

初期時刻のない確率方程式の解の情報系について

矢野孝次 (京都大学大学院理学研究科)

Graduate School of Science, Kyoto University.

初期時刻のない確率方程式とは、直前の時刻から次の時刻への推移において独立な確率変数 (以下ノイズと呼ぶ) の混入によって時間発展する確率過程であって、それが負の無限大からきているようなものを指す。確率方程式の解の情報系がノイズ由来成分に加えてどんなノイズ独立成分を含んでいるか、を調べるのが本稿のテーマである。

本稿では、情報系間の演算に関する話題を掘り下げ、トーラスと有限集合の場合の結果を紹介する。その他、関連する問題の概説等は [11],[12],[14] を見られたい。

1 情報系間の演算と独立補完

可測空間 $(\Omega, \mathcal{F}_*)$ において、 $\mathcal{F}_*$ の部分 σ -field のことをここでは**情報系**と呼ぶことにする。情報系 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ に対し、その共通部分 $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ も情報系であるが、その和 $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ は一般に情報系でない。そこで、和 $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ を含む最小の情報系 $\sigma(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$ を $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2$ と書き、この演算 $\vee$ を**結合 (join)** と呼ぶ。三つの場合も同様に $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 \vee \mathcal{F}_3 = \sigma(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2 \cup \mathcal{F}_3)$ と定義すると、これは $(\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2) \vee \mathcal{F}_3$ と $\mathcal{F}_1 \vee (\mathcal{F}_2 \vee \mathcal{F}_3)$ と等しい。四つ以上でも同様の結合則が成立し、結合 $\vee$ だけを見る限り線形空間の和と同様の演算規則に従っているように見える。ところが、結合 $\vee$ と共通部分 $\cap$ の間では分配則が成り立たず、一般に

$$(\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2) \cap \mathcal{G} \supsetneq (\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{G}) \vee (\mathcal{F}_2 \cap \mathcal{G}), \quad (\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2) \vee \mathcal{G} \subsetneq (\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{G}) \cap (\mathcal{F}_2 \vee \mathcal{G}) \quad (1.1)$$

である。

例 1.1. 式 (1.1) における等号不成立の例を挙げる。 $\Omega = \{1, 2, 3\}$, $\mathcal{F}_* = \sigma(\{1\}, \{2\}, \{3\})$, $\tau = \{\emptyset, \Omega\}$ とし, $\mathcal{F}_1 = \sigma(\{1, 2\}, \{3\})$, $\mathcal{F}_2 = \sigma(\{1\}, \{2, 3\})$, $\mathcal{G} = \sigma(\{2\}, \{1, 3\})$ とする。このとき $(\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2) \cap \mathcal{G} = \mathcal{G}$, $(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{G}) \vee (\mathcal{F}_2 \cap \mathcal{G}) = \tau$ であり, $(\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2) \vee \mathcal{G} = \mathcal{G}$, $(\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{G}) \cap (\mathcal{F}_2 \vee \mathcal{G}) = \mathcal{F}_*$ である。

一般に $\tau = \{\emptyset, \Omega\}$ は情報系のうちで最小のものであり、これを**自明な情報系**と呼ぶ。明らかに、任意の情報系 $\mathcal{F}$ に対し、 $\tau \subset \mathcal{F}$, $\tau \cap \mathcal{F} = \tau$, $\tau \vee \mathcal{F} = \mathcal{F}$ が成り立っており、線形空間における $\{0\}$ と似ている。そこで、線形空間における補空間に当たるものとして、二つの情報系が包含関係 $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ を満たすとき、情報系 $\mathcal{G}$ であって、 $\mathcal{F}_2 = \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{G}$ かつ $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{G} = \tau$ を満たすものが考えられるかも知れない。しかしそれよりも、線形空間における直交補空間に当たるものの方が重要であろう。

