

渦糸上を伝わるらせん波の実験 Experiment of helical waves on a vortex filament

舟久保悠子(Yuko FUNAKUBO), 渡辺慎介(Shinsuke WATANABE)

Faculty of Engineering, Yokohama National University.

渦糸の運動はその渦糸自身が作る速度場によって決まる。遠くの渦糸の部分からの影響を無視し近傍の部分からの影響のみを考えて、局所誘導方程式が渦糸の運動をあらわす式として導かれる。¹⁾ 渦糸の曲率を c 、捻率を τ として $K=c^2$ を気体の密度、 2τ を速度と考えたとき、この局所誘導方程式から圧縮性気体の 1 次元の連続の式と運動方程式が 1965 年に Betchov によって得られた。つまり、渦糸の運動は圧縮性気体の 1 次元波動と等価である。また、1972 年に Hashimoto によって複素数 $\psi=\exp(i\int \tau ds)$ が非線形 Schrödinger 方程式を満たすことが導かれた。³⁾ この式ソリトン解から渦糸上を安定に伝播する渦糸ソリトンが得られる。渦糸上を安定に伝播する波としては渦糸ソリトンのほかにらせん波、微小振幅平面正弦波がある。これら興味深い渦糸の挙動について実験的な観測を試みる。本実験では底の中心に穴のあいた円筒容器内に水による旋回流によって渦糸を作り、波の励起に固体境界面を用いた。固体境界面としてアクリルの円盤を用い、Biot-Savart の法則に基づいて渦糸に摂動を加えた。これにより安定して伝播するらせん波と分散しながら伝播する波束を励起し、波の分散関係と群速度を測定し、数学的な解析との比較を行った。

1. 序論

1 本の渦糸はその渦糸自身が作る速度場によって誘起される自己誘導速度によって運動する。渦の作る速度場は Biot-Savart の法則で表わされ、これを渦糸に沿って積分することで自己誘導速度は求められる。その際、着目した点からはなれた場所からの影響を無視し、自己誘導速度を求めたのが局所誘導方程式¹⁾

$$u = \frac{\partial x}{\partial t} = Acb \quad (1)$$

$$A = \frac{\Gamma}{4\pi} \ln \frac{L}{\sigma}$$

である。渦糸の位置 x は渦糸に沿って測った長さ s と時刻 t の関数 $x(s,t)$ である。ここで、 c は渦糸の曲率、 b は倍法線方向の単位ベクトル、 Γ は渦糸の循環である。 L と σ はそれぞれ積分の上限と下限で L は渦糸の曲率半径と同程度のオーダー、 σ は渦糸の径と同程度である。 L は渦糸の形によって変化する可能性があるが、対数項の引数であるため A の変化は L に比べて非常に遅い。そのため A は定数とみなすことができる。

波長 λ 、振幅 a の図 1 のようならせん波について、局所誘導方程式にらせんの曲率と倍法

線ベクトルを代入することで波の位相速度 U_p が以下のように求められる。

$$U_p = \frac{A}{\left(a^2 + \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2\right)^{1/2}} = \frac{A}{\left(a^2 + \frac{1}{k^2}\right)^{1/2}}$$

ここで k は波数である。振幅 a が波長 λ に対して十分小さいとき、 U_p は

$$U_p \cong Ak$$

と近似することができ、位相速度は波数と比例関係にある。このとき、角周波数 Ω を用いて $\Omega = kU_p$ の関係から、分散関係は

$$\Omega = Ak^2 \quad (2)$$

となる。

波の群速度は角周波数を波数で微分することで得られるので、このとき群速度 U_g は

$$U_g = \frac{d\Omega}{dk} = 2Ak = 2U_p \quad (3)$$

となり位相速度の2倍となる。

2. 実験装置

図2に実験装置を示す。底の中心に穴のあいたアクリルの円筒容器内に旋回流によって渦糸を作る。旋回流は上部で水をアクリル円筒の内側の側面に沿って流すことで作る。このとき渦糸は空気によって可視化される。渦糸の運動を制御し、波を励起するため、図2に示すようにアクリルの円盤を水槽上部から水平に挿入する。円盤を傾けると渦糸は円盤に対して垂直になろうとし、渦糸に摂動が加えられる。このとき渦糸の運動は Biot-Savart の法則に支配されており、渦糸自身により誘起された速度によって運動する。

