1 でみたように $p \neq 2, 3$ に対しては N の p -exponent は 2 以下であったが $p=2, 3$ に対してその上限を定めることは興味ある問題でもあるがそれぞれ、その上限は 5 および 8 程度だと予想される。或いは Stufe の N についてよく知られた結果 (志村理論などにより) が conductor としての N で云えればそれは Weil 予想の support に他ならないであろう。

文 献

- [1][†] Baker, A. Effective methods in diophantine problems
Proc. Sympos. Pure Math. 20 (1970) 195-205
- [2] Fricke, R. Die Elliptischen Funktionen und ihre Anwendungen
II, (1922)

- [3] 本田 平. 形式群とゼータ関数, 第14回代数シンポジウム
報告集 (1968)
- [4][†] Hadano, T. Remarks on the conductor of an elliptic curve,
Proc. Japan Acad. 48 (1972) 166-167
- [5] 久綱正和, ある型の実2次体の基本単数について (阪大, 1972)
- [6] Ligozat, G. Fonction L des courbes modulaires, Semin.
Delange-Pisot-Poitou, 1969/70
- [7] 宮脇伊佐夫, ¹楕円曲線のゼータ関数に関する Weil 予想について,
²有限位数有理点をもつ楕円曲線, (共に 阪大, 1972)
- [8] Mordell, L.J. Diophantine Equations. Academic Press (1969)
- [9][†] Nagell, T. Sur l'impossibilité de quelques équations à deux
indéterminées. Norsk Mat For Skrifter, 1 série, 13 (1923)
- [10] ——— Sur les propriétés arithmétiques des cubiques
planes du premier genre, Acta Math. 52 (1929) 93-126
- [11] Néron, A. Modèles minimaux des variétés abéliennes
sur les corps locaux et globaux. IHES 21 (1964)
- [12] Neumann, O. Die Elliptischen Kurven mit den Führern
 $3 \cdot 2^m$ und $9 \cdot 2^m$, Math. Nachr. 48 (1971) 387-389
- [13][†] ———, Elliptische Kurven mit vorgeschriebenem
Reduktionsverhalten. I, Math. Nachr. 49 (1971) 107-123

- [14] Ogg, A.P. Abelian curves of 2-power conductor, Proc. Camb. Phil. Soc. 62 (1966) 143-148
- [15] ——— Abelian curves of small conductor, J. reine und angew. Math. 226 (1967) 205-215
- [16] ——— Elliptic curves and wild ramification, Amer. J. Math. 89 (1967) 1-21
- [17] Serre, J.P. and Tate, J. Good reduction of abelian varieties, Ann. of Math. 88 (1968) 492-517
- [18][†] Vélu, J. Courbes elliptiques sur $\mathbb{Q}$ ayant bonne réduction en dehors de $\{11\}$. C.R. Acad. Sc. Paris 273 (1971) 73-75
- [19] Weil, A. Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen, Math. Ann. 168 (1967) 149-156

④ †印は本文で引用されなかったが、本文に関係があると思われるため便宜上、掲げた文献を意味する。