

相対的な代数的対応と混合モティーフ層 (Relative algebraic correspondences and mixed motivic sheaves)

By

Masaki HANAMURA*

Abstract

We introduce the notion of a *quasi DG category*, which is a generalization of a DG category; it is closely related to the notion of a Segal category.

We give the notion of *C-diagrams* in a quasi DG category; we show the *C*-diagrams in a given DG category form another quasi DG category. Moreover the associated homotopy category of the latter is a triangulated category.

We also introduce the quasi DG category of *symbols*, which are varieties “with Tate twists” over a base variety.

§1. Quasi DG 圏と Segal 圏.

DG 圏とは、加法圏 $\mathcal{C}$ であって、ふたつの対象 X, Y に対して写像の加法群 $F(X, Y)$ が複体の構造をもち、写像の合成 $F(X, Y) \otimes F(Y, Z) \rightarrow F(X, Z)$, $u \otimes v \mapsto u \cdot v$, がアーベル群の複体の写像であるようなものである。(なお、この論文においては写像 u, v の合成を通常記法 $v \circ u$ の代わりに $u \cdot v$ により表す。) アーベル群の複体の圏が DG 圏の例である。つまり、アーベル群の複体 X, Y に対して複体 $\mathrm{Hom}(X, Y)^\bullet$ が定まり、上の条件をみたす。

我々は DG 圏の概念を拡張して、**quasi DG 圏**の概念を導入する。そのため、まず $\mathcal{C}$ を DG 圏とすると、対象の列 $X_1, \dots, X_n$, $n \geq 2$, に対して複体

$$F(X_1, \dots, X_n) := F(X_1, X_2) \otimes \cdots \otimes F(X_{n-1}, X_n)$$

を考えられることに注意する。各 i , ただし $1 < i < n$, に対し写像

$$\tau_i : F(X_1, \dots, X_n) \rightarrow F(X_1, \dots, X_i) \otimes F(X_i, \dots, X_n)$$

Received April 6, 2012. Revised November 19, 2012.

2000 Mathematics Subject Classification(s): Primary 11G25; Secondary 14G20, 14J28.

Key Words: motive, algebraic correspondence,

*東北大学・理学研究科

e-mail: hanamura@math.tohoku.ac.jp

および

$$\varphi_i : F(X_1, \dots, X_n) \rightarrow F(X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_n)$$

が定まる. ここで τ_i は恒等写像, φ_i は X_i における合成である: $\varphi_i(u_1 \otimes \dots \otimes u_{n-1}) = u_1 \otimes \dots \otimes (u_{i-1} \cdot u_i) \otimes \dots \otimes u_{n-1}$. 合成の結合性より φ_i は互いに可換である.

Quasi DG 圏は DG 圏と異なり通常の意味での圏ではない. 対象のクラスが与えられ, ふたつの対象 X, Y に対して複体 $F(X, Y)$ が与えられているが, 写像の合成は定義されていない. その代り, 三つの対象 X, Y, Z に対して複体 $F(X, Y, Z)$ が与えられ, 複体の写像 $\tau : F(X, Y, Z) \rightarrow F(X, Y) \otimes F(Y, Z)$ と $\varphi : F(X, Y, Z) \rightarrow F(X, Z)$ が与えられており, τ は quasi-isomorphism である. τ と φ はある意味で写像の合成にあたるものを与える (実際, 少なくとも導来圏においては τ の逆と φ を合成して写像 $F(X, Y) \otimes F(Y, Z) \rightarrow F(X, Z)$ が得られる.) さらに, 四つの対象 $X_i, i = 1, \dots, 4$, に対して複体 $F(X_1, X_2, X_3, X_4)$ が与えられており, また quasi-isomorphism $\tau_i : F(X_1, X_2, X_3, X_4) \rightarrow F(X_1, \dots, X_i) \otimes F(X_i, \dots, X_4)$, $1 < i < 4$ および複体の写像 $\varphi_i : F(X_1, X_2, X_3, X_4) \rightarrow F(X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_4)$, $1 < i < 4$ が与えられている. これらの写像 τ と φ はお互いに可換であることを要求する. これは写像の合成の結合性にあたるものを与える. さらに n 個 ($n \geq 2$) の対象の列に対しても複体 $F(X_1, \dots, X_n)$ と, $1 < i < n$ に対し複体の写像

$$\tau_i = \tau_{X_i} : F(X_1, \dots, X_n) \rightarrow F(X_1, \dots, X_i) \otimes F(X_i, \dots, X_n)$$

および

$$\varphi_i = \varphi_{X_i} : F(X_1, \dots, X_n) \rightarrow F(X_1, \dots, \widehat{X_i}, \dots, X_n)$$

が与えられ, 次を要求する: τ_i は quasi-isomorphism である. τ_i 同士は互いに可換であり, また φ_i 同士は互いに可換であり, さらに, τ_i と φ_j は互いに可換である.

こうして quasi DG 圏の定義がほぼ得られるが, 正確な定義のためにはさらに以下の考察が必要である.

(a) 加法性の定義. 対象の「直和」および「零対象」が与えられているとする. さらに複体 $F(X_1, \dots, X_n)$ は適切な意味で各変数について加法的であるとする.

(b) 「合成積が定義されている」部分複体の存在. 上の説明においては, 写像 $\tau : F(X, Y, Z) \rightarrow F(X, Y) \otimes F(Y, Z)$ が quasi-isomorphism であるとした. さらに τ の像が $F(X, Y) \otimes F(Y, Z)$ の quasi-isomorphic な部分複体であることを要求する. この部分複体を $F(X, Y, Z|Y)$ または (対象を X_1, X_2, X_3 と書きあらためて) $F(X_1, X_2, X_3|\{2\})$ と書く. 写像 τ は

$$F(X, Y, Z) \xrightarrow{\sigma} F(X, Y, Z|Y) \xrightarrow{\iota} F(X, Y) \otimes F(Y, Z)$$

と全射と単射の合成に分解する.