可測空間 $(\Omega, \mathcal{F}_*)$ 上に確率測度 P が与えられたとき、確率 0 の事象は無視したい。そのための記号を定義しよう。今、 $\mathcal{N} = \mathcal{N}_P = \{A \in \mathcal{F}_* : P(A) = 0\}$ とおく。すると一般に

$$\overline{\mathcal{F}} := \mathcal{F} \vee \sigma(\mathcal{N}) = \{A + N : A \in \mathcal{F}, N \in \mathcal{N}, A \cap N = \emptyset\} \quad (1.2)$$

が成り立つ。情報系間の等式 $\mathcal{F}_1 \stackrel{P}{=} \mathcal{F}_2$ とは、 $\overline{\mathcal{F}}_1 = \overline{\mathcal{F}}_2$ が成り立つことを言う⁽¹⁾。特に、 $\mathcal{F} \stackrel{P}{=} \tau$ なることは、任意の $A \in \mathcal{F}$ について $P(A) = 0$ or 1 なることと同値であり、このとき $\mathcal{F}$ は P の下で自明であると言う。例えば、Kolmogorov の 0-1 法則によれば、独立確率変数列 $\{X_n\}$ に対して $\bigcap_n \sigma(X_j : j \geq n) \stackrel{P}{=} \tau$ である。

二つの事象 $\mathcal{F}$ と $\mathcal{G}$ が (P の下で) 独立であるとは、任意の $A \in \mathcal{F}$ と $B \in \mathcal{G}$ に対して $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ が成り立つことを言い、このとき $\mathcal{F} \perp_P \mathcal{G}$ と書く。一般に条件 $\mathcal{F} \perp_P \mathcal{G}$ は条件 $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \stackrel{P}{=} \tau$ よりも強い。そこで、独立性に基づいて、線形空間における直交補空間に当たるものを定義する。

定義 1.2. $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ のとき、情報系 $\mathcal{G}$ が $\mathcal{F}_2 \stackrel{P}{=} \mathcal{F}_1 \vee \mathcal{G}$ かつ $\mathcal{F}_1 \perp_P \mathcal{G}$ を満たすとき、 $\mathcal{F}_2$ において $\mathcal{G}$ は $\mathcal{F}_1$ の独立補完 (independent complement) であると言う。

例 1.3. 確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}_*, P)$ 上に独立な標準 Gauss 列 $\{X_n\}$ があつて $\mathcal{F}_* = \sigma(\{X_n\})$ を満たすとする。 $L^2(\Omega, \mathcal{F}_*, P)$ において $\{X_n\}$ の線形閉包を H_* とする。このとき、 H_* の任意の閉部分空間 H に対し、 H_* における H の直交補空間を $H^\perp$ と書くと、 $\mathcal{F}_* \stackrel{P}{=} \sigma(H) \vee \sigma(H^\perp)$ かつ $\sigma(H) \perp_P \sigma(H^\perp)$ が成り立つ。すなわち、 $\mathcal{F}_*$ において $\sigma(H^\perp)$ は $\sigma(H)$ の独立補完である。このことは、平均 0 の Gauss 系において直交性と独立性とが同値なることから従う。

Gauss 系においては独立補完と直交補空間とは似ているが、一般にはそう単純でない。独立補完はかなり一般的な仮定の下で存在することが知られている (cf. [5],[6],[7])。しかし、もし存在したとしても一意的とは限らない。例えば ([2, Ex.2.1.1]), X は標準 Gauss, ε は 1 と -1 を等確率でとるとし、 X と ε は独立とすると、 $\sigma(X, \varepsilon)$ において $\sigma(\varepsilon)$ と $\sigma(\varepsilon X)$ はともに $\sigma(X)$ の独立補完である。

ここで再び情報系の演算を振り返る。もし $\mathcal{F}_1 \stackrel{P}{=} \mathcal{F}'_1$ かつ $\mathcal{F}_2 \stackrel{P}{=} \mathcal{F}'_2$ であれば、 $\mathcal{F}_1 \vee \mathcal{F}_2 \stackrel{P}{=} \mathcal{F}'_1 \vee \mathcal{F}'_2$ が成り立つことは結合演算の結合則により明らか。しかしながら、 $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \stackrel{P}{=} \mathcal{F}'_1 \cap \mathcal{F}'_2$ は一般に成り立たないので注意が必要である (cf. [1])。