図3にこのアクリル円盤の制御方法を示す。円盤は2点で支持し、ほかの1点を図に示すようにモータにつなぐ。モータの回転により円盤の端は上下して、円盤が振動する。モータは外部から入力されたパルスに同期して回転するステッピングモータを使い、円盤の振動数をコントロールすることができる。これにより、様々な振動数の摂動を渦糸に加えることができる。

アクリル円筒容器の高さは1[m]、内径は0.15[m]、そして円筒容器の底から円盤までの距離は0.8[m]である。また、底の中心の穴の大きさは10[mm]である。

流れは微小粒子（ダイアイオン）を用いて可視化し、高速度ビデオカメラで撮影し、流速を測定した。

渦糸の運動はデジタルビデオカメラで撮影し、観測した。

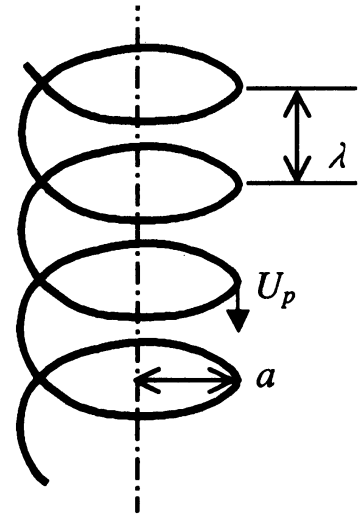


図1 らせん波

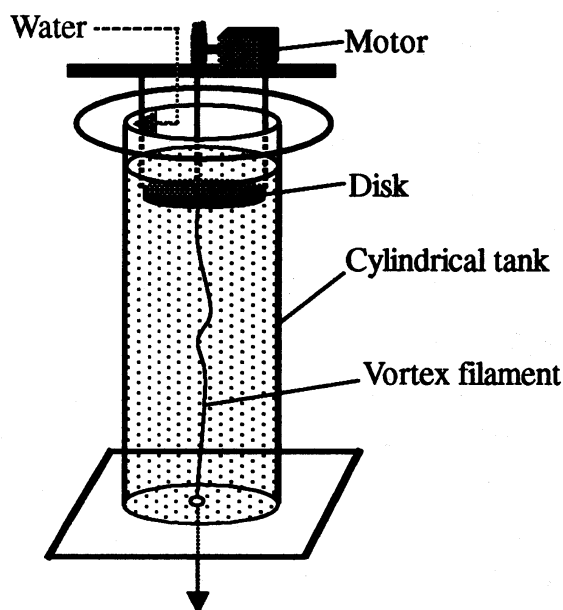


図2 実験装置

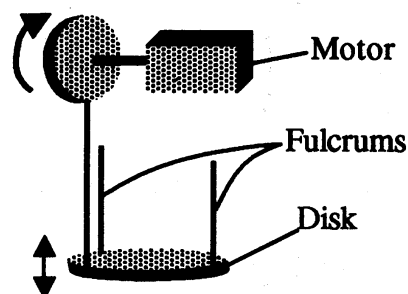


図3 円盤制御部

3. 結果

3.1. 流体の流れと渦糸の循環

図4に流体の回転速度 v [m/sec] を渦糸の中心からの距離 r [mm] の関数としてプロットしたものを示す。流速 v は、中心からの距離に比例する剛体回転の領域と、中心からの距離に反比例して減少するポテンシャル流れの領域に分けられる。 $r=4$ [mm] で回転速度は最高となり、 1.75 [m/sec] である。つまり渦芯の直径は 8 [mm] である。これより渦糸の循環 Γ を計算すると $\Gamma=0.04$ [m²/sec] が得られる。