同様に, $1 < i_1 < i_2 < \dots < i_{a-1} < n$ のときテンソル積複体

$$F(X_1, \dots, X_{i_1}) \otimes F(X_{i_1}, \dots, X_{i_2}) \otimes \dots \otimes F(X_{i_{a-1}}, \dots, X_n)$$

の quasi-isomorphic な部分複体 $F(X_1, \dots, X_n | \{i_1, \dots, i_{a-1}\})$ が存在して τ と φ について適切な条件をみたすとする.

(c) 単位元の存在. 対象 X に対し, 複体 $F(X, X)$ の 0 次のコホモロジーの代表元 $\Delta_X \in F(X, X)^0$ が与えられているとする. それが適切な意味で合成についての単位元を与えるとする.

(d) 「特別な」部分複体の存在. 例をひとつとって説明する. 対象 X, Y, Z と元 $f \in F(Y, Z)$ が与えられているとき, $F(X, Y)$ の quasi-isomorphic な部分複体 $[F(X, Y)]_f$ で次の条件をみたすものが存在する: 写像

$$[F(X, Y)]_f \rightarrow F(X, Y) \otimes F(Y, Z), \quad u \mapsto u \otimes f$$

の像は部分複体 $F(X, Y, Z | Y)$ に含まれる. この部分複体を $F(X, Y)$ の f を制約とする特別な部分複体という.

同様に, 複体 $F(X_1, \dots, X_n)$ と, 制約 $f \in F(X_n, \dots, X_m)$ について特別な部分複体 $[F(X_1, \dots, X_n)]_f$ が存在するとする.

(e) DG 圏との関係. $\mathcal{C}$ が DG 圏であるとき, 複体 $F(X_1, \dots, X_n)$, 写像 τ_i, φ_i は本節のはじめに述べたように定める. Quasi DG 圏の定義は, DG 圏からこのように定まる場合に対しても条件がみたされているように定められる. たとえば定義 (1.1) の条件 (1) における加法性の定義, (4) の完全性の条件, (6) における対角元と対角延長のみたす条件は DG 圏の場合を考えると理解しやすい.

これらを考慮すると後述の定義 (1.1) に到る.

ここで比較のため, **Segal 圏**とよばれるものを説明しよう. これは Dwyer, Kan と Smith により考えられ, さらに Hirschowitz と Simpson により発展させられた. 詳しくは [JT] を参照.

Δ により有限全順序集合と単調写像のなす圏を表す. その対象は $[n] = \{0, \dots, n\}$, $n \geq 0$, である. $X : \Delta^{opp} \rightarrow \mathcal{T}op$ を Δ から (コンパクト生成の) 位相空間のなす圏への反変関手とする, つまり X は位相空間の圏における simplicial object である. 位相空間 $X_n, n \geq 0$, が与えられ, Δ における写像 $u : [n] \rightarrow [m]$ に位相空間の写像 $u^* : X_m \rightarrow X_n$ が対応する. X が Segal 圏であるとは次の条件がみたされることである.

(1) X_0 は離散的な位相空間である.

(2) 各 $n \geq 1$ と $i = 0, \dots, n$ について写像 $f_i : [0] \rightarrow [n]$ を $f_i(0) = i$ で定める. 対応する写像 $f_i^* : X_n \rightarrow X_0$ の積を $f : X_n \rightarrow X_0^{[n]}$ とする. X_0 の元の列 $a_0, \dots, a_n$ に対し, f によるその逆像を $X(a_0, \dots, a_n)$ で表す.

写像 $g_i : [1] \rightarrow [n], i = 0, \dots, n-1$, を像が $\{i, i+1\}$ であるようなものとする. 対応する写像の積として定まる写像

$$X(a_0, \dots, a_n) \rightarrow X(a_0, a_1) \times \dots \times X(a_{n-1}, a_n)$$

があるが, これが弱ホモトピー同値 (全てのホモトピー群が同型) である.

X は圏ではないが, X_0 は対象の集合, X_1 は写像の集合と考えることができる. X_2 は写像の合成をある意味で与える構造である.

Segal 圏は quasi DG 圏と並行的な概念であることが分かるだろう. quasi DG 圏における対象は Segal 圏における X_0 の点に対応し, 複体 $F(X, Y)$ は空間 $X(a_0, a_1)$ に対応する. さらに複体 $F(X_0, \dots, X_n)$ は空間 $X(a_0, \dots, a_n)$ に対応し, 写像 τ, φ はそれぞれ simplicial 構造から定まる $X(a_0, \dots, a_n)$ の間の写像に対応する. quasi DG 圏では複体のテンソル積についての monoidal 構造と quasi-isomorphism を用いているのに対し, Segal 圏では空間の直積についての monoidal 構造と弱ホモトピー同値を用いていることに注意する.

Segal 圏の概念は quasi-category の概念 (これは Boardman と Vogt により考えられ, Joyal 等により発展させられた) と同等であることが知られている. これらの概念を用いた「導来代数幾何」は近年, その進展が著しい.

著者は quasi DG 圏の概念を導入したが, それが Segal 圏と並行的な概念であることは P. May 氏に教えて頂いた. さて quasi DG 圏の定義を述べる.

(1.1) 定義. Quasi DG 圏 $\mathcal{C}$ とは以下のデータ (i)-(iii) からなり, 条件 (1)-(5) をみたすものである. さらに付加的な条件として, データ (iv)-(v) および条件 (6)-(11) を求めることもある.

(i) 対象のなすクラス $Ob(\mathcal{C})$. さらに, 零対象とよばれる対象 0 が与えられている. また, ふたつの対象に対して, その直和 $X \oplus Y$ とよばれる対象が与えられており, 結合律 $(X \oplus Y) \oplus Z = X \oplus (Y \oplus Z)$ が成り立つ.