例 1.4. 例えば、 $\Omega, \mathcal{F}_*, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{G}$ を例 1.1 の通りとし、 $P(\{1\}) = P(\{3\}) = 1/2, P(\{2\}) = 0$ とする。このとき $\sigma(\mathcal{N}) = \mathcal{G}$ であり、 $\mathcal{F}_1 \stackrel{P}{=} \mathcal{F}_2 \stackrel{P}{=} \mathcal{F}_*$ が成り立っているが、 $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \tau$ であるから $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 \stackrel{P}{=} \mathcal{F}_* \cap \mathcal{F}_*$ は成り立たない。

そこで、同値関係 $\stackrel{P}{=}$ と整合する定義を導入するのが自然に思われるかも知れない。しかしながら、情報系 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ に対して記号 $\cap_P$ を $\mathcal{F}_1 \cap_P \mathcal{F}_2 = \overline{\mathcal{F}}_1 \cap \overline{\mathcal{F}}_2$ と定めたとしても、 $\vee$ と $\cap_P$ との間で $\stackrel{P}{=}$ に関する分配則は依然として成り立たず、理解の助けにならないと思われる。

⁽¹⁾ $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2, P$ -a.s. と書く方が普通だが、記述の簡潔化のためこのような記号を採用した。

このように情報系間の演算には注意が要る. 実際, 分配則に関する誤謬は意外に多い (例えば Kolmogorov および Wiener の誤謬について [8, Rem.1.4(1)] を見よ). 特に, 等式

$$\bigcap_n (\mathcal{F}_n \vee \mathcal{G}) \stackrel{P}{=} \left(\bigcap_n \mathcal{F}_n \right) \vee \mathcal{G} \quad (1.3)$$

の成立条件は重要な問題であり (cf. [9],[3],[8],[2, Ch.2]), 本稿のテーマとも関わる.

ところで, 条件付き期待値をとる演算は同値関係 $\stackrel{P}{=}$ と整合的である. すなわち, 可積分確率変数 X に対し $E[X|\mathcal{F}] \stackrel{P}{=} E[X|\overline{\mathcal{F}}]$ が成り立つ. 実際, $\overline{\mathcal{F}}$ の任意の元を $A + N$ ($A \in \mathcal{F}$, $N \in \mathcal{N}$, $A \cap N = \emptyset$) の形に表すとき, $E[E[X|\mathcal{F}]; A + N] = E[E[X|\mathcal{F}]; A] = E[X; A] = E[X; A + N]$ を得る. 逆に, 任意の可積分確率変数 X に対して $E[X|\mathcal{F}] \stackrel{P}{=} E[X|\mathcal{F}']$ が成り立つならば, $\mathcal{F} \stackrel{P}{=} \mathcal{F}'$ が成り立つ. 実際, $A \in \mathcal{F}$ のとき $1_A \stackrel{P}{=} E[1_A|\mathcal{F}] \stackrel{P}{=} E[1_A|\mathcal{F}']$ となるから $A \in \mathcal{F}'$ であり, 従って $\overline{\mathcal{F}} \subset \overline{\mathcal{F}'}$ が言え, 逆向きの包含も同様.

式 (1.3) の特別な場合として, もし $\{\mathcal{F}_n\}$ が減少列ならば, $\bigcap_n \mathcal{F}_n \stackrel{P}{=} \bigcap_n \overline{\mathcal{F}_n}$ が成り立つ. 実際, 任意の可積分確率変数 X に対し, 後退マルチンゲールの収束定理より

$$E\left[X \middle| \bigcap_n \mathcal{F}_n\right] \stackrel{P}{=} \lim_n E[X|\mathcal{F}_n] \stackrel{P}{=} \lim_n E[X|\overline{\mathcal{F}_n}] \stackrel{P}{=} E\left[X \middle| \bigcap_n \overline{\mathcal{F}_n}\right] \quad (1.4)$$

が言えるから, 前段のことより, $\bigcap_n \mathcal{F}_n \stackrel{P}{=} \bigcap_n \overline{\mathcal{F}_n}$ が得られる.