渦芯中の空気は直径はおよそ 3 [mm] で、渦芯のおよそ $30\sim40\%$ を占める（図中に点線で示す）。空気で可視化された渦糸が存在する状態でうえから円盤を蓋をするように挿入すると渦心中の空気は徐々に抜けていってなくなってしまう。渦の中心部分に縦方向の流れがあり（流速はおよそ 1 [m/sec] 程度）その流れによって下の穴から空気が抜けていく。空気がなくなった状態でも渦糸は存在している。空気が渦糸を可視化している時間は渦度によって変化すると予測されるが本実験では $5\sim10$ 分程度である。波の伝播は空気によって可視化された渦糸を観測した。

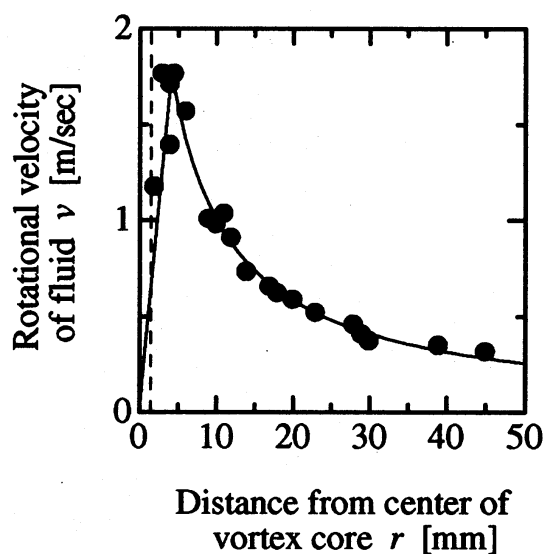


図4 流体の回転速度

3.2. 連続波の伝播

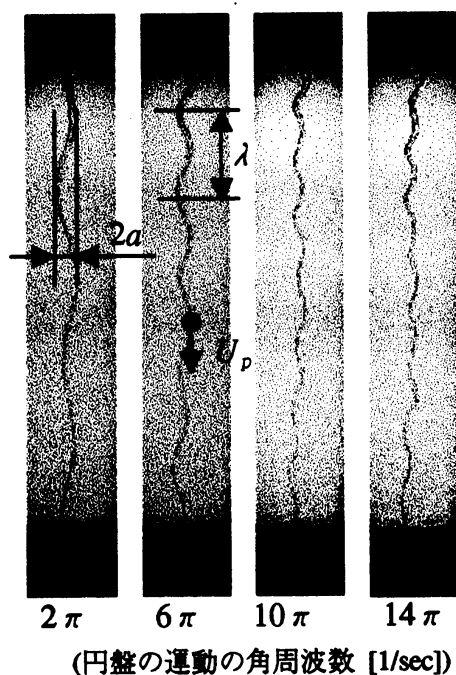


図5 連続波



図6 らせんの巻き方向

円盤を連続的に振動させることで図5に示すような連続波ができる。これはらせん状の3次元的な形をしている。図の渦糸の渦度は上向きで、らせんは上から見て反時計回りの巻き方向である(図6)。このとき、波の伝播方向を局所誘導方程式から考えると実験での観測と同様に下向きである。理論から考えると、このらせん波は回転しながら併進運動を行うが、伝播の様子を観察だけでは回転運動を確認するのは難しい。これは後に述べるようにこの波の位相速度が理論と一致することで示される。

円盤の振動数を変えることで図のように波長の違う波を作ることができる。ここで、波の角周波数 Ω を測定したところ円盤の運動の角周波数とほぼ一致した。このことから円盤の運動に応じた摂動が渦糸に加えられていることがわかる。

この実験では波の頂点の伝播する速度を位相速度 U_p とし、波の頂点間の距離を波長 λ として測定し、渦糸上を伝播する波の分散関係を得た。また、図5のように $2a$ とおき、 a を振幅として測定した。 U_p 、 λ 、 a とともに伝播過程で渦糸の上から下までほとんど変化せず、らせん波が形を崩さず安定して伝播する様子が観測された。

位相速度 U_p を波数 $k (=2\pi/\lambda)$ に対してプロットしたものを図7に示す。 U_p が k に比例していることがわかる。このことから分散式は理論で示したように $\Omega = A'k^2$ で得られる(図8に分散関係をプロット)。このとき、定数 A'