(ii) n 個 ($n \geq 2$) の対象の列, $X_1, \dots, X_n$ に対し, 自由アーベル群の複体 $F(X_1, \dots, X_n)$ が対応する.

記号 $[1, n]$ により全順序集合 $\{1, \dots, n\}$ を表すと, X_i はそれにより添字づけられた対象の列である. さらに一般に, 位数が 2 以上の有限全順序集合 I と I で添字づけられた対象の列 (X_i) に対して, 複体 $F(I) = F(I; X)$ が対応する.

部分集合 $S \subset (1, n) := \{2, \dots, n-1\}$ に対し, $S = \{i_1, \dots, i_{a-1}\}$, ただし $i_1 < i_2 < \dots < i_{a-1}$, とするとき, $[1, n]$ の部分区間の列 $I_1, \dots, I_a$ を $I_k = [i_{k-1}, i_k]$, ただし $i_0 = 1, i_a = n$, によって定める. (これを $[1, n]$ の S による分割とよぶ.) このとき, $F(I_k) = F(X_{i_{k-1}}, \dots, X_{i_k})$ と略記し, a -重の複体

$$F(X_1, \dots, X_n \upharpoonright S) := F(I_1) \otimes \dots \otimes F(I_a)$$

を対応させることができる.

さらに一般に, 有限全順序集合 $I = \{i_1, \dots, i_n\}$ に対しても順序同型 $I \xrightarrow{\sim} [1, n]$ を通じて, 以上が自然に拡張される. $\text{in}(I) = i_1$ を I の最小元, $\text{tm}(I) = i_n$ を最大元, $\overset{\circ}{I} = I - \{\text{in}(I), \text{tm}(I)\}$ とおく. I の部分区間とは, I の部分集合であって順序同型を通して $[1, n]$ の部分区間になっているものとする. 部分集合 $S \subset \overset{\circ}{I}$ に対し, S による I の部分区間への分割が定まり, 多重の複体 $F(I \upharpoonright S) = F(I \upharpoonright S; X)$ が対応する.

(iii) 部分複体 $F(X_1, \dots, X_n|S)$ と写像 ι, σ, φ .

(1) 各 S に対して, quasi-isomorphic な多重の部分複体

$$\iota_S : F(X_1, \dots, X_n|S) \hookrightarrow F(X_1, \dots, X_n \amalg S) .$$

が与えられている. $S = \emptyset$ のとき, これは $F(X_1, \dots, X_n)$ と一致するとする.

複体 $F(X_1, \dots, X_n|S)$ は次の意味で各変数について加法的である. ひとつの対象 X_i が 0 ならば, この複体もゼロである. もし $X_1 = Y_1 \oplus Z_1$ であれば, 複体の同型

$$F(Y_1 \oplus Z_1, X_2, \dots, X_n|S) = F(Y_1, \dots, X_n|S) \oplus F(Z_1, \dots, X_n|S) .$$

が与えられている. X_n についても同様である. $1 < i < n$ のとき, $X_i = Y_i \oplus Z_i$ ならば複体の同型

$$\begin{aligned} F(X_1, \dots, X_{i-1}, Y_i \oplus Z_i, X_{i+1}, \dots, X_n|S) &= F(X_1, \dots, Y_i, \dots, X_n|S) \\ &\quad \oplus F(X_1, \dots, Z_i, \dots, X_n|S) \\ &\quad \oplus F(X_1, \dots, Y_i|S_1) \otimes F(Z_i, \dots, X_n|S_2) \\ &\quad \oplus F(X_1, \dots, Z_i|S_1) \otimes F(Y_i, \dots, X_n|S_2) \end{aligned}$$

が与えられている (ここで $S_1 = S \cap (1, i)$, $S_2 = S \cap (i, n)$ である). 単射 ι_S は上の意味の加法性と両立する.

部分集合 $T \subset S$ に対し, $I_1, \dots, I_c$ を T に対応する I の分割, $S_i = S \cap I_i^\circ$ とおくと, 多重の複体の包含関係

$$F(I|S) \subset F(I_1|S_1) \otimes \dots \otimes F(I_c|S_c)$$

があるとする. ここで後者は, $\iota_{S_i} : F(I_i|S_i) \hookrightarrow F(I_i \amalg S_i)$ のテンソル積をもちいて $F(I \amalg S)$ の部分複体と見ている.

(2) $S \subset S'$ のとき, 全射の (多重複体の) quasi-isomorphism

$$\sigma_{SS'} : F(X_1, \dots, X_n|S) \rightarrow F(X_1, \dots, X_n|S') .$$

が与えられている.

もし $S \subset S' \subset S''$ ならば, $\sigma_{SS''} = \sigma_{S'S''} \sigma_{SS'}$ が成り立つ. 写像 $\sigma_{SS'}(X_1, \dots, X_n)$ は各変数について加法的であるとする.

$T \subset S \subset S'$ のとき, 写像 σ は (1) の包含と両立するとする, すなわち, $S'_i = S' \cap I_i^\circ$ とおくと次は可換である.

$$\begin{array}{ccc} F(I|S) \hookrightarrow F(I_1|S_1) \otimes \dots \otimes F(I_c|S_c) & & \\ \sigma_{SS'} \downarrow & & \downarrow \otimes \sigma_{S_i S'_i} \\ F(I|S') \hookrightarrow F(I_1|S'_1) \otimes \dots \otimes F(I_c|S'_c) . & & \end{array}$$

次のように略記する： $\sigma_S = \sigma_{\emptyset S} : F(I) \rightarrow F(I|S)$, $\tau_S := \iota_S \sigma_S : F(I) \rightarrow F(I \upharpoonright S)$.