2 初期時刻のない確率方程式

S を空でない集合, M を S から S への写像からなる集合とする. $f \in M$ と $x \in S$ に対し, f の x への作用を fx で表す. M と S のいずれにも Polish 位相が入るとし, さらに M は合成について閉じていてかつ $M \times S \ni (f, x) \mapsto fx \in S$ は可測であるとする. S 値確率変数列 $\{X_k\}$ と M 値確率変数列 $\{N_k\}$ に対する方程式

$$X_k = N_k X_{k-1}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.1)$$

を考えたい. 但し, 添え字 k は $\mathbb{Z}$ を動くことに注意する. 初期時刻 k_0 と初期値 X_{k_0} が与えられれば, それと $\{N_k : k \geq k_0\}$ を用いて $\{X_k : k \geq k_0\}$ が順次決まる. 考えたい問題では初期時刻がないので, そうはいかない. また, 最初に与えたいものはノイズの分布であって $\{N_k\}$ そのものではない. 方程式 (2.1) の解とは何かをはっきりさせるために, 次のような定義を導入する ([13]).

定義 2.1. M 上の確率分布 μ に対し, 方程式 (2.1) の μ -solution とは, ある確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上に定義された確率過程 $\{(X_k), (N_k)\}$ であって, 任意の $k \in \mathbb{Z}$ に対して以下の条件を満たすものを言う:

- (i) $X_k \stackrel{P}{=} N_k X_{k-1}$;
- (ii) $N_k \perp_P \sigma(X_j, N_j : j \leq k-1)$;
- (iii) $\mathcal{L}_P(N_k) = \mu$.

ここで、確率変数 X, Y について $X \stackrel{P}{=} Y$ とは $P(X=Y)=1$ を表し、 $\mathcal{L}_P(X)$ とは X の分布を表す。条件 (i) は P の下で方程式 (2.1) が満たされていることを表す。条件 (ii) はノイズ N_k が時刻 k において過去の情報 (すなわち時刻 $k-1$ 以前の情報) と独立に生じたものであることを表す。条件 (iii) はノイズ N_k の分布が μ に一致することを表す。

μ -solution $\{(X_k), (N_k)\}$ が一つ与えられたとする。条件 (ii) により

$$X_0 \stackrel{P}{=} N_0 N_{-1} \cdots N_{k+1} X_k, \quad -\infty < k < 0 \quad (2.2)$$

であるが、無限の過去から脈々とノイズ $\{N_j : j \leq 0\}$ が累積して現在 X_0 が得られると考えると、 X_0 は「ノイズ由来成分」と「ノイズ独立成分」とを持つはずである。そこで

$$X_0 \stackrel{P}{=} f(Y, N_0, N_{-1}, \dots) \quad (2.3)$$

を満たすような関数 f およびノイズと独立な確率変数 Y を求めよ、という問題が持ち上がる。これを情報系の言葉で言い直そう。 $\{N_k\}$ から定まる情報系を

$$\mathcal{F}_{(l,k]}^N = \sigma(N_j : l < j \leq k), \quad -\infty \leq l < k < \infty \quad (2.4)$$