は図7の傾きで $A' = 7 \times 10^3 [\text{m}^2/\text{sec}]$ である。

ここで1節の理論においては波長が振幅に対して十分大きいと仮定したが、実験で観測された波においては振幅が波長のおよそ3~6%の大きさであるのでこの理論を適用できる条件を満たしていると考えられる。このとき定数 A は(1)式の下式で与えられる。ここで、 σ は渦芯の半径と同程度なので $\sigma \approx 10^{-3}$ とし、 L は渦糸の曲率半径のオーダーで $L \approx 10^2$ とする。渦糸の循環は3.3節で示したように $\Gamma = 0.04 [\text{m}^2/\text{sec}]$ である。このとき $A \approx 7.3 \times 10^3 [\text{m}^2/\text{sec}]$ であり、実験値 A' とはほぼ等しい。 σ と L の具体的な値を代入したときを考える。渦芯の半径は図4から $0.004 [\text{m}]$ で一定だが、渦糸の曲率半径は波の振幅と波長からおよそ $0.2 \sim 0.03 [\text{m}]$ と計算される。これらを(1)式に代入すると A はおよそ $6 \sim 12 \times 10^3 [\text{m}^2/\text{sec}]$ となる。 A' に比べて大きめだがおおよそ同じくらいの値が得られる。

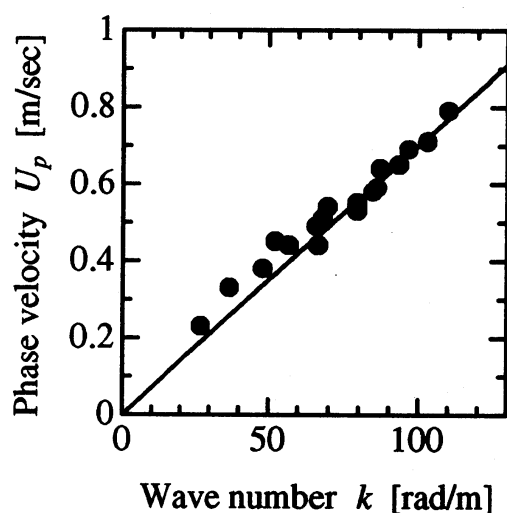


図7 位相速度と波数の関係

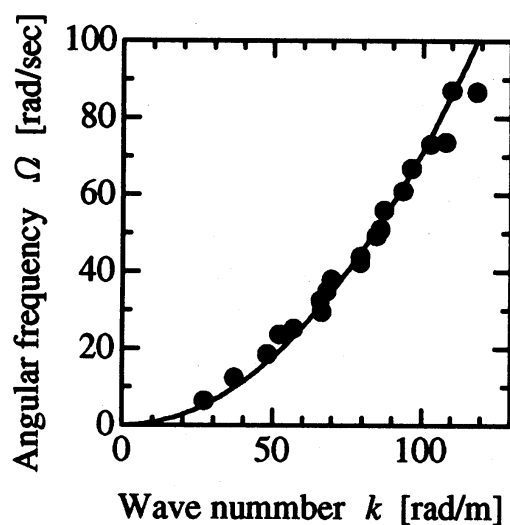


図8 分散関係

3.3. 波束の伝播

次に円盤を1回だけ傾けて元に戻し、渦糸に瞬間的に摂動を加えたときに励起された波の伝播の様子を図9に示す。円盤は手前側が上がって摂動を加えている。連続波のときと同様に渦度は上向きであり、波は3次元のらせん的な形状をしている。らせんは上から見て反時計回りの巻き方向である(図6)。波が上から見て反時計回りに回転しながら下向きに伝播していく様子が観測された。