(3) 空でない部分集合 $K = \{k_1, \dots, k_b\} \subset (1, n)$ で S と交わらないものに対し, 多重の複体の写像

$$\varphi_K : F(X_1, \dots, X_n|S) \rightarrow F(X_1, \dots, \widehat{X_{k_1}}, \dots, \widehat{X_{k_b}}, \dots, X_n|S)$$

が与えられている.

$K = K' \amalg K''$ のとき, $\varphi_K = \varphi_{K''} \varphi_{K'} : F(I|S) \rightarrow F(I - K|S)$ が成り立つ. 写像 φ_K は各変数について加法的である.

$T \subset S$ のとき, 写像 φ_K は (1) の包含と両立するとする. K と S' が交わらないとき, 次は可換である.

$$\begin{array}{ccc} F(I|S) & \xrightarrow{\varphi_K} & F(I - K|S) \\ \sigma_{SS'} \downarrow & & \downarrow \sigma_{SS'} \\ F(I|S') & \xrightarrow{\varphi_K} & F(I - K|S'). \end{array}$$

(4) $\overset{\circ}{I}$ の部分集合 R, J で交わりが空であり $|J| \neq \emptyset$ なるものに対し, 次の複体の列を考える (ここで S は J の部分集合をわたり, 写像は σ の交代和である).

$$\begin{aligned} F(I|R) &\xrightarrow{\sigma} \bigoplus_{\substack{|S|=1 \\ S \subset J}} F(I|R \cup S) \\ &\xrightarrow{\sigma} \bigoplus_{\substack{|S|=2 \\ S \subset J}} F(I|R \cup S) \rightarrow \dots \rightarrow F(I|R \cup J) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

これは完全列であるとする.

(5) 単位元の存在. まず3つの対象 X, Y, Z に対し, 写像

$$\psi_Y : F(X, Y) \otimes F(Y, Z) \rightarrow F(X, Z)$$

を導来圏における合成写像 $\varphi_Y \circ (\sigma_Y)^{-1}$ とする. ただし σ_Y, φ_Y は次の写像であった:

$$F(X, Y) \otimes F(Y, Z) \xleftarrow{\sigma_Y} F(X, Y, Z) \xrightarrow{\varphi_Y} F(X, Z).$$

$H^0 F(X, Y)$ を $F(X, Y)$ の0次コホモロジーとし, ψ_Y の導く写像を $\psi_Y : H^0 F(X, Y) \otimes H^0 F(Y, Z) \rightarrow H^0 F(X, Z)$ とする. $u \in H^0 F(X, Y)$, $v \in H^0 F(Y, Z)$ に対し, $u \cdot v := \psi_Y(u \otimes v)$ と定める.

各対象 X に対し元 $1_X \in H^0 F(X, X)$ が存在し, すべての $u \in H^0 F(X, Y)$ について $1_X \cdot u = u$ が成り立ち, $u \in H^0 F(Y, X)$ について $u \cdot 1_X = u$ が成り立つとする.

以下では付加的な条件を述べる.

(iv) (6) 各対象 X と, 有限全順序集合 I ($|I| \geq 2$) に対して, 定数族 $i \mapsto X_i = X$ を考える. 対角元とよばれる元

$$\Delta_X(I) \in F(I) = F(X, \dots, X)$$

(これは次数 0 の cocycle とする) が与えられている. とくに $|I| = 2$ のとき, $\Delta_X = \Delta_X(I) \in F(X, X)$ と書く.

(7) 有限全順序集合 I と $k \in I$ および $m \geq 2$ に対し, I により, I において k を m 個の k のコピーで置き換えてえられる有限全順序集合を表す. たとえば $I = [1, n]$ のとき,

$$I^\sim = \{1, \dots, k-1, k_1, \dots, k_m, k+1, \dots, n\}.$$

である.

対角延長とよばれる複体の写像 $\text{diag}(I, I^\sim) : F(I) \rightarrow F(I^\sim)$ が与えられている.

対角元と対角延長は適切な条件をみたす (ここでは省略する, [Ha-4], §1 参照). 大切なのはそれより次が導かれることである. 対象 X, Y, Z に対し導来圏における写像 $\psi_Y : F(X, Y) \otimes F(Y, Z) \rightarrow F(X, Z)$ が定まることを思い出す. そのコホモロジーをとると写像 $\psi_Y : H^m F(X, Y) \otimes H^n F(Y, Z) \rightarrow H^{m+n} F(X, Z)$ が得られる. この写像 $u \otimes v \mapsto u \cdot v$ について $1_X := [\Delta_X] \in H^0 F(X, X)$ は単位元である, すなわち $u \in H^n F(X, Y)$ について $1_X \cdot u = u$ が成り立ち, $u \in H^n F(Y, X)$ について $u \cdot 1_X = u$ が成り立つ. これは条件 (5) を含んでいることに注意する.

(v) (生成系についての条件)

(8) I 上の対象の列 X に対し, 複体 $F(I) = F(I; X)$ は次数ごとに, 与えられた集合 $\mathcal{S}_F(I)$ (生成系とよぶ) のうえの自由アーベル群である. この生成系は, X の直和と両立するとする.

(9) I を有限全順序集合, $I_1, \dots, I_r$ を部分区間であって $\text{tm}(I_i) \leq \text{in}(I_{i+1})$ が各 i について成り立つとする (I_i と I_{i+1} の交わりは空か一点).

I 上の族 X_i が与えられているとする. A が $\{1, \dots, r\}$ の部分集合のとき, A で添え字づけられた族 $\alpha_i \in \mathcal{S}_F(I_i)$ (ただし $i \in A$) がプロパーに交わるかどうか, という条件が与えられていて, 次の条件がみたされる:

- もし $\{\alpha_i\}_{i \in A}$ がプロパーに交わるのならば, 任意の部分集合 $B \subset A$ に対し, B で添え字づけられた族 $\{\alpha_i\}_{i \in B}$ もプロパーに交わる.
- もし $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ がプロパーに交わるのならば, 各 i に対し $\partial \alpha_i = \sum c_{i\nu} \beta_\nu$, $\beta_\nu \in \mathcal{S}_F(I_i)$ (ただし $c_{i\nu} \neq 0$) と書くとき, 各 ν に対し,

$$\{\alpha_1, \dots, \alpha_{i-1}, \beta_\nu, \alpha_{i+1}, \dots, \alpha_r\}$$

はプロパーに交わる.