と表す。一般に包含関係 $\mathcal{F} \subset_P \mathcal{G}$ とは $\mathcal{F} \subset \mathcal{G} \vee \sigma(\mathcal{N})$ を意味するものとする。明らかに、 $\mathcal{F} \stackrel{P}{=} \mathcal{G}$ なることは $\mathcal{F} \subset_P \mathcal{G}$ かつ $\mathcal{G} \subset_P \mathcal{F}$ と同値である。これらの記号を用いると、式 (2.3) を満たす関数 f およびノイズと独立な確率変数 Y の存在は、

$$\sigma(X_0) \subset_P \mathcal{F}_{(-\infty, 0]}^N \vee \mathcal{G}, \quad \mathcal{F}_{(-\infty, 0]}^N \perp_P \mathcal{G} \quad (2.5)$$

を満たす情報系 $\mathcal{G}$ の存在と同値である。さらに、余分な情報を取り除いて精密化し、

$$\sigma(X_0) \stackrel{P}{=} \mathcal{H} \vee \mathcal{G}, \quad \mathcal{H} \subset_P \mathcal{F}_{(-\infty, 0]}^N, \quad \mathcal{F}_{(-\infty, 0]}^N \perp_P \mathcal{G} \quad (2.6)$$

を満たすような情報系 $\mathcal{H}$ とノイズ独立な情報系 $\mathcal{G}$ とを求めることができればさらによい。このとき $\sigma(X_0)$ における $\mathcal{H}$ の独立補完は $\mathcal{G}$ である。

ここでもし、等式 (1.3) の成立を仮定するならば、式 (2.2) より

$$\sigma(X_0) \subset_P \bigcap_{k < 0} \left(\mathcal{F}_{(-\infty, 0]}^N \vee \mathcal{F}_{(-\infty, k]}^X \right) \stackrel{P}{=} \mathcal{F}_{(-\infty, 0]}^N \vee \left(\bigcap_{k < 0} \mathcal{F}_{(-\infty, k]}^X \right) \quad (2.7)$$

が得られる。この式によると、 X_0 はノイズと無限の過去の情報 $\mathcal{I}^X := \bigcap_{k < 0} \mathcal{F}_{(-\infty, k]}^X$ (これは k に依らず、 $\mathcal{F}_{(-\infty, 0]}^N$ と独立) によって求まることになり、直観にも合うように思える。しかしながら、この直観が正しくない場合のあることを次節で見る。

ところで, $\{(X_k), (N_k)\}$ が μ -solution であるとき, $\lambda_k = \mathcal{L}_P(X_k)$ とおくと方程式

$$\lambda_k = \mu * \lambda_{k-1}, \quad k \in \mathbb{Z} \quad (2.8)$$

を満たす. 逆に, S 上の分布列 $\{\lambda_k\}$ が方程式 (2.8) を満たすならば, $\lambda_k = \mathcal{L}_P(X_k)$ を満たすような μ -solution $\{(X_k), (N_k)\}$ が存在する. 方程式 (2.8) を満たす分布列 $\{\lambda_k\}$ の全体を $\mathcal{P}_\mu^{\text{sol}}$ と書くと, これは S 上の確率分布列全体のなす凸集合の閉凸部分集合になっている. μ -solution $\{(X_k), (N_k)\}$ に対し, $\{\mathcal{L}_P(X_k)\}$ が $\mathcal{P}_\mu^{\text{sol}}$ の端点であることは, $T^X \stackrel{P}{=} \tau$ と同値である.

3 トーラスと有限集合の場合

トーラスと有限集合の場合に情報系を詳しく調べる. その際, 何らかの形で一様分布を見出すことが鍵となる.

3.1 トーラスの場合

ここでは典型的な場合に限って概略を述べる. 証明の詳細および一般的な結果については, Yor [13] および Hirayama-Yano [4] を見られたい.

$S = M = \mathbb{T}^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ とする. 但し, $w \in \mathbb{T}^1$ と写像 $z \mapsto wz$ とを同一視する. また, $x \in \mathbb{R}$ に対し $\rho(x) = e^{2\pi i x}$ とおく. M の二つの元を $\rho(a), \rho(b)$ ($a \leq b < a+1$) と表し, $\mu = \frac{1}{2}\delta_{\rho(a)} + \frac{1}{2}\delta_{\rho(b)}$ とする. 従ってこのとき, 各 N_k は $\rho(a)$ または $\rho(b)$ を等確率でとる. a および b をどうとるかによって事情が異なる.