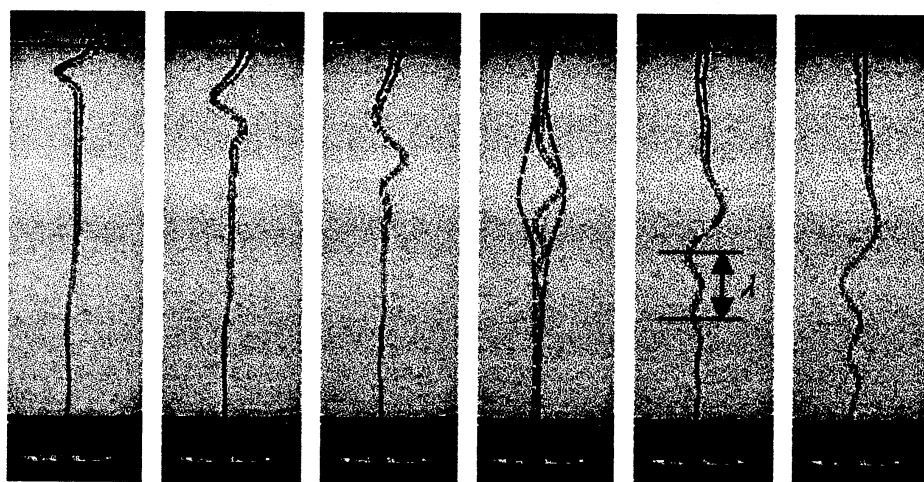


図9 波束の伝播

図9は横幅を2倍に拡大したもので2/15[sec]の時間刻みで波の伝播の様子を示している。波長の短い波(波数 k の大きい波)が先に進んで波が分散しながら伝播していく様子がわかる。(これは図7で示した、位相速度が波数に比例するという関係とあっている。)

この実験では図9に点線で示したような波の包絡線を考え、その伝播速度を群速度 U_g として測定した。ここで観測した波は伝播しながら形が変化してしまうため正確な波長を決める

ことができない。実験では伝播の後の過程のほうで、波の形の変化があまりなくなったところでの最も長い波長をその波束の波長とした。

図 10 で波数に対して速度をプロットし、位相速度と群速度を比較した。3.2 節の実験から分散関係が $\Omega = Ak^2$ であることが実験的に確認できたが、このとき、群速度は (3) 式で与えられるように位相速度の 2 倍となる。図中の点線は傾き $2A'$ を表わしており、群速度のプロットがこの直線上に大体的にのっていることがわかる。

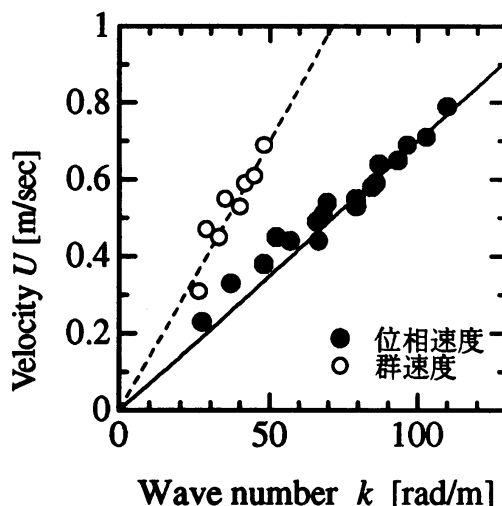


図 10 位相速度と群速度

4. まとめ

- ・ 円盤の制御により、渦糸上に連続波と波束を励起することができた。連続波(らせん波)は形を崩さずに安定して渦糸上を伝播し、波束は分散しながら伝播する。連続波の伝播の実験から波の分散関係が理論と同様の $\Omega = Ak^2$ であることが実験的に確かめられた。また、波束の包絡線の伝播速度を群速度として測定し、群速度が位相速度の 2 倍となることを確かめた。
- ・ 現段階では摂動を瞬間的に加えたとき、分散しながら伝播する波が励起される。渦糸上を安定に伝播する渦糸ソリトンを励起するためには渦糸ソリトンの形を与える関数に従って円盤の変位を与えて実験をする必要がある。

REFERENCE

- 1) Batchelor, G. K. 1967 *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge University Press.
- 2) Betchov, R. 1965 On the curvature and torsion of isolated vortex filament. *J. Fluid Mech.* 22, 471.
- 3) Hashimoto, H. 1972 A soliton on a vortex filament. *J. Fluid Mech.* 51, 477.