(10) 部分複体 $F(I|S)$ は、次のように記述される． S の定める I の分割を $I_1, \dots, I_r$ とする，すなわち $\text{in}(I_1) = \text{in}(I)$, $\text{tm}(I_i) = \text{in}(I_{i+1})$, $\text{tm}(I_r) = \text{tm}(I)$ である．複体 $F(I_1) \otimes \dots \otimes F(I_r)$ の部分複体として， $F(I|S)$ は $\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_r$ ，ただし $\{\alpha_i\} \in F(I_i)$ はプロパーに交わるもの，によって生成される．

(11)(特別な部分複体の存在) I を有限全順序集合， $L_1, \dots, L_r$ をその部分区間でつぎの条件をみたすとする：

(a) L_i の合併は I である．

(b) $\text{tm}(L_i) = \text{in}(L_{i+1})$ または $\text{tm}(L_i) + 1 = \text{in}(L_{i+1})$ が成り立つ．((b) は $L_i \cap L_{i+1}$ が高々 1 点からなることと同値である．便利のため，このとき $\{L_i\}$ はほとんど交わらないということにする)

I 上の対象の列 X_i が与えられているとき，複体 $F(L_1) \otimes \dots \otimes F(L_r)$ の部分複体の族 Dist を，以下の条件をみたすもののうち最小のものと定める．このとき Dist の各部分複体は $F(L_1) \otimes \dots \otimes F(L_r)$ と quasi-isomorphic であるとする．

(11-1) $I_1, \dots, I_c$ が I の部分区間の列で，合併が I であり，上の条件 (a), (b) をみたし，さらに $L_1, \dots, L_r$ より粗いとする（各 I_i がいくつかの L_j の合併になっている）．このとき，部分集合 $S_i \subset \overset{\circ}{I_i}$ が定まり， I_i の S_i による分割を $\{I_{ik}; k = 1, \dots, r_i\}$ とすると， i, k が $1 \leq i \leq c, 1 \leq k \leq r_i$ をわたるときの $\{I_{ik}\}$ の全体が $\{L_j\}$ と一致する．

さらに別の有限全順序集合 $\mathbb{I}$ および包含写像 $I \hookrightarrow \mathbb{I}$ が与えられており，各 I_a の像がやはり部分区間であるとする．また X の $\mathbb{I}$ 上の族への延長が与えられている． $\mathbb{I}$ の部分区間の列 $J_1, \dots, J_s \subset \mathbb{I}$ であって， I_i および J_j のすべての集合 $\{I_i, J_j\}_{i,j}$ がほとんど交わらないとし，さらにプロパーに交わるいくつかの元 $f_j \in F(J_j)$, $j = 1, \dots, s$ が与えられているとする．このとき部分複体

$$[F(I_1|S_1) \otimes \dots \otimes F(I_c|S_c)]_{\mathbb{I}, f},$$

を $\alpha_1 \otimes \dots \otimes \alpha_c$, $\alpha_i \in F(I_i|S_i)$ ，ただし集合 $\{\alpha_1, \dots, \alpha_c, f_j (j = 1, \dots, s)\}$ はプロパーに交わる，によって生成されているものと定める．これは Dist に含まれる．

(11-2) Dist はテンソル積について閉じている．

(11-3) Dist は有限の交叉について閉じている．

(1.2) 定義． Quasi DG 圏 $\mathcal{C}$ に対して，そのホモトピー圏とよばれる加法圏 $Ho(\mathcal{C})$ が次のように定められる．対象は $\mathcal{C}$ の対象と同じものであり，ふたつの対象 X, Y に対して $\text{Hom}(X, Y) := H^0 F(X, Y)$ であり，合成は上で出てきた ψ_Y を用いて定まる写像

$$H^0 F(X, Y) \otimes H^0 F(Y, Z) \rightarrow H^0 F(X, Z)$$

である．

0 は零対象であり，直和 $X \oplus Y$ は圏論的な直和を与え， Δ_X のコホモロジー類は恒等写像 $1_X : X \rightarrow X$ を与える．

§2. Quasi DG 圏に値をもつ C -diagram のなす quasi DG 圏.

アーベル群の圏 $\mathcal{A}$ から, アーベル群の複体の DG 圏 $C(\mathcal{A})$ を構成することができ, そのホモトピー圏 $Ho(C(\mathcal{A}))$ は三角圏をなす. 同様に quasi DG 圏から別の DG 圏を構成し, そのホモトピー圏が三角圏をなすようにできるだろうか? これが可能であることを以下で述べる.

(2.1) 定義. $\mathcal{C}$ を quasi DG 圏とする. $\mathcal{C}$ に値をもつ C -diagram とは,

$$K = (K^m; f(m_1, \dots, m_\mu))$$

なる形の対象である. ここで (K^m) は $m \in \mathbb{Z}$ で添え字づけられた $\mathcal{C}$ の対象の列で有限個以外の m に対しては $K^m = 0$ であるようなものであり,

$$f(m_1, \dots, m_\mu) \in F(K^{m_1}, \dots, K^{m_\mu})^{-(m_\mu - m_1 - \mu + 1)}$$

は整数の列 $(m_1 < m_2 < \dots < m_\mu)$, $\mu \geq 2$, で添え字づけられた元の集合で, 次の条件をみたすとする.