Case 1. $b = a$ のとき. このとき N_k は常に定数 $\rho(a)$ であるから,

$$\mathcal{F}_{(-\infty, 0]}^N \stackrel{P}{=} \tau, \quad \sigma(X_0) \stackrel{P}{=} T^X. \quad (3.1)$$

言い換えると, ノイズは無情報であり, X の現在の情報は無限の過去の情報と等しい.

Case 2. $b = a + n/p$ ($p = 2, 3, \dots; \gcd(n, p) = 1$) のとき. $\mathbb{T}^1$ の部分集合 H_p, K_p を

$$H_p = \{\rho(x) : x = 0, 1/p, \dots, (p-1)/p\}, \quad K_p = \{\rho(x) : 0 \leq x < 1/p\} \quad (3.2)$$

とおく. 写像 $h_p : \mathbb{T}^1 \rightarrow H_p \triangleleft \mathbb{T}^1$ および $s_p : \mathbb{T}^1 \rightarrow K_p \simeq \mathbb{T}^1/H_p$ を $z = (h_p z)(s_p z)$ を満たす群準同型とする. 具体的には, $z = \rho(\theta)$ に対し $s_p z = \rho([p\theta]/p)$ および $h_p z = z(s_p z)^{-1}$ とする. ここで, $\tilde{\mu} = \delta_{\rho(-a)} * \mu$ および

$$\tilde{X}_k = \rho(-ak)X_k, \quad \tilde{N}_k = \rho(-ak)N_k\rho(a(k-1)) = \rho(-a)N_k \quad (3.3)$$

と置く. すると $\{(\tilde{X}_k), (\tilde{N}_k)\}$ は $\tilde{\mu}$ -solution である. また, 仮定により, H_p 上の分布列 (λ_k) が方程式 $\lambda_k = \tilde{\mu} * \lambda_{k-1}$ を満たすならば, λ_k はすべて H_p 上の一様分布でなければならないことに注意しておく. ところで, $\tilde{N}_k$ は H_p 値であるから,

$$h_p \tilde{X}_k = \tilde{N}_k h_p \tilde{X}_{k-1}, \quad s_p \tilde{X}_k = s_p \tilde{X}_{k-1} \quad (3.4)$$

が成り立つ. 従って特に, $\{(h_p \tilde{X}_k), (\tilde{N}_k)\}$ も $\tilde{\mu}$ -solution であり, $V := s_p \tilde{X}_k$ は k に依らないから $\mathcal{T}^X$ -可測. この後の詳細な議論は省略するが, $U := h_p \tilde{X}_0$ とおくと, U は H_p 上の一様分布であって,

$$\sigma(X_0) \stackrel{P}{=} \sigma(U) \vee \sigma(V), \quad \mathcal{T}^X \stackrel{P}{=} \sigma(V) \quad (3.5)$$

が成り立ち, しかも三つの情報系 $\mathcal{F}_{(-\infty, 0]}^N, \sigma(U), \sigma(V)$ は独立である.

Case 3. 上記以外の場合. このとき, X_0 は $\mathbb{T}^1$ 上の一様分布であって, $\mathcal{F}_{(-\infty, 0]}^N$ と独立であり, $\mathcal{T}^X \stackrel{P}{=} \tau$ である. 言い換えると, X の現在の情報はノイズ由来成分を持たずノイズ独立成分のみから成っていて, 無限の過去の情報は無情報である.

3.2 有限集合の場合

ここでは典型的な場合のみ述べる. 一般的な結果は Yano [10] を見られたい.

$S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ とし, M を S から S への写像全体とする. M の二つの元 f, g をとり, $\mu = \frac{1}{2}\delta_f + \frac{1}{2}\delta_g$ とする. $\{(X_k), (N_k)\}$ を μ -solution とする. 従ってこのとき, 各 N_k は f または g を等確率でとる. 写像 f および g をどうとるかによって事情が異なる.