(i) 各 $j = 2, \dots, \mu - 1$ に対し次が成り立つ.

$$\tau_{K^{m_j}}(f(m_1, \dots, m_\mu)) = f(m_1, \dots, m_j) \otimes f(m_j, \dots, m_\mu).$$

(両辺は $F(K^{m_1}, \dots, K^{m_j}) \otimes F(K^{m_j}, \dots, K^{m_\mu})$ の元である.)

(ii) 各 $(m_1, \dots, m_\mu)$ に対し次が成り立つ (∂ は複体の微分を表す).

$$\begin{aligned} & \partial f(m_1, \dots, m_\mu) \\ & + \sum_t \sum_k (-1)^{m_\mu + \mu + k + t} \varphi_{K^{m_k}}(f(m_1, \dots, m_t, k, m_{t+1}, \dots, m_\mu)) = 0 \end{aligned}$$

(和は $1 \leq t < \mu$ なる t と, $m_t < k < m_{t+1}$ なる k についてとる).

この定義の理解のため, 以下を注意する.

(a) DG 圏の場合, 条件 (i) により $f(m_1, \dots, m_\mu)$ は $f(m, n)$, $m < n$, により定まり, (ii) は

$$\partial f(m, n) + \sum_{m < k < n} (-1)^{n+k+1} f(m, k) \cdot f(k, n) = 0$$

と同値である.

(b) さらに $\mathcal{C} = C(\mathcal{A})$ (アーベル圏の複体の DG 圏) の場合には, この条件は直和複体 $\bigoplus_{m \in \mathbb{Z}} K^m[-m]$ の自己準同型

$$D = \sum_{m < n} (-1)^{n+1} f(m, n) + \sum_m (-1)^m d_{K^m} : \bigoplus_m K^m[-m] \rightarrow \bigoplus_m K^m[-m]$$

(ただし d_{K^m} は K^m の微分) が $DD = 0$ をみたすこと (微分であること) と同値である.

(c) さらに $f(m, n)$ が $f(m, n) = 0, n > m + 1$, をみたしているとき, (b) の条件は各 $f(m, m + 1)$ が複体の写像であり, かつ $f(m, m + 1) \cdot f(m + 1, m + 2) = 0$ が成り立つことに同値である. これは $(K^m; f(m, m + 1))$ が “複体の複体” をなすことに他ならない.

定義 (2.1) に戻って, $\mathcal{C}$ の対象 X と $n \in \mathbb{Z}$ に対し, $K^n = X, m \neq n$ のとき $K^m = 0$ とし, すべての $M = (m_1, \dots, m_\mu)$ に対して $f(M) = 0$ とすることにより $\mathcal{C}$ -diagram が定まる. これを $X[-n]$ で表す. 次の定理は [Ha-4] を参照.

(2.2) 定理. $\mathcal{C}$ を quasi DG 圏で付加条件 (iv)-(v) をみたすとする. このとき次の条件をみたす quasi DG 圏 $\mathcal{C}^\Delta$ が存在する:

(i) 対象は $\mathcal{C}$ に値をもつ $\mathcal{C}$ -diagram の全体である.

(ii) $\mathcal{C}$ -diagram の有限列 $K_1, \dots, K_n$ (ただし $n \geq 2$) に対して, quasi DG 圏の構造の一部として複体 $\mathbb{F}(K_1, \dots, K_n)$ が存在するが, これは $n = 2$ かつ K_1, K_2 がそれぞれ $X[n], Y[m]$ (ただし X, Y は $\mathcal{C}$ の対象で, $n, m \in \mathbb{Z}$) の形のとき, 次のように与えられる.

$$\mathbb{F}(X[m], Y[n]) = F(X, Y)[n - m].$$

とくにホモトピー圏 $Ho(\mathcal{C}^\Delta)$ においては

$$\mathrm{Hom}_{Ho(\mathcal{C}^\Delta)}(X[m], Y[n]) = H^{n-m}F(X, Y)$$

が成り立つ.

さらに写像

$$\psi_Y : H^m F(X, Y) \otimes H^n F(Y, Z) \rightarrow H^{m+n} F(X, Z)$$

(これは §1 の定義 (1.1) にあるように複体 $F(X, Y, Z)$ および写像 σ, φ を用いて構成されるもの) は同型 $H^m F(X, Y) = H^0 \mathbb{F}(X, Y[m])$ を通じて次のものと一致する:

$$\psi_Y : H^0 \mathbb{F}(X, Y[m]) \otimes H^0 \mathbb{F}(Y[m], Z[m + n]) \rightarrow H^0 \mathbb{F}(X, Z[m + n]).$$

(後者は複体 $\mathbb{F}(X, Y[m], Z[m + n])$ と写像 σ, φ を用い, 同様に構成される.)

(iii) $\mathcal{C}^\Delta$ のホモトピー圏 $Ho(\mathcal{C}^\Delta)$ は三角圏の構造をもつ.

§3. 底多様体の上の代数多様体のなす quasi DG 圏.

以下では体 k のうえの準射影代数多様体を考える. 準射影代数多様体 X と各整数 s に対し, 次元 s のサイクル複体 $\mathcal{Z}_s(X, \cdot)$ が対応する. 詳しくは [Bl-1], [Bl-2], [Bl-3] を参照.