Case 1. 写像 f および g を

$$f(1, 2, 3, 4, 5) = (2, 3, 4, 2, 5), \quad g(1, 2, 3, 4, 5) = (2, 5, 5, 1, 4) \quad (3.6)$$

と定める. このとき, (X_k) は

$$\Pi = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} & 2 & & & \\ & & 1 & & 1 \\ & & & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & & \\ & & & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

を推移確率とする ergodic Markov chain であり, 唯一つの不変確率 $(1, 2, 1, 2, 3)/9$ を持つ. 従って特に, $\mathcal{P}_\mu^{\text{sol}}$ は一点集合であり, $\mathcal{T}^X \stackrel{P}{=} \tau$ である.

ここで, $f \circ g \circ g \circ f \circ g$ は S の全ての点を 2 に写すことに注意する. ランダム時刻 T を

$$T = \sup\{j \leq 0 : N_{j-1} = f, N_{j-2} = g, N_{j-3} = g, N_{j-4} = f, N_{j-5} = g\} \quad (3.8)$$

と定めると, $P(T \in \mathbb{Z}) = 1$. また, $X_{T-1} = N_{T-1}N_{T-2}N_{T-3}N_{T-4}N_{T-5}X_{T-6} = 2$ より

$$X_0 = N_0N_{-1} \cdots N_{T+1}N_T 2 \quad (3.9)$$

が得られ, 包含関係 $\sigma(X_0) \subset_P \mathcal{F}_{(-\infty, 0]}^N$ が得られる. 言い換えると, X の現在の情報はノイズ由来成分のみから成る.

Case 2. 写像 f および g を

$$f(1, 2, 3, 4, 5) = (2, 3, 4, 1, 5), \quad g(1, 2, 3, 4, 5) = (2, 5, 5, 2, 4) \quad (3.10)$$

と定める. (Case 1 とは 4 の行き先が異なる.) このとき, (X_k) は Case 1 と同じく Π を推移確率とする ergodic Markov chain であり, 同じ不変確率を持ち, $T^X \stackrel{P}{=} \tau$ である.

ここで, 集合 $\{1, 3, 5\}$ および $\{2, 4, 5\}$ に制限すると f, g はともに単射であることに注意する (このような集合を **F-clique** と呼ぶ). ランダム時刻 T と M 値確率変数 Φ を

$$T = \sup\{j \leq 0 : N_j = g\}, \quad \Phi = N_0N_{-1} \cdots N_{T+1} \quad (3.11)$$

で定義する. Φ は $\mathcal{F}_{(-\infty, 0]}^N$ -可測であることに注意する. このとき,

$$\sigma(X_0) \subset_P \sigma(\Phi) \vee \sigma(X_T), \quad \mathcal{F}_{(-\infty, 0]}^N \perp_P \sigma(X_T) \quad (3.12)$$

が成り立ち, かつ X_T が一様分布であることを示そう. なお, $X_0 = \Phi X_T$ であるから, 包含関係の方は明らかである.

今, $g(S) = \{2, 4, 5\}$ であり, $g^{-1}(2) = \{1, 4\}$, $g^{-1}(4) = \{5\}$, $g^{-1}(5) = \{2, 3\}$ に注意する. $x = 2, 4, 5$ に対し, $\{T = j\} \in \mathcal{F}_{(j-1, 0]}^N$ に注意すると,

$$P(X_T = x) = \sum_{j \leq 0} P(X_j = x, T = j) = \sum_{j \leq 0} P(X_{j-1} \in g^{-1}(x), T = j) \quad (3.13)$$

$$= \sum_{j \leq 0} P(X_{j-1} \in g^{-1}(x))P(T = j) = \frac{1}{3} \sum_{j \leq 0} P(T = j) = \frac{1}{3} \quad (3.14)$$