$\mathcal{Z}_s(X, n)$ は $X \times \square^n$ の次元 $s + n$ の既約閉部分多様体で各面とプロパーに交わるもので生成される自由アーベル群を, 適切な部分群 (退化した元からなる部分群) で割って得られるものである. 境界写像 $\partial : \mathcal{Z}_s(X, n) \rightarrow \mathcal{Z}_s(X, n - 1)$ が余次元 1 の面への制限の交代和をとることにより定まり, ホモロジー複体 that 得られる. そのホモロジー群 $\mathrm{CH}_s(X, n) = H_n \mathcal{Z}_s(X, \cdot)$ は高次 Chow 群とよばれる. サイクル複体は通常の仕方でコホ

モロジー複体とみなすこともある．混乱がなければ $\mathcal{Z}_s(X, \cdot)$ の代わりに $\mathcal{Z}_s(X)$ とも書く． $\mathcal{Z}_s(X)$ の代わりに $\mathcal{Z}^r(X)$, ただし $r = \dim X - s$ とも表す．

S を準射影代数多様体とし, $(\text{Smooth}/k, \text{Proj}/S)$ により S 上の代数多様体 $p: X \rightarrow S$, ただし X は k 上スムーズな準射影代数多様体, p は射影的な写像, のなす圏とする． S 上のシンボルとは,

$$\bigoplus_{\alpha \in A} (X_\alpha/S, r_\alpha)$$

の形の対象, ただし X_α は有限集合 A で添え字づけられた $(\text{Smooth}/k, \text{Proj}/S)$ の対象の集合であり, $r_\alpha \in \mathbb{Z}$ である．次は [Ha-3] を参照．

(3.1) 定理. 次の条件をみたす quasi DG 圏 $\text{Symb}(S)$ が存在する．

(i) 対象は S 上のシンボルの全体である．

(ii) シンボルの有限列 $K_1, \dots, K_n$, ただし $n \geq 2$, に対し, quasi DG 圏の構造の一部として, 複体 $F(K_1, \dots, K_n)$ と写像 ι, σ および φ が定まる．シンボルが $K_i = (X_i/S, r_i)$ の形のときは対応する複体 $F(K_1, \dots, K_n)$ は次に quasi-isomorphic である：

$$\mathcal{Z}_{d_1}(X_1 \times_S X_2) \otimes \dots \otimes \mathcal{Z}_{d_{n-1}}(X_{n-1} \times_S X_n)$$

(ここで $d_i = \dim X_{i+1} - r_{i+1} + r_i$ であり, 上記はファイバー積 $X_i \times_S X_{i+1}$ のサイクル複体のテンソル積である．)

この定理の内容について注意をする．

(a) 複体 $F(K_1, \dots, K_n)$ は, $n = 2$ で $K_1 = (X/S, r)$, $K_2 = (Y/S, s)$ のとき, $d = \dim Y - s + r$ として

$$F((X/S, r), (Y/S, s)) = \text{Cone}[\mathcal{Z}_s(X \times Y) \xrightarrow{j^*} \mathcal{Z}_s(X \times Y - X \times_S Y)][-1]$$

によって定められる．ここで $j: X \times Y - X \times_S Y \rightarrow X \times Y$ は開埋入であり, j^* はそれによる引き戻しである．Localization theorem [Bl-2] により quasi-isomorphism $\mathcal{Z}_d(X \times_S Y) \rightarrow F((X/S, r), (Y/S, s))$ がある．以下では $F((X/S, r), (Y/S, s))$ を単に $F(X, Y)$ と書き, 次元 d を省く．

(b) 一般に M をスムーズな準射影代数多様体, $A \subset M$ を閉集合, $\mathcal{U} = \{U_i\}$ を有限全順序集合 I で添え字づけられた $M - A$ の開集合による被覆とする． $i_0, \dots, i_p \in I$ に対し $U_{i_0, \dots, i_p} = U_{i_0} \cap \dots \cap U_{i_p}$ とし, 複体 $\mathcal{Z}(M, \mathcal{U})$ をつぎの二重複体の全複体と定める：

$$0 \rightarrow \mathcal{Z}_s(M) \xrightarrow{\delta} \bigoplus \mathcal{Z}_s(U_{i_0}) \xrightarrow{\delta} \bigoplus_{i_0 < i_1} \mathcal{Z}_s(U_{i_0 i_1}) \rightarrow \dots \rightarrow \bigoplus_{i_0 < \dots < i_p} \mathcal{Z}_s(U_{i_0, \dots, i_p}) \rightarrow \dots$$

($\mathcal{Z}_s(M)$ は次数 0 におく)．ここで δ は Čech 複体の微分である．自然な quasi-isomorphism

$$\iota: \mathcal{Z}_s(A) \rightarrow \mathcal{Z}_s(M, \mathcal{U})$$

があることに注意する．

例として $A = X \times_S Y \subset M = X \times Y$ とし, $U_{12} := M - A$ のみからなる開被覆 $\{U_{12}\}$ を考えると, $\mathcal{Z}(M, \mathcal{U})$ は (a) の複体 $F(X, Y)$ に他ならない.

(c) $(Z/S, t)$ を別のシンボルとする. $U_{23} = Y \times Z - Y \times_S Z$ とすると $F(Y, Z) = \mathcal{Z}(Y \times Z, \{U_{23}\})$ である.

$p_{12} : X \times Y \times Z \rightarrow X \times Y$ などで射影を表す. 元 $u \in \mathcal{Z}^r(X \times Y, n)$ と $v \in \mathcal{Z}^s(Y \times Z, m)$ に対し, 逆像 $p_{12}^* u$ と $p_{23}^* v$ は $X \times Y \times Z \times \square^{n+m}$ において (サイクルの意味で) プロパーに交わりと限らない. しかし

$$\mathcal{Z}^r(X \times Y, \cdot) \hat{\otimes} \mathcal{Z}^s(Y \times Z, \cdot)$$

により $\mathcal{Z}^r(X \times Y, \cdot) \otimes \mathcal{Z}^s(Y \times Z, \cdot)$ の部分複体で $u \otimes v$, ただし $p_{12}^* u$ と $p_{23}^* v$ はプロパーに交わり, により生成されているものとする, それは quasi-isomorphic な部分複体であることが知られている. そのような u, v に対し合成 $u \circ v \in \mathcal{Z}^{r+s-\dim Y}(X \times Z, \cdot)$ が定まり, 複体の写像

$$\rho : \mathcal{Z}^r(X \times Y, \cdot) \hat{\otimes} \mathcal{Z}^s(Y \times Z, \cdot) \rightarrow \mathcal{Z}^{r+s-\dim Y}(X \times Z, \cdot)$$

を得る.

これを自然に拡張することにより積写像

$$\rho : \mathcal{Z}(X \times Y, \{U_{12}\}) \hat{\otimes} \mathcal{Z}(Y \times Z, \{U_{23}\}) \rightarrow \mathcal{Z}(X \times Y \times Z, \{p_{12}^{-1}(U_{12}), p_{23}^{-1}(U_{23})\})$$

が存在する. ここで $\{p_{12}^{-1}(U_{12}), p_{23}^{-1}(U_{23})\}$ は $U_{123} := X \times Y \times Z - X \times_S Y \times_S Z$ の開被覆を与える.

自然に定まる制限写像

$$r : \mathcal{Z}(X \times Y \times Z, \{U_{123}\}) \rightarrow \mathcal{Z}(X \times Y \times Z, \{p_{12}^{-1}(U_{12}), p_{23}^{-1}(U_{23})\})$$

は quasi-isomorphism であることに注意する.

簡単のため Y が射影代数多様体であるとする, p_{13} による順像写像を次の合成で定めることができる:

$$p_{13*} : \mathcal{Z}(X \times Y \times Z, \{U_{123}\}) \rightarrow \mathcal{Z}(X \times Y \times Z, \{p_{13}^{-1}U_{13}\}) \rightarrow \mathcal{Z}(X \times Z, \{U_{13}\}).$$

ここで前者は制限写像, 後者は固有写像 p_{13} による順像である.

次の二重複体を考えよう.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}(X \times Y, \{U_{12}\}) \hat{\otimes} \mathcal{Z}(Y \times Z, \{U_{23}\}) & & \\ \downarrow \rho & & \\ \mathcal{Z}(X \times Y \times Z, \{U_{123}\}) \xrightarrow{r} \mathcal{Z}(X \times Y \times Z, \{p_{12}^{-1}(U_{12}), p_{23}^{-1}(U_{23})\}) & & \end{array}$$

ここで右上と左下の項は次数を 0 とする. この全複体を $F(X, Y, Z)$ と定める. 写像 $\sigma : F(X, Y, Z) \rightarrow F(X, Y) \hat{\otimes} F(Y, Z)$ が $\mathcal{Z}(X \times Y, \{U_{12}\}) \hat{\otimes} \mathcal{Z}(Y \times Z, \{U_{23}\})$ への射影として

定まり, 写像 $\varphi : F(X, Y, Z) \rightarrow F(X, Z)$ が $\mathcal{Z}(X \times Y \times Z, \{U_{123}\})$ への射影と p_{13*} を合成することにより定まる.

(d) $n \geq 4$ のときの複体 $F(X_1, \dots, X_n)$ および写像 σ, φ の定義も同様に行われる.

上の定理で述べられた quasi DG 圏 $Symb(S)$ に値をもつ C -diagram の全体は quasi DG 圏 $Symb(S)^\Delta$ をなす. そのホモトピー圏 $Ho(Symb(S)^\Delta)$ は前節の定理により三角圏をなす.

(3.2) 定義. $\mathcal{D}(S) := Ho(Symb(S)^\Delta)$ と表す. この三角圏を S 上の混合モチーフのなす三角圏と定める. 次は定理 (2.2) と定理 (3.1) から導かれる ([Ha-4] を参照).

(3.3) 定理. X を $(\text{Smooth}/k, \text{Proj}/S)$ の対象, $r \in \mathbb{Z}$ とすると, $\mathcal{D}(S)$ の対象

$$h(X/S)(r) := (X/S, r)[-2r]$$

が定まる.

そのような二つの対象に対し,

$$\text{Hom}_{\mathcal{D}(S)}(h(X/S)(r)[2r], h(Y/S)(s)[2s - n]) = \text{CH}_{\dim Y - s + r}(X \times_S Y, n)$$

が成り立つ.

関手

$$h : (\text{Smooth}/k, \text{Proj}/S)^{opp} \rightarrow \mathcal{D}(S)$$

が存在して X には $h(X/S)$ が対応し, 写像 $f : X \rightarrow Y$ にはそのグラフの類 $[\Gamma_f] \in \text{CH}_{\dim X}(Y \times_S X)$ が対応する.

謝辞 査読者の方から詳しく有益なご意見をいただきました. ここに記して深く感謝いたします.

参考文献.

[Bl-1] S. Bloch, Algebraic cycles and higher K -theory, Adv. Math., **61** (1986), 267–304.

[Bl-2] S. Bloch, The moving lemma for higher Chow groups, J. Algebraic Geom., **3** (1994), 537–568.

[Bl-3] S. Bloch, Some notes on elementary properties of higher chow groups, including functoriality properties and cubical chow groups, preprint on Bloch's home page.

[CH] A. Corti and M. Hanamura, Motivic decomposition and intersection Chow groups I, Duke Math. J., **103** (2000), 459–522.

[Fu] Fulton, W. : Intersection Theory, Springer, Berlin, New York, 1984.

[Ha-1] M. Hanamura, Mixed motives and algebraic cycles I, II, and III, *Math. Res. Lett.*, **2** (1995), 811–821; *Invent. Math.*, **158** (2004), 105–179; *Math. Res. Lett.*, **6** (1999), 61–82.

[Ha-2] M. Hanamura, Homological and cohomological motives of algebraic varieties, *Invent. Math.*, **142** (2000), 319–349.

[Ha-3] M. Hanamura, Cycle theory of relative correspondences, preprint.

[Ha-4] M. Hanamura, Quasi DG categories and mixed motivic sheaves, preprint.

[JT] A. Joyal and M. Tierney, Quasi-categories vs Segal spaces, preprint.