を得る. すなわち, X_T は $g(S)$ 上の一様分布である. さてここで,

$$\tilde{S} = \{\{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{5\}\} \quad (3.15)$$

とおく. このとき, 任意の $\tilde{x} \in \tilde{S}$ に対し $P(X_k \in \tilde{x}) = 1/3$ である. また, f^{-1} および g^{-1} はいずれも $\tilde{S}$ の元を $\tilde{S}$ の元に写す. $l < j \leq 0$ および $\phi_l, \phi_{l+1}, \dots, \phi_{j-1} \in \{f, g\}$ に対し, $A = \{N_0 = N_{-1} = \cdots = N_{j+1} = f, N_j = g, N_{j-1} = \phi_{j-1}, \dots, N_l = \phi_l\} \in \mathcal{F}_{(l-1, 0]}^N$ とおく. $x = 2, 4, 5$ に対し $\tilde{x} := g^{-1}(x)$ は $\tilde{S}$ の元であることに注意して, $\tilde{y} := \phi_l^{-1}\phi_{l+1}^{-1} \cdots \phi_{j-1}^{-1}\tilde{x} \in \tilde{S}$ とおくと,

$$P(X_T = x, A) = P(X_j = x, A) = P(X_{l-1} \in \tilde{y}, A) \quad (3.16)$$

$$= P(X_{l-1} \in \tilde{y})P(A) = \frac{1}{3}P(A) = P(X_T = x)P(A) \quad (3.17)$$

を得る. このことより, $\mathcal{F}_{(-\infty, 0]}^N \perp_P \sigma(X_T)$ が得られた.

参考文献

- [1] P. Berti, L. Pratelli, and P. Rigo. Trivial intersection of σ -fields and Gibbs sampling. *Ann. Probab.*, 36(6):2215–2234, 2008.
- [2] L. Chaumont and M. Yor. *Exercises in probability*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2012. A guided tour from measure theory to random processes, via conditioning.
- [3] I. Crimaldi, G. Letta, and L. Pratelli. Sur l'interversion de l'ordre entre deux opérations sur les tribus. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 345(6):341–344, 2007.
- [4] T. Hirayama and K. Yano. Extremal solutions for stochastic equations indexed by negative integers and taking values in compact groups. *Stochastic Process. Appl.*, 120(8):1404–1423, 2010.
- [5] D. Ramachandran. Existence of independent complements in regular conditional probability spaces. *Ann. Probab.*, 7(3):433–443, 1979.
- [6] V. A. Rohlin. On the fundamental ideas of measure theory. *Amer. Math. Soc. Translation*, 1952(71):55, 1952.
- [7] M. Rosenblatt. Stationary processes as shifts of functions of independent random variables. *J. Math. Mech.*, 8:665–681, 1959.
- [8] R. van Handel. On the exchange of intersection and supremum of σ -fields in filtering theory. *Israel J. Math.*, 192(2):763–784, 2012.
- [9] H. von Weizsäcker. Exchanging the order of taking suprema and countable intersections of σ -algebras. *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. B (N.S.)*, 19(1):91–100, 1983.
- [10] K. Yano. Random walk in a finite directed graph subject to a road coloring. *J. Theoret. Probab.*, 26(1):259–283, 2013.
- [11] K. Yano and Y. Takahashi. Time evolution with and without remote past. 力学系理論の最近の発展, 数理解析研究所講究録, 1552:164–171, 2007.
- [12] Y. Yano and M. Yor. Around tsirelson's equation, or: The evolution process may not explain everything. *arXiv:0906.3442*, 2009.
- [13] M. Yor. Tsirel'son's equation in discrete time. *Probab. Theory Related Fields*, 91(2):135–152, 1992.
- [14] 安富健児 矢野孝次. 道路着色問題と整数径数のランダムウォークについて. 力学系研究集会—理論から応用へ、応用から理論へ—, 数理解析研究所講究録, 1742:13–22, 2